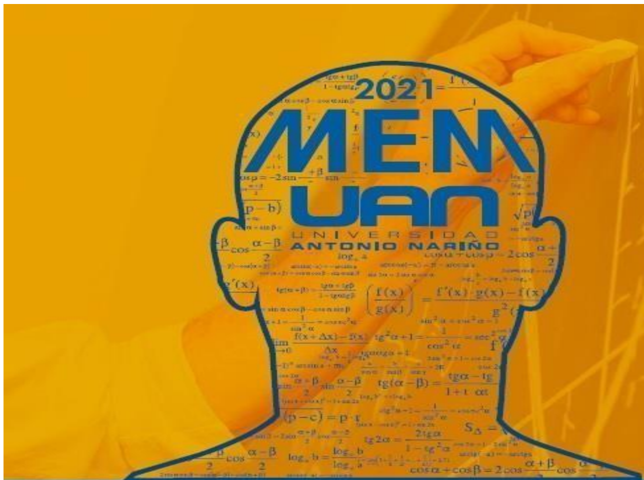


XI SIMPOSIO DE MATEMÁTICA Y Educación Matemática

X CONGRESO INTERNACIONAL DE Matemática asistida por Computador

I SIMPOSIO DE COMPETICIONES Matemáticas

Modalidad virtual: 18 al 20 de febrero de 2021

CONFERENCISTAS INVITADOS

Dr. Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science, Israel

Dr. Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba, España

Dr. Alan H. Schoenfeld
Universidad de California en Berkeley, Estados Unidos

Dr. Ángel Gutiérrez
Universidad de Valencia, España

Dr. Christian Mercat
Universidad Claude Bernard Lyon 1, Francia

Dr. Cleyton Hércules Gontijo
Universidade de Brasilia, Brasil

Dr. Ferdinando Arzarello
Universidad de Turín, Italia

Dr. Gerardo Chacón Guerrero
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Dr. Hermes Nolasco
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Dr. Hilbert Blanco Álvarez
Universidad de Nariño, Colombia

Dr. Jean-Marie Laborde
Ecole Normale Supérieure, Francia

Dr. Jinfa Cai
University of Delaware, Estados Unidos

Dr. José Carlos Pinto Leivas
Universidad Franciscana, Santa María Brasil

Dr. José Sigarreta Almira
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Dr. Juan Díaz Godino
Universidad de Granada, España

Dr. Juan Nápoles Valdés
Universidad Tecnológica Nacional de Argentina, Argentina

Dr. Luis Cáceres
Universidad de Puerto Rico, Puerto Rico

Dr. Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle, Colombia

Dr. Luis Enrique Moreno Armella
Cinvestav, México

Dr. Luis Radford
Laurentian University, Canadá

Dr. Marcel Pochulu
Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Dr. Mauro García
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Dr. Miguel Cruz Ramírez
Universidad de Holguín, Cuba

Dr. Milton Rosa
Universidad Federal de Ouro Preto, Brasil

Dr. Mogens Niss
Roskilde University, Denmark

Dr. Ole Skovsmose
Universidad Estatal de São Paulo, Rio Claro, Brasil

Dr. Olga Lidia Pérez González
Universidad de Camagüey, Cuba

Dr. Ricardo Cantoral
Cinvestav IPN, México

Dr. Roger Nelsen
Lewis & Amp; Clark College, Estados Unidos

Dr. Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España

Dr. Ubiratan D´Ambrosio
Universidad Estatal de Campinas, Brasil

Dr. Uldarico Malaspina
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Dra. Carmen Batanero
Universidad de Grabada, España

Dra. Cecilia Crespo Crespo
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Dra. Clara Helena Sánchez Botero
Universidad Nacional, Colombia

Dra. Gabriele Kaiser
University of Hamburg, Germany

Dra. Jill Adler
University of Witwatersrand, South Africa.

Dra. Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Dra. Mabel Rodríguez
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

Dra. Marcela Cecilia Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Dra. María Burgos
Universidad de Granada, España

Dra. María Losada Falk
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Dra. Michèle Artigue
Universidad de París VII, Francia

Dra. Patricia Fauring
Universidad de Buenos Aires, Argentina

Dra. Veronica Albanese
Universidad de Granada, España

Dr. Claudi Alsina Catalá
Universidad Politécnica de Cataluña, España

CUOTA DE INSCRIPCIÓN

- Docentes y estudiantes de Universidades organizadoras: COP $ 20.000
- Ponentes y participantes externos: COP $ 30.000

Hasta el 31 de enero de 2021

INFORMACIÓN

Oficina programas de Educación Matemática
Teléfono: (+57) 320 420 60 97
E-mail: mem@uan.edu.co - director.doctoradoem@uan.edu.co
Sede Federmán Calle 58A # 37 - 94
Bogotá D.C. - Colombia

Organizadores:

Patrocinadores:

VIGILADA MINEDUCACIÓN

XI Simposio de Matemática y Educación Matemática y el
X Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador
Volumen 8, No. 2 - MEM2021
ISSN: 2346-3724

María Nubia Quevedo - Universidad Militar Nueva Granada

José Alberto Rua - Universidad de Medellín

Tania plazas - Universidad Pedagógica Nacional

Fabián Sánchez Salazar - Universidad Central de Colombia

Mauricio Bogoya – Universidad Nacional de Colombia

Mauricio Penagos – Universidad Surcolombiana

Publio Suarez Sotomonte - Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja

Dilber Albeiro Baquiro – Universidad de la Amazonía

Diana Contento – Universidad de Cundinamarca

Ángela Cristina Zapata – Universidad de La Salle

Rafael Alberto Méndez – Universidad del Rosario

Secretario Científico:

Diana Carolina Pérez Duarte: Universidad Antonio Nariño

Miembros

Gerardo Chacón Guerrero

Rafael Ignacio Escamilla Forero

Lorena Ruiz Serna

Iván Useche Cifuentes

Diana Pérez Duarte

Comité Científico

Mary Falk de Losada- Universidad Antonio Nariño,

Grace Vesga -Universidad Antonio Nariño,

Ciro Anzola - Universidad Antonio Nariño,

Luis Fernando Mariño - Universidad Francisco de Paula Santander

Edgar Balaguera - Universidad Santo Tomás,

Roberto Carlos Torres- Universidad del Magdalena

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez - Universidad Antonio Nariño,
Gerardo Chacón - Universidad Antonio Nariño,

Rafael Sánchez Lamoneda - Universidad Antonio Nariño,

Diana Pérez Duarte – Universidad Antonio Nariño,

Miguel Ángel Borges - Universidad Antonio Nariño, Colombia

PRESENTACIÓN

El XI Simposio de Matemáticas y Educación Matemática y el X Congreso Internacional de Matemáticas asistidas por Computador, MEM 2020, organizado por la Universidad Antonio Nariño en febrero de 2020 convocó a numerosos y destacados docentes e investigadores provenientes de diversas latitudes.

La situación de emergencia sanitaria producida por la pandemia del COVID 19 hizo que se optará por realizar un evento online. Las dificultades se convirtieron en oportunidad: se alcanzó un récord de asistencia y se presentó a la comunidad de educadores matemáticos un nutrido número de conferencistas invitados de reconocido prestigio nacional e internacional.

El MEN es una ineludible referencia para todos los estudiosos del área donde se comparten valiosas experiencias, estudios y resultados que dan cuenta de la expansión de la Educación Matemática como disciplina científica.

En un primer volumen de las Actas de MEM 2021 se presentan resúmenes de conferencias, cursos y comunicaciones presentadas en el evento. En este número recogemos artículos escritos por nuestros estudiantes de los programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática con la intención de que tengan oportunidad para iniciarse en la escritura de artículos de investigación científica. Además, la publicación está abierta a la publicación en extenso, previa solicitud de los autores y correspondiente arbitraje, de las contribuciones presentadas por asistentes al evento.

Gerardo Chacón

Editor en jefe

Bogotá, Colombia. Julio de 2022.

Contenido

ARTÍCULOS COMPLETOS

EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE DEMOSTRACIÓN

Juan Alvarez Esteven*, Isabel Alonso Berenguer** y Alexander Gorina Sánchez***
*Universidad de Oriente, Cuba, jalvarez@uo.edu.cu** Universidad de Oriente, Cuba, ialonso@uo.edu.cu*** Universidad de Oriente, Cuba, gorina@uo.edu.cu

***Abstract*— The present study aims to present a model of the dynamics of the teaching-learning process of inductive-deductive reasoning in mathematical problems solving of demonstration. This model enables a greater understanding of the internal movements of the aforementioned dynamics and its orientation towards the formation of a competence for solving mathematical problems of demonstration, by considering the dialectical contradiction that manifests between inductive reasoning, which requires the analysis of a mathematical problem of demonstration, and deductive reasoning, necessary to obtain the solution of the same. The model provided is specified in a didactic method, which contains a system of didactic procedures that allows the formation of the aforementioned competence in university degrees with a mathematical profile. The assessment of the feasibility and scientific-methodological relevance of the model, method and system of didactic procedures was carried out from an expert judgment. The corroboration of the validity of the system of procedures it was made through its application to students of 1st year of the career of Mathematics at the Universidad de Oriente, Cuba. The results obtained in the work were satisfactory and were produced as part of a doctoral thesis successfully defended in 2019.**

***Keywords*— mathematical problems solving, mathematical demonstration, inductive reasoning, deductive reasoning.**

***Resumen*— El presente estudio tiene como objetivo la presentación de un modelo de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. Este modelo posibilita una mayor comprensión de los movimientos internos de la citada dinámica y su orientación hacia la formación de una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración, al considerar la contradicción dialéctica que se manifiesta entre el razonamiento inductivo, que requiere el análisis de un problema matemático de demostración, y el razonamiento deductivo, necesario para obtener la solución del mismo. El modelo aportado se concreta en un método didáctico, que es contentivo de un sistema de procedimientos didácticos que permite la formación de la referida competencia en carreras universitarias de perfil matemático. La valoración de la factibilidad y pertinencia científico-metodológica del modelo, el método y el sistema de procedimientos didácticos fue realizada a partir del criterio de expertos. La corroboración de la validez del sistema de procedimientos se llevó a cabo mediante su aplicación a estudiantes del 1er año de la carrera Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, Cuba. Los resultados obtenidos en el trabajo fueron satisfactorios y se produjeron como parte de una tesis doctoral defendida exitosamente en el año 2019.**

***Palabras clave*— resolución de problemas matemáticos, demostración matemática, razonamiento inductivo, razonamiento deductivo.**

I. INTRODUCCIÓN

Muchos son los autores que han abordado el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos [1]-[10], los que han profundizado en la forma en que los estudiantes resuelven los problemas matemáticos, sus creencias, recursos cognitivos, las habilidades que manifiestan para la actividad resolutora, las estrategias heurísticas y metacognitivas que emplean, la organización que hacen del contenido de aprendizaje, entre otros aspectos.

Todos estos resultados han contribuido al progreso de la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos; no obstante, aún se presentan dificultades con el aprendizaje de los problemas de demostración. En esta dirección se han realizado también numerosas investigaciones, las que han dado cuenta del bajo nivel de los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones [3], [4], [6].

Algunas de estas investigaciones señalan dificultades con los libros de texto, que no dan un adecuado tratamiento didáctico al proceso de demostración, preocupándose sólo por presentar la demostración de los teoremas. Otras concluyen que los docentes tienden a utilizar en sus clases el contenido extraído del libro de texto, sin realizar la necesaria transposición didáctica que facilite el aprendizaje de los métodos de demostración. Por último, se culpa a los planes de estudio por no ser orientadores, ni disponer de un adecuado respaldo de tiempo para la enseñanza de los problemas matemáticos de demostración. De manera que ha ido creciendo el consenso sobre la necesidad de enseñar a resolver problemas de demostración para potenciar los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. De aquí que se haya definido como problema de investigación: *insuficiencias en la aplicación del contenido matemático a la resolución de problemas de demostración*.

En la generalidad de las investigaciones citadas anteriormente se reconoce que la resolución de los problemas de demostración es una de las principales dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Sin embargo, la generalidad de ellas se queda sólo a nivel del reconocimiento de dicha problemática, sin llegar a proponer soluciones didácticas orientadas a caracterizar su lógica dinamizadora en el citado proceso de enseñanza-aprendizaje [7]. En correspondencia con lo analizado anteriormente, el objetivo del presente trabajo fue la presentación de un modelo de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, que se concreta en un método didáctico, que es contentivo de un sistema de procedimientos didácticos que permite la formación de la referida competencia en carreras universitarias de perfil matemático.

II. METODOLOGÍA

La modelación se realizó utilizando el sistema categorial de la Teoría Holístico-Configuracional [11] y requirió una reconstrucción teórica que se sustentó en la Didáctica de la

Matemática y su relación con aquellas teorías que permiten explicar pertinentemente la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración: la Teoría del Aprendizaje Significativo [12], el Enfoque del Procesamiento de la Información [13], la Teoría de la Educación Desarrolladora [14].

Además, se utilizó el método sistémico-estructural-funcional para facilitar la elaboración del método didáctico y del sistema de procedimientos didácticos, desde la modelación realizada.

La valoración de la factibilidad y pertinencia científico-metodológica del modelo, el método y el sistema de procedimientos didácticos fue realizada a partir del criterio de expertos, utilizando el método Delphi [15]. Mientras que la corroboración de la validez del sistema de procedimientos se llevó a cabo mediante su aplicación a estudiantes del 1er año de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, Cuba.

III. Resultados

A. *El nuevo modelo obtenido*

El principal resultado obtenido en el estudio fue un nuevo modelo de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, el que está conformado por tres dimensiones que permiten revelar la transformación de dicho proceso. Estas dimensiones son: 1) *explorativa inductiva para la conjuración matemática*, 2) *validativa inductiva de conjeturas matemáticas,* y 3) *demostrativa deductiva de conjeturas matemáticas* (ver Fig. 1).

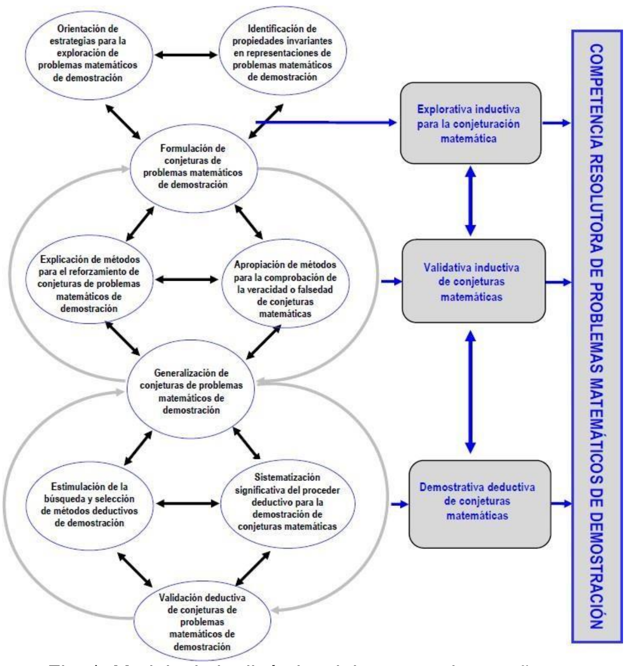


Fig. 1: Modelo de la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

- *Primera dimensión del modelo*

El movimiento de esta dimensión parte de la configuración *orientación de estrategias para la exploración de problemas matemáticos de demostración*, que es expresión de un proceso que realiza el profesor para facilitar información, guía y asesoramiento a los estudiantes, que les permita una adecuada selección y aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas durante el análisis de los problemas matemáticos de demostración, enfatizando en la estructura del problema, es decir en las condiciones y exigencias del mismo, así como en los objetos, características y relaciones que las componen.

Ahora bien, esta orientación de estrategias para la exploración de problemas matemáticos de demostración, hecha por el profesor, conduce a la *identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración*, configuración que da cuenta del proceso de análisis llevado a cabo por el estudiante, mediante el cual reconoce las regularidades que se manifiestan en las representaciones del problema matemático que va realizando, a partir de la adición de información recuperada de su base de conocimientos y experiencias, así como del empleo de las estrategias heurísticas y metacognitivas previamente aprendidas, para visualizar, identificar patrones, relaciones, regularidades y propiedades, motivado por el interés de resolver el citado problema, todo lo cual debe conducir a que emerjan ideas sobre la posible solución o vía de solución del problema.

La relación entre la orientación de estrategias para la exploración de problemas matemáticos de demostración y la identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración se sintetiza en la *formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración*, configuración que es expresión de la capacidad del estudiante para concebir y enunciar una idea hipotética a partir de la observación e interpretación de las propiedades de determinados objetos presentes en representaciones del problema que trata de resolver, y de las relaciones que se dan entre éstos objetos, los que debe haber examinado y comparado hasta que haya descubierto regularidades que sean relevantes a los efectos de su solución.

Las relaciones entre estas tres configuraciones permiten explicitar la *dimensión exploratoria-inductiva para la conjeturación matemática*, como expresión del movimiento que se establece entre la orientación de estrategias para la exploración de problemas matemáticos de demostración y la identificación de propiedades invariantes en representaciones de dichos problemas, que se sintetiza en la formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, como un primer estadio de desarrollo del proceso de inducción en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

- *Segunda dimensión del modelo*

A su vez la configuración síntesis, formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, genera otro movimiento del proceso, que a través de la dimensión validadora-inductiva de conjeturas matemáticas expresa la relación que se establece entre la explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración y la asimilación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas.

Así, la configuración *explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración* es interpretada como el proceso cognoscitivo mediante el cual el profesor hace patente el contenido o sentido de los métodos que permiten la comprobación de que la afirmación o conjetura creada tiene una alta probabilidad de ser verdadera en el contexto estudiado.

Ahora bien, la explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración por sí sola no es suficiente, por lo que deberá desarrollarse en estrecha relación con la *asimilación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas*, como configuración que da cuenta del proceso de aprendizaje llevado a cabo por los estudiantes, a partir de su convencimiento de que la conjetura inicial es susceptible de ser modificada en el proceso de razonamiento inductivo, no pudiendo considerarse una conjetura matemática en sí misma, hasta que se encuentre validada y reforzada por otros casos, para lo cual deberá adicionar a su base de conocimientos y experiencias, elementos relativos a los métodos y procedimientos que le permitirán justificar o refutar una conjetura, mediante el descubrimiento de una estructura subyacente o una relación que vincule a los datos con la solución.

Así, la relación entre las configuraciones *explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración* y la *asimilación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas* se sintetiza también en una generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, entendida como aquel proceso que lleva a observar aspectos comunes en distintos casos particulares, con objeto de formular conjeturas y buscar contextos más amplios que generalicen el problema, garantizando una modificación en la concepción del estudiante sobre la conjetura como afirmación válida para determinados casos y que se ha de convertir en una regla generalmente aceptada, a tal punto de poder reconocer que ésta es verdadera para cualquier caso que esté en correspondencia con las condiciones y exigencias del problema estudiado. Así, habrá que tomar conciencia de que la verificación de varios casos no es suficiente para generalizar la conjetura, pero tampoco se requiere de un proceso formal de demostración para justificar la generalización, aunque se puede acudir a un paso intermedio y presentar algún tipo de prueba matemática, lo importante es poder llegar a convencer, con argumentos fuertes, que la conjetura es válida a nivel general, a partir del convencimiento propio de quién la plantea.

De esta manera se origina un nuevo movimiento de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, a partir de las relaciones que se establecen entre las cuatro configuraciones explicadas, lo que deviene en un segundo nivel de esencialidad que está dado por la dimensión *validadora-inductiva de conjeturas matemáticas*. Esta dimensión es concebida como expresión del proceso que lleva a que se confirme conscientemente la conjetura inicial del problema, la que se constituye en punto de partida para la demostración matemática, o la argumentación formal que sustenta el resultado a desarrollar mediante la validación deductiva, necesaria para lograr una solución real del problema.

- *Tercera dimensión del modelo*

La configuración síntesis, generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, da lugar a otro movimiento del proceso, que a través de la dimensión demostración de conjeturas matemáticas, expresa la relación que se establece entre la estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración y la apropiación significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas.

Así, la configuración *estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración* es interpretada como el conjunto de actividades intelectuales que propicia el profesor para proporcionar al estudiante oportunidades de desarrollar habilidades que le permitan realizar búsquedas y selecciones efectivas de estos métodos deductivos.

Sin embargo, la estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración por sí sola no es suficiente, por lo que convendrá llevarla a cabo en estrecha relación con la *apropiación significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas*, como configuración que expresa el proceso de adquisición de conocimientos significativos sobre los métodos que pueden ser empleados para demostrar las conjeturas matemáticas y la forma de aplicarlos.

A consecuencia de la relación dialéctica que se establece entre las configuraciones *estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración* y *apropiación significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas*, emerge una *validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración*, configuración síntesis que es expresión del proceso de razonamiento llevado a cabo por el estudiante con el propósito de seleccionar y aplicar el método deductivo más apropiado, para someter a experimentación o análisis una conjetura y tratar de asegurar su validez o falsedad.

- *Regularidad y sistema de relaciones del modelo*

Ahora bien, entre las configuraciones síntesis, formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración y validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, existe una relación dialéctica que da lugar a tres niveles razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de dichos problemas (exploración inductiva, validación inductiva y demostración de conjeturas matemáticas), los que se manifiestan como dimensiones de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de los citados problemas, que en su interacción potencian la formación de una competencia resolutora de los mismos.

La lógica integradora entre la formulación y generalización inductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración y su validación deductiva, se constituye en la *regularidad didáctica* de la modelación realizada en esta investigación y en una condición imprescindible para el desarrollo de una competencia resolutora de dichos problemas, la que desde el punto de vista didáctico debe regir el proceso formativo.

Esta *competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración*, es concebida como la actuación del estudiante para identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas matemáticos de demostración, desde un razonamiento inductivo-deductivo que le permita arribar a una conjetura, validarla y demostrarla, corroborando la pertinencia, viabilidad y coherencia de las soluciones que propone; manifestando idoneidad y compromiso ético al articular el saber matemático con el saber hacer y saber ser, para lograr un desempeño eficiente y eficaz, a la vez que transformar y enriquecer su modo de actuar resolutor y su sistema de valores profesionales.

Finalmente, esta modelación presentada da lugar a un sistema de relaciones esenciales, que permite interpretar su comportamiento y transformación. Dicho sistema está integrado por las siguientes relaciones:

- Formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, a partir de la orientación de estrategias para la exploración de dichos problemas y de la identificación de propiedades invariantes en representaciones de los mismos.
- Explicación y asimilación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, desde una generalización de dichas conjeturas, como movimiento que da lugar a una cualidad validadora-inductiva.
- Validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, a partir de una estimulación y apropiación de métodos de demostración.

La regularidad didáctica develada y las tres relaciones esenciales del modelo aportado, se constituyeron en núcleos básicos para diseñar un método didáctico que posibilita concretar la formación de la competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración en estudiantes de carrera de perfil matemático.

B. Método didáctico para concretar el modelo

El método didáctico para concretar la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración en carreras de perfil matemático tiene como objetivo servir de base y fundamento para la estructuración de un sistema de procedimientos que permita guiar dicha dinámica para la formación de la competencia resolutora.

Su especificidad la adquiere por el sistema de relaciones revelado, por lo que su grado de *singularidad* ha de alcanzarse en la dinámica del propio proceso y estará en dependencia de la integración del procesamiento inductivo y deductivo de la información que genera el problema, en aras de alcanzar niveles cualitativamente superiores de formulación, generalización y validación de conjeturas matemáticas, lo que conducirá a una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración.

La *aplicabilidad* de este método didáctico integrador está en correspondencia con las características del problema matemático a resolver y de los estudiantes resolutores; así como, con la profundidad en el conocimiento que debe construirse mediante el procesamiento inductivo y deductivo de la información generada por el problema matemático de demostración.

La *significatividad* del método está dada en que posibilita el desarrollo de habilidades para la exploración inductiva, la validación inductiva y la demostración de conjeturas matemáticas, desde la integración lógica de las vías inductiva y deductiva de demostración de problemas matemáticos.

De manera que, su *estructura interna* se expresa en estadios de desarrollo. Un *primer estadio* dirigido a la exploración inductiva aplicando una lógica integradora entre la orientación de estrategias para la exploración de problemas matemáticos de demostración y la identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración, la que se expresa en unidad dialéctica con la formulación de conjeturas de problemas matemáticos de demostración. El *segundo estadio* de desarrollo regula la validación inductiva, asumiendo y enriqueciendo la dinámica del estadio anterior, y sistematizando por otro lado, la interacción de la explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración y la apropiación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas, que se expresa en unidad dialéctica con la generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.

Finalmente, en el *tercer estadio* realiza una demostración de conjeturas matemáticas, a partir de la información obtenida en los estadios anteriores, basándose en la relación entre la estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración y la sistematización significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas, que se expresa en unidad dialéctica con la validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, en aras de elevar la competencia resolutora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de estos problemas.

Los *medios fundamentales*, que sirven de apoyo a este método didáctico, son los propios problemas que se estudian, los que requieren de un proceso de exploración-validación inductiva y demostración deductiva, de modo que se orienta a objetivos de análisis, identificación, profundización, valoración, generalización y comprobación de la información que brindan los problemas, en interacción sistemática con la base de conocimientos y experiencias del resolutor y desde la integración científica de las vías inductiva y deductiva.

Como consecuencia de todo lo anterior, la *función esencial* del método didáctico propuesto es: orientar la interacción estudiante-problema, mediante la integración de las vías inductiva y deductiva, como forma específica de dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de demostración, en aras de formar una competencia resolutora.

Desde *lo gnoseológico*, el método permite comprender las diversas vías que posibilitan abordar la resolución de problemas matemáticos de demostración y la necesidad de establecer un sistema de relaciones entre ellas para significar un contexto resolutor, que desde la integración de las vías inductiva y deductiva interactúe con la complejidad inherente a la exigencia de dichos problemas, orientando al estudiante de las carreras de perfil matemático en el procesamiento de la información que estos brindan, para lograr una competencia resolutora consecuente con su intencionalidad demostrativa.

De *lo técnico*, el método asume la interactividad y la integración de metodologías, como vías para sistematizar el razonamiento inductivo y el deductivo en contextos de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos de demostración.

En cuanto a *lo metodológico*, el método permite estructurar un sistema de procedimientos didácticos en los que la competencia resolutora, como producto final, es adquirida en un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador para los estudiantes que participan en el mismo.

Este método didáctico orienta vías para generar espacios de exploración, validación inductiva y argumentación deductiva, con lo que, consecuentemente, se produce una transformación resolutora en los estudiantes. Para su instrumentación se introduce un sistema de procedimientos didácticos que posibilita revelar su valor práctico para la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de dichos problemas.

C. Sistema de procedimientos didácticos

El sistema de procedimientos didácticos está conformado por un conjunto de acciones, consecuentemente estructuradas y ordenadas, que posibilitan el desarrollo de la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Su carácter didáctico está dado en el hecho de que permite al profesor orientar y controlar el procesamiento inductivo y deductivo que debe realizar el estudiante de las carreras de perfil matemático durante el proceso resolutor.

Su lógica promueve transformaciones cada vez más esenciales, que contribuyen al perfeccionamiento del procesamiento de la información que brindan los citados problemas, las que se convertirán en guía para el logro de una autonomía resolutora a partir de un trabajo más consciente y estable, que viabilice el autodesarrollo formativo de los estudiantes de las carreras de perfil matemático.

De manera que, al estar sometido a múltiples influencias, en una dinámica interactiva que permite su rediseño y perfeccionamiento constante, se considera un sistema abierto, estructurado en tres procedimientos que interactúan, dando lugar al establecimiento de relaciones de jerarquía y subordinación. El sistema posee criterios evaluativos y patrones de logro, siendo su objetivo general la orientación intencional a los profesores y estudiantes de carreras de perfil matemático sobre la forma de desarrollar la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, de forma tal que se produzca una competencia resolutora de dichos problemas.

El mismo manifiesta su *recursividad* en la relación dialéctica que se establece entre el todo, como sistema integral y totalizador, y los procedimientos didácticos compuestos por acciones, como partes de este todo, donde el sistema en sí adquiere sentido de las partes y las partes adquieren significado en el todo, determinándose así la coherencia del mismo.

Además, la competencia resolutora que se configura en la dinámica modelada, como nueva cualidad totalizadora, alcanzada en su implementación, da cuenta de la *sinergia* que manifiesta el sistema de procedimientos. Mientras que la *entropía* del mismo puede observarse en las insuficiencias didácticas que presentan los profesores para gestionar dicha dinámica, así como en la limitada comunicación entre estos y los estudiantes participantes en el proceso docente. Se manifiesta también en la no aceptación de los cambios que implica la introducción de la nueva dinámica que se propone, la que exige de una mayor preparación científica y didáctica, para profundizar en la enseñanza de los métodos inductivos y deductivos.

El equilibrio dinámico del sistema, *homeostasis*, puede lograrse aprovechando las potencialidades que ofrecen las asignaturas de Matemática, en aras de instruir en la dinámica del procesamiento inductivo y deductivo de la información que brinda un problema matemático de demostración.

También se puede potenciar dicho equilibrio mediante el empleo eficaz y eficiente de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, en particular de determinados sistemas computacionales de cálculo que permiten profundizar en la interpretación de múltiples alternativas de aplicación de los métodos, según su diversidad y complejidad.

Es así que el presente sistema de procedimientos manifiesta su *autodesarrollo* en el carácter flexible que posee, el que facilita su rediseño constante por otros investigadores para adaptarlo a condiciones específicas de los contextos de aplicación, lo que implica su perfeccionamiento sistemático.

- *Procedimiento exploratorio-inductivo*

Objetivo: orientación a profesores y estudiantes de las carreras de perfil matemático sobre la forma de concretar la formulación de conjeturas durante la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Acciones a realizar por el profesor:

- Realizar actividades docentes que propicien el desarrollo de habilidades para la adecuada selección y aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas al análisis de los problemas de demostración.
- Sistematizar una definición de problema matemático, de forma que los estudiantes puedan identificar los elementos y componentes de los problemas de demostración que se les proponen.
- Promover la búsqueda consciente de patrones en los problemas matemáticos de demostración y el descubrimiento de las leyes que rigen estos patrones.
- Propiciar el desarrollo de habilidades para concebir y enunciar una idea hipotética a partir de la observación e interpretación de las propiedades de determinados objetos presentes en representaciones del problema que el estudiante trata de resolver, y de las relaciones que se dan entre estos objetos, los que debe haber examinado y comparado hasta que haya descubierto regularidades que sean relevantes a los efectos de su solución.

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia de la orientación realizada sobre estrategias heurísticas y metacognitivas, para que los estudiantes logren una adecuada exploración de los problemas matemáticos de demostración en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo.

Patrones de logro para los profesores:

- Aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas a la exploración de problemas matemáticos de demostración.
- Identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración.
- Formulación de adecuadas conjeturas de problemas matemáticos de demostración, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.

Acciones a realizar por el estudiante:

- Apropiarse de estrategias heurísticas que le permitan realizar una adecuada exploración de los problemas matemáticos.
- Desarrollar habilidades para la observación consciente de la estructura de los problemas matemáticos de demostración y la identificación de las condiciones y exigencias que los componen, así como de los objetos, características y relaciones contenidos en estas últimas.
- Apropiarse de estrategias metacognitivas que les faciliten el análisis, solución y comprobación de los problemas.
- Aprender a reconocer las regularidades que se manifiestan en las representaciones que va realizando del problema matemático.
- Desarrollar habilidades para formular conjeturas.
- Aprender a identificar propiedades invariantes.

Criterio evaluativo para los estudiantes: nivel de identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración, evidenciado en los resultados de la formulación de conjeturas de dichos problemas.

Patrones de logro para los estudiantes:

- PL-1.1. Aplicación de estrategias heurísticas y metacognitivas a la exploración de problemas matemáticos de demostración.
- PL-1.2. Identificación de propiedades invariantes en representaciones de problemas matemáticos de demostración.
- PL-1.3. Formulación de adecuadas conjeturas de problemas matemáticos de demostración, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.

- *Procedimiento validativo-inductivo*

Objetivo: orientación a profesores y estudiantes de las carreras de perfil matemático sobre la forma de concretar la comprobación de la veracidad o falsedad de las conjeturas matemáticas y su generalización en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Acciones a realizar por el profesor:

- Facilitar el desarrollo de habilidades para el reforzamiento de la conjetura formulada.
- Propiciar el desarrollo de analogías con problemas ya resueltos para extraer reglas formuladas por los propios estudiantes.
- Enseñar a justificar cada uno de los pasos que se van dando en este proceso validativo.
- Promover la participación activa de los estudiantes en la generación de ideas y aplicación de métodos para el reforzamiento o refutación de la conjetura formulada.
- Propiciar el desarrollo de la habilidad argumentar en los estudiantes.
- Enseñar métodos para comprobar que una conjetura tiene alta probabilidad de ser verdadera en el contexto del problema estudiado.

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia de la explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, para que los estudiantes aprendan a validar inductivamente las conjeturas matemáticas, en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo.

Patrones de logro para los profesores:

- Explicación de métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.
- Desarrollo de actividades docentes que propicien la apropiación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas.
- Diseño y aplicación de un sistema de evaluación que contribuya a potenciar la generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.

Acciones a realizar por el estudiante:

- Desarrollar habilidades como la observación, la comparación y la analogía, que son esenciales para rechazar o reforzar una conjetura.
- Comprender la necesidad de modificar la conjetura que se obtiene inicialmente en el proceso de razonamiento inductivo y de no poder considerar a una conjetura matemática en sí misma, hasta que se encuentre validada y reforzada por otros casos.
- Aprender a argumentar cada uno de los pasos que se dan en el proceso validativo.
- Desarrollar habilidades para seleccionar o construir casos particulares para comprobar la validez de una conjetura o su falsedad.
- Mantener cierto grado de escepticismo con respecto a sus razonamientos y el de los demás hasta que se logre validar la conjetura bajo análisis.
- Dominar métodos útiles para validar una conjetura.
- Apropiarse de estrategias de autocontrol, que orienten el modo de actuar para validar el grado de generalidad y veracidad de una conjetura, para facilitar su fortalecimiento antes de ser demostrada.

Criterio evaluativo para los estudiantes: nivel de apropiación de métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas, evidenciado en los resultados obtenidos en cuanto a la generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.

Patrones de logro para los estudiantes:

- PL-2.1. Apropiación de métodos efectivos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas, evidenciada en la selección que hace de los métodos a emplear.
- PL-2.2. Aplicación de adecuados métodos para el reforzamiento de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, evidenciada en las soluciones que aporta.
- PL-2.3. Generalización de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.

- *Procedimiento validativo-inductivo*

Objetivo: Orientación a profesores y estudiantes de las carreras de perfil matemático sobre la forma de concretar la validación deductiva de conjeturas en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Acciones a realizar por el profesor:

- Propiciar el desarrollo de habilidades para realizar la selección efectiva de métodos deductivos de demostración.
- Provocar la discusión-reflexión sobre los problemas que se les proponen en un espacio de aprendizaje socializado.
- Promover el análisis de numerosas opiniones, explicando la importancia de profundizar en cada uno sus elementos.
- Explicar métodos para la demostración de las conjeturas.
- Exponer y ejemplificar la conveniencia de comenzar aplicando un método de demostración directo.
- Explicar la necesidad de involucrar, en el razonamiento lógico y deductivo que conduce a probar una conjetura, definiciones, postulados y otros teoremas, lemas y corolarios, ya probados, así como datos o condiciones establecidos en la conjetura.
- Propiciar el desarrollo de actividades docentes en las que el estudiante exponga y defienda sus demostraciones ante el grupo.
- Reconocer el trabajo de los estudiantes para generar argumentos que justifiquen sus demostraciones.

Criterio evaluativo para los profesores: eficacia en la estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos, para que los estudiantes logren demostrar las conjeturas matemáticas, en la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo.

Patrones de logro para los profesores:

- Estimulación de la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración.
- Desarrollo de actividades docentes que propicien la sistematización significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas.
- Diseño y aplicación de un sistema de evaluación que contribuya a potenciar la validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.

Acciones a realizar por el estudiante:

- Adquirir conocimientos significativos sobre los métodos que pueden ser empleados para demostrar las conjeturas matemáticas y la forma de aplicarlos.
- Dominar tres mecanismos que se presentan como indispensables para llegar a demostrar una conjetura: escoger el método más adecuado, derivar progresivamente y abstraer regresivamente, además de poder usar las estrategias específicas de cada método.
- Seleccionar y aplicar el método deductivo más apropiado, para someter a experimentación o análisis una determinada conjetura y tratar de asegurar su validez o falsedad.
- Apropiarse de recursos técnicos y competencias argumentativas que le permitan exponer y fundamentar, las razones de cada paso o enunciado, empleado en el proceso validativo-deductivo.
- Aprender a encontrar argumentos pertinentes para la demostración y hacer el encadenamiento de los mismos.

Criterio evaluativo para los estudiantes: nivel de sistematización significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas, evidenciado en los resultados de la validación deductiva de conjeturas de problemas matemáticos de demostración.

Patrones de logro para los estudiantes:

- PL-3.1. Adecuada búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración.
- PL-3.2. Sistematización significativa del proceder deductivo para la demostración de conjeturas matemáticas, evidenciada en las soluciones que propone.
- PL-3.3. Validaciones deductivas de conjeturas de problemas matemáticos de demostración, comprobadas mediante el resultado de las evaluaciones que se realizan.

D. Criterio de expertos para valorar los resultados

Se confeccionó un listado de 23 profesionales con requisitos para ser considerados como posibles expertos [15]. A todos ellos se les envió vía correo electrónico un resumen de la investigación doctoral consistente en introducción, principales aspectos del marco teórico-contextual y aportes teórico-prácticos (el modelo, el método didáctico y el sistema de procedimientos didácticos). Además, se les envió una encuesta para evaluar su *coeficiente de* *competencia* (K) [15], lo que posibilitó seleccionar a 19 expertos que presentaron un valor de $K \geq 0.75$.

La procedencia de los 19 expertos seleccionados fue de las siguientes universidades cubanas: Universidad de Oriente, Universidad Central de Las Villas, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Universidad de la Habana y Universidad de Camagüey. La cantidad promedio de años de experiencia en su desempeño científico como Doctores en Ciencia fue de 17,6 años.

Cabe señalar que a los posibles expertos también se les solicitó en la propia encuesta enviada que, si estaban de acuerdo, evaluaran los siguientes indicadores:

A-1. Pertinencia de la dimensión explorativa-inductiva para la conjeturación matemática.

A-2. Pertinencia de la dimensión validativa-inductiva de conjeturas matemáticas.

A-3. Pertinencia de la dimensión demostrativa-deductiva de conjeturas matemáticas.

A-4. Pertinencia del modelo de la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo propuesto.

A-5. Coherencia entre las dimensiones del modelo propuesto.

A-6. Pertinencia del método didáctico.

A-7. Factibilidad del procedimiento explorativo-inductivo.

A-8. Factibilidad del procedimiento validativo-inductivo.

A-9. Factibilidad del procedimiento demostrativo-deductivo.

A-10. Factibilidad del sistema de procedimientos didácticos.

A-11. Coherencia del sistema de procedimientos didácticos.

A-12. Coherencia entre el modelo, el método y sistema de procedimientos didácticos.

Para lo cual se les brindó una escala tipo Likert con los siguientes niveles de respuesta: 1: muy inadecuada; 2: inadecuada; 3: ni adecuada ni inadecuada; 4: adecuada; 5: muy adecuada.

Además, se les solicitó responder al siguiente ítem:

A-13. Realice una breve valoración de los aportes de la investigación, considerando para ello aspectos positivos y negativos.

Una vez respondida la encuesta, se seleccionaron las respuestas de los 19 expertos y fueron definidas dos clases fundamentales que agruparon los ítems de la encuesta: la clase A, estructurada por los ítems A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-7, A-8, A-9 y A-11; y la clase B, conformada por los ítems A-6 y A-12.

En ambas clases el valor del coeficiente de variación estuvo por debajo del valor 0.20, lo que cumplió con el umbral fijado para la aceptación de una buena concordancia por ítem. Además, se tomó en cuenta el valor medio de cada ítem como indicador fundamental para estructurar dichas clases. En el caso de la clase A, los valores medios estuvieron por encima del valor 4.00, lo que se considera satisfactorios, mientras que en la clase B, los valores son menores que 4.00 y mayores que 3.50, lo que se valoró como aceptable, por lo que se reconoció la necesidad de seguir perfeccionando la pertinencia del método didáctico y la coherencia entre el modelo, el método y sistema de procedimientos didácticos.

Para poder valorar la concordancia de los expertos con relación a todos los ítems, se aplicó la Prueba de Concordancia de Kendall. De esta forma se pudo determinar si las estimaciones de los expertos, referidas al modelo, al método didáctico y al sistema de procedimientos didácticos estaban correlacionadas, así como el nivel de significación de dichas correlaciones.

En el caso en cuestión mediante la salida del software STATISTICA versión 9.0 se determinó la probabilidad asociada a los valores críticos de Chi cuadrado, es decir, que $p < 0.001$, pudiendo concluirse que la muy baja probabilidad conforme a H0, permite rechazar la hipótesis de nulidad, es decir, rechazar la no existencia de concordancia entre los expertos.

Así, se llegó a que la concordancia entre los 19 expertos es más alta que la que resultaría del azar. De aquí que se pudiera concluir, con gran seguridad, que los expertos consultados tuvieron acuerdo con relación a las valoraciones realizadas a cada uno de los ítems de la encuesta.

Por otro lado, los expertos hicieron una breve valoración de los aportes en el ítem A-13 de la encuesta, los negativos se sintetizan a continuación:

- La aplicación del sistema de procedimientos didácticos que se propone puede ser rechazada por los profesores al sentir que se tratan de transformar sus métodos de enseñanza tradicionales.
- No se revela suficientemente la validez de la propuesta en el nuevo Plan de Estudio E.

No obstante, los expertos reconocieron aspectos positivos de los aportes, destacándose:

- El modelo está bien fundamentado, es coherente y refleja la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo.
- El método y el sistema de procedimientos son pertinentes y aplicables en las carreras de perfil matemático, e incluso extensible a otras carreras de ciencias exactas.
- Es importante el énfasis que se pone en enseñar al estudiante a concebir una conjetura matemática y validarla, porque esto garantiza el éxito de la resolución de los verdaderos problemas de demostración.

E. Aplicación del sistema de procedimientos

Como parte de la corroboración del sistema de procedimientos didácticos, se realizó una aplicación del mismo durante el primer semestre del curso 2018-2019, en el 1er año de la carrera de Licenciatura en Matemática, en la Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, empleando para ello la asignatura Introducción a la Matemática, perteneciente al vigente Plan de Estudio E.

Este primer año estuvo conformado por un grupo de seis estudiantes, todos los cuales fueron instruidos según los objetivos y acciones del sistema de procedimientos didácticos, tomando como criterios evaluativos, los previstos en el mismo, así como los patrones de logro que instrumentan dichos criterios.

Para llevar a cabo la evaluación de los nueve patrones de logro (PL) establecidos para los estudiantes, se diferenciaron sus posibles estados cualitativos a partir de una escala ordinal con cuatro niveles de respuesta (2 Mal, 3 Regular, 4 Bien, 5 Excelente), que es la forma en que el Reglamento Docente y Metodológico del Ministerio de Educación Superior de Cuba define las calificaciones a emplear en el control a las actividades docentes; considerando que mientras más tiendan los patrones de logros de los estudiantes a la calificación de Excelente (5 puntos), mayor será la probabilidad de que estos sean competentes en la resolución de problemas matemáticos de demostración.

Esta valoración de los patrones de logro posibilitó determinar las transformaciones formativas producidas en los estudiantes, acordes al criterio evaluativo establecido.

La calificación media obtenida por los estudiantes en cada uno de los tres procedimientos fue igual a 4,17; 3,67 y 3,72 en su orden, y la media global resultó ser de 3,85 puntos.

La probabilidad asociada a las calificaciones de 2, 3, 4 y 5 fueron igual a 0; 0,41; 0,33 y 0,26, respectivamente.

En la figura 2 puede observarse que los promedios de calificaciones tienen un comportamiento relativamente homogéneo en cada indicador. Además, el promedio obtenido en los patrones de logro que conforman cada procedimiento tiende a decrecer. Esto se debe a que existe, en general, una relación lógica de precedencia entre las operaciones que contemplan los patrones de logro de cada procedimiento. O sea, dadas dos operaciones consecutivas de un mismo procedimiento, el éxito obtenido en la segunda está condicionado, en buena medida, por el obtenido en la primera. Sobre la base de lo explicado anteriormente, se esperaba que los patrones de logro con calificación media más baja fuesen el 1.3, 2.3 y 3.3, tal como muestran los valores empíricos obtenidos.

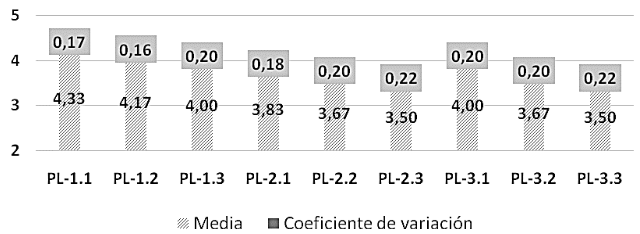


Fig. 2: Resultados de la evaluación de los patrones de logro de los estudiantes del primer año de Licenciatura en Matemática de la Universidad PL: patrón de logro.

La aplicación del sistema de procedimientos didácticos también posibilitó discernir las principales transformaciones cualitativas experimentadas por los seis estudiantes del primer año de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente. Una síntesis de las mismas se presenta a continuación:

- Se incrementó el interés en los estudiantes por la resolución de problemas matemáticos y, en especial, por aquellos de demostración.
- Lograron asimilar una amplia gama de estrategias heurísticas y metacognitivas para la exploración de problemas matemáticos de demostración y perfeccionaron la identificación de propiedades invariantes en sus representaciones y la formulación de conjeturas.
- Aumentaron sus capacidades para observar, abstraer, comparar, representar, identificar, relacionar, combinar y generalizar, lo cual les ayudó a lograr mayor éxito en la formulación de conjeturas, en su reforzamiento inductivo y en la búsqueda y selección de métodos deductivos de demostración.
- Lograron una mejor relación entre el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo durante la resolución de problemas de demostración, lo que posibilitó que profundizaran en la comprensión de las características de los problemas matemáticos estudiados.

Por otro lado, se evaluó el trabajo desarrollado por los profesores a partir de los patrones de logro definidos en el sistema de procedimientos, corroborando avances en cuanto a:

- Una profundización en el conocimiento de estrategias heurísticas y metacognitivas, así como la preparación y desarrollo de actividades docentes que propiciaron la formación de habilidades para su selección y aplicación al análisis de los problemas matemáticos de demostración, lo que potenció el trabajo de los estudiantes en la exploración de los problemas y la formulación de conjeturas.
- Una adecuada búsqueda y selección de problemas matemáticos de demostración, representables y resolubles por diversos métodos y contenidos matemáticos, ya sean numéricos, algebraicos, geométricos, etc.
- Una correcta selección de métodos de enseñanza activos, que facilitaron el desarrollo de habilidades para argumentar el proceder resolutor, como norma de justificar cada idea matemática que produjeron y de estimular el razonamiento inductivo y deductivo, a partir de la conjeturación, reforzamiento y demostración matemática.
- La introducción de softwares como el *Mathematica*, el *Matlab* y el *Geogebra*, que brindaron un lenguaje simbólico y herramientas matemáticas avanzadas para potenciar el éxito de los estudiantes en la resolución de los problemas matemáticos de demostración, al brindar nuevas formas de representación, mayor precisión y la posibilidad de explorar una mayor cantidad de conjeturas.
- El diseño y aplicación de evaluaciones sistemáticas y finales que permitieron profundizar en la forma en que el estudiante desarrollaba el razonamiento inductivo y deductivo para resolver los problemas matemáticos de demostración que se les propusieron.

En síntesis, la práctica formativa de la asignatura introdujo nuevas pautas en la forma de orientar el proceso de resolución de los problemas matemáticos de demostración, al poner énfasis en el razonamiento inductivo, previo al deductivo. Se emplearon problemas didácticamente trabajados para potenciar este razonamiento y suplir las dificultades actuales de la generalidad de los libros de texto que se utilizan en la carrera, los que parten de una conjetura dada al estudiante en términos matemáticos, para que este centre su atención en razonar deductivamente, sin saber el origen de la misma. Este aspecto es una arista importante del trabajo metodológico de las disciplinas y colectivos docentes de carrera.

En resumen, estos resultados tienen correspondencia con las valoraciones de los expertos, con lo que se concluye la pertinencia y viabilidad del sistema de procedimientos didácticos, derivado del método didáctico y sustentado en el modelo de la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración en carreras de perfil matemático.

Todo lo anterior da cuenta de la formación de una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración en estos estudiantes. Aunque la referida competencia deberá desarrollarse al transitar por el resto de las asignaturas matemáticas que conforman el currículo de la carrera de Licenciatura en Matemática.

IV. Discusión

El modelo de la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración en carreras de perfil matemático, fundamentado en este artículo, posibilita una interpretación esencialmente superior del proceso de inducción y deducción, dando lugar a que emerja una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración. Dicho modelo deviene en un método didáctico para conducir dicha dinámica, el que se concreta en un sistema de procedimientos didácticos, que persigue orientar a los profesores y estudiantes en esta dirección.

El trabajo didáctico con el razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración implica un mayor nivel de exigencia de la clase tradicional y tiempo extra de preparación de los docentes. Es por ello que se hace muy popular el uso de enfoques didácticos que solo proponen enseñar la parte deductiva de la demostración, obviando el razonamiento inductivo previo a esta.

Sin embargo, al descartarse la explicación de la actividad inductiva durante el referido proceso de resolución, se sesga la comprensión y, por tanto, el aprendizaje de los estudiantes, que solo ven la parte deductiva y no son capaces de apropiarse de toda la riqueza del razonamiento matemático que produce el proceder inductivo.

El Modelo de la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración aportado en el presente estudio brinda una fundamentación más completa que otros consultados en la literatura [4], [5].

El método didáctico que concreta dicho modelo y su correspondiente sistema de procedimientos brindan un andamiaje didáctico pertinente que permite profundizar en las especificidades del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, lo que brinda ventajas respecto a otros instrumentos prácticos consultados en la literatura para tratar didácticamente los referidos problemas matemáticos [5], [6], [16]-[18].

Los resultados del presente estudio sugieren la posibilidad de utilizar extensivamente el modelo de la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración, el método didáctico que lo concreta y su correspondiente sistema de procedimientos didácticos para la formación de una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración, que refleja la capacidad de los estudiantes para identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas matemáticos de demostración, desde un razonamiento inductivo-deductivo que le permite arribar a una conjetura, validarla y demostrarla, corroborando la pertinencia, viabilidad y coherencia de sus soluciones.

V. Conclusiones

El modelo de la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración en carreras de perfil matemático, fundamentado en este estudio, posibilita una interpretación esencialmente superior del proceso de inducción y deducción, dando lugar a que emerja una competencia resolutora de problemas matemáticos de demostración. Dicho modelo deviene en un método didáctico para conducir dicha dinámica, el que se concreta en un sistema de procedimientos didácticos, que persigue orientar a los profesores y estudiantes en esta dirección.

La forma de proceder que propone el método didáctico no puede interpretarse como la única forma de orientar la dinámica del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. No obstante, el mismo muestra una vía dialéctica para que el razonamiento del profesor y el estudiante transite sistematizadamente por la inducción y deducción, con el fin de que este último logre identificar propiedades invariantes en representaciones de estos problemas, asimilar los métodos para la comprobación de la veracidad o falsedad de conjeturas matemáticas y se apropie significativamente del proceder deductivo para la demostración de dichas conjeturas.

Se valoró satisfactoriamente la factibilidad y pertinencia científico-metodológica del modelo, el método y el sistema de procedimientos didácticos, a partir del criterio de expertos. A su vez, se corroboró la validez del sistema de procedimientos mediante su aplicación en el 1er año de la carrera Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, Cuba.

Agradecimientos

Se agradece a los miembros del Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática y la Computación (GIDMAC) de la Universidad de Oriente, Cuba, por sus valiosas recomendaciones para perfeccionar el modelo, el método y el sistema de procedimientos didácticos aportados en el presente estudio. Se agradece además a otros expertos de diversas universidades cubanas que con su criterio también contribuyeron a su enriquecimiento.

Conflictos de Interés

Los autores declaran que no existen conflictos de interés.

Referencias

[1] G. Polya, *Matemáticas y razonamiento plausible*, Madrid: Editorial TECNOS. S. A, 1966.

[2] A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, USA: Library of Congress, 1985.

[3] J. Godino y Recio, A., "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 19, No. 3, pp. 405-414, 2001.

[4] M. Y. Álvarez, I. Alonso y A. Gorina, "Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica", en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 2012.

[5] M. Orlando, "Razonamiento, solución de problemas matemáticos y rendimiento académico". *Tesis de doctorado*, Universidad de San Andrés, 2014.

[6] I. A. Haya, "Razonamiento y demostración en educación matemática", *Tesis de maestría*, Universidad de Cantabria, 2015.

[7] J. Alvarez, I. Alonso y A. Salgado, "Resolución de problemas matemáticos en la Carrera de Matemática-Física", *REFCalE*, vol. 4, No. 1, pp. 67-82, 2016.

[8] I. Alonso, A. Gorina, N. Iglesias y J. Álvarez, "Pautas para implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas", *Maestro y Sociedad*, No. especial 3, pp. 66-81, 2018.

[9] J. Alvarez, I. Alonso y A. Gorina, "Método didáctico para reforzar el razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración", *REFCalE*, vol. 6, No. 2, pp. 17-31, 2018.

[10] J. Alvarez, I. Alonso y A. Gorina, "Enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración", *Conrado*, vol. 15, No. 68, pp. 249-258, 2019.

[11] H. C. Fuentes, E. C. Matos y S. S. Cruz, *El proceso de investigación científica desde un pensamiento dialéctico hermenéutico. Reto actual en la formación de doctores*, Santiago de Cuba: CeeS "Manuel F. Gran", 2004.

[12] D. P. Ausubel, *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, México: Trillas, 1983.

[13] J. B. Best, *Psicología Cognitiva*. Madrid: Editorial Paraninfo, 2001.

[14] L. Vygotsky, *Historia del desarrollo de las funciones psíquicos superiores*. La Habana: Editorial Científico -Técnica, 1987.

[15] M. Cruz, *El método Delphi en las investigaciones educacionales*, La Habana: Editorial Academia, 2009.

[16] L. G. Allen, "Teaching mathematical induction. An alternative approach". *Mathematics Teacher*, vol. 94, No. 6, pp. 500-504, 2001.

[17] F. Andrade, O. J. Alejo y C. R. Armendariz, "Método inductivo y su refutación deductista", Conrado, vol. 14, No. 63, pp. 117-122, 2018.

[18] E. D. Koning, J. H. Hamers, M. Sijtsma y A. Vermeer, "Teaching Inductive Reasoning in Primary Education", *Developmental Review*, vol. 22, No. 2, pp. 211-241, 2002.

Construcción de nociones geométricas y desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la escuela primaria por medio de demostraciones visuales.

Karen Tatiana Barreiro Masmela
Universidad Antonio Nariño
kbarreiro38@uan.edu.co

***Abstract*— The purpose of this research study is to explore the construction of visual demonstrations based on geometric notions that appear in Book 1 of Euclid´s *Elements* by students eight to ten years old from private schools located in the city of Neiva and the municipality of Rivera, Huila. The methodology of the current research follows the qualitative paradigm of research as design. This method arises recently due to the need to include designs and innovation in new educational practices in research theory. Nine activities were designed which were implemented virtually with 24 students. The first activities were designed to allow students to understand and construct with ruler and compass different objects and notions posed in Euclid´s *Elements* Book 1, to identify their particularities. In the final activities, puzzles were used to build valid conjectures to be proven visually and with the support of manipulatable material. Each activity designed begins with constructions with ruler and compass supported by home-made videos that show a step by step process for each of them. Finally, in each activity problems of independent thought are posed that allow the students to develop their geometric thinking. The implementation and analysis of each of the activities and the results of the survey given to the students allowed the identification and analysis of the strategies used by students in the process of solving the different activities, and the verification that young students can effectively start activities related to proving by designing and redesigning activities that lead the student to think mathematically.**

***keywords*—visual demonstrations, geometric notions, Euclid´s *Elements* Book 1, conjectures.**

***Resumen*— El propósito de esta investigación es la construcción de demostraciones visuales a partir de las nociones geométricas planteadas en el Libro I de los *Elementos* de Euclides en estudiantes de ocho a diez años de colegios privados ubicados en la ciudad de Neiva y municipio de Rivera Huila. La metodología de la presente investigación en sí sigue el paradigma cualitativo de la investigación como diseño. Este método surge recientemente por la necesidad de incluir en la teoría de investigación los diseños e innovación en las nuevas prácticas educativas.**

Se diseñaron nueve actividades, las cuales fueron implementadas con 24 estudiantes de manera virtual. Las primeras actividades se diseñaron en busca que los estudiantes comprendieran algunas nociones geométricas planteadas en el Libro I de los *Elementos* de Euclides, con el fin de identificar sus particularidades. En las actividades finales, se usaron rompecabezas para construir conjeturas válidas para demostrar a partir de la visualización y material manipulativo. En el proceso de solución de cada actividad planteada se inicia con construcciones con regla y compás apoyado de videos caseros que mostraban un paso a paso de cada una de ellas. Finalmente, en cada actividad se plantea actividades de pensamiento independiente que permiten desarrollar pensamiento geométrico en los estudiantes. La implementación y análisis de cada una de las actividades y los resultados de la encuesta permitieron evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de solución de las diferentes actividades, y comprobar que efectivamente se pueden iniciar con actividades demostrativas a partir de demostraciones visuales con estudiantes de ocho a diez años a través de material manipulativo diseñando y rediseñando actividades que hagan que el estudiante piense matemáticamente.

***Palabras clave*— demostraciones, nociones geométricas, libro 1 de los elementos de Euclides, conjeturas.**

I. Introducción

La siguiente investigación está motivada en el análisis y discusión que se lleva a cabo en la comunidad de investigadores en Educación Matemática acerca del papel que cumple el demostrar y la demostración en la formación matemática del estudiante.

Este tema ha sido aborda en muchos niveles, desde el álgebra "temprana" (early algebra) para estudiantes de la escuela primaria hasta la transición de la matemática del bachillerato a la matemática universitaria, transición cuyo mayor desafío ha sido el cambio de énfasis de la matemática procedimental a la matemática formal que incluye la presentación de proposiciones generales y la demostración de estas.

Haciendo una extensión de las mismas ideas, la presente investigación ha querido abordar el tema de la generalización y argumentación desde experiencias con la geometría euclidiana, en especial las proposiciones del Libro I de los *Elementos*, con estudiantes del tercer grado elemental. Es un tema retador en especial por el nivel de desarrollo lógico de los niños quienes pueden tener entre 8 y 10 años.

En los últimos años, la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas, en los niveles de primaria, secundaria y universidad ha sido objeto de estudio por parte de los investigadores en Educación Matemática, principalmente por los múltiples cuestionamientos que se han hecho en torno a su enseñanza y su aprendizaje.

Centrando su atención en aquellos investigadores en Educación Matemática que han identificado la inclusión de la demostración en el aula como práctica pedagógica que debe ser trabajada en los estudiantes de todos los niveles escolares como una necesidad. De igual forma se discute la viabilidad de trabajar la visualización como estrategia para la enseñanza de la demostración en estudiantes de básica primaria.

Esta investigación es importante y significativa para la academia por cuatro razones fundamentales. En primer lugar, busca generar un cambio en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en la habilidad de demostración, de acuerdo con la opinión de autores como Hanna (2001) y Stylianides (2007). Además, contribuye a la tendencia actual que busca resolver los múltiples cuestionamientos en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la demostración en todos los niveles académicos desde la primaria hasta la universidad. Evidencia de ello se encuentra en los múltiples estudios, publicaciones y libros que se enfocan en la demostración.

En segundo lugar, aporta a los cuestionamientos que surgen a partir de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el aula de primaria, tales como capacitación docente, el rol de la demostración en la enseñanza, desarrollo del pensamiento del estudiante de primaria, y contribuye a uno de los retos más complejos que es encontrar formas y prácticas efectivas que permitan usar la demostración para promover la comprensión matemática. Adicionalmente cambia el foco de las matemáticas y la demostración como eje central de las actividades curriculares o experiencias que se deben desarrollar en la clase. Lo anterior muestra la importancia y la necesidad de desarrollar esta investigación en este contexto.

En tercer lugar, aporta a la literatura de la educación matemática con respecto a la demostración, puesto que se encontró que existe una brecha en la literatura con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la demostración en niveles de primaria y secundaria (Hanna, (2001); Stylianides, (2007)).

La presente investigación profundiza en un aspecto significativo de la enseñanza y aprendizaje de la demostración y es la manera como los estudiantes se expresan tanto de forma oral como en la representación escrita cuando abordan la misma. Así, explora, cuestiona y analiza el rol de la representación en el argumento de los estudiantes y sus representaciones. Ahora bien, según Stylianides (2007), el uso de un modo de representación oral puede ser más probable de lograr en comparación con un modo escrito.

Según lo antes mencionado, la presente investigación deja abierta la duda para desarrollar e investigar todas las inquietudes, aspectos y perspectivas que puedan surgir en el desarrollo de la demostración en matemáticas. Este último claramente es un término que abarca muchos más aspectos de la enseñanza y aprendizaje, tales como representación, argumento y construcciones.

En cuarto lugar, se explora un método de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas por medio de la manipulación y visualización y su rol dentro del proceso. Actualmente este medio tiene un grupo importante de autores a su favor que incluye a Stylianides (2007) y Hanna (2001). Sin embargo, aún hace falta más exploración dado que Brown (1999) aseguró que el uso de algunas representaciones podría conducir a errores.

Debido a estas tendencias, se considera que esta investigación tiene el potencial de contribuir a la actual transición en la práctica educativa de la demostración tradicional hacia una demostración visual que ha sido explorada por diferentes autores.

Por lo anterior, se propone el siguiente problema de investigación: ¿Cómo desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado tercero a través de la demostración, y en particular, las demostraciones visuales? Se precisa como objeto de estudio: Proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El campo de acción de la investigación es: El proceso de desarrollo del pensamiento geométrico a través de las proposiciones del Libro I de los *Elementos* de Euclides, haciendo uso de actividades que trabajan con demostraciones visuales apropiadas para niños de grado tercero de educación básica. Se plantea como objetivo: Favorecer, por medio de construcciones geométricas y demostraciones visuales, la construcción de significado de objetos y conceptos geométricos presentados en el Libro I de los *Elementos* de Euclides, que propicien el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de ocho a diez años.

Para el cumplimiento del objetivo y para contribuir a la solución del problema planteado, se presenta la siguiente hipótesis de investigación: El desarrollo de actividades demostrativas que involucren procesos intuitivos de conjeturación y pruebas visuales de proposiciones matemáticas, específicamente las del Libro de I de los *Elementos* de Euclides, favorecen el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

II. MARCO TEORICO

El marco teórico se centró en cinco apartados. Primero, expone un marco que concierne el pensamiento geométrico, donde se desarrolla el pensamiento geométrico en la escuela primaria basado en autores como Jean Piaget con el desarrollo del concepto de espacio en el niño y David Tall con los tres mundos de las matemáticas. Segundo, en el marco demostrativo, se estudia la demostración en la escuela primaria, tomando la demostración pictórica o visual y la demostración visual usando colores. Tercero, en el marco matemático, se toman, algunos temas de geometría para tercer grado, tomados del Libro I de los Elementos de Euclides. Finalmente¸ en el marco didáctico, se trabajan manipulables, basados en el trabajo de Dienes (2004), el uso de rompecabezas en la demostración de problemas de área y el trabajo en comunidades de práctica.

III. METODOLOGIA

A. *Método de investigación*

Esta investigación es de tipo descriptivo ya que busca especificar propiedades de un objeto en sí a través del aprendizaje que desarrolla un grupo de estudiantes que se encuentra en edad escolar, evaluando los cambios que presente cada uno de ellos en las diferentes etapas de desarrollo.

La metodología de la presente investigación en sí sigue el paradigma cualitativo de la investigación como diseño. Este método surge recientemente por la necesidad de incluir en la teoría de investigación los diseños e innovación en las nuevas prácticas educativas.

La teorización relacionada con el diseño en la investigación en Educación Matemática se desarrolló considerablemente durante la década de 2000. Kieran (2019), dice, "las orientaciones filosóficas generales de los asuntos educativos, como el constructivismo, son importantes para la práctica educativa, pero a menudo no proporcionan una guía detallada en la organización de la instrucción. La pregunta fundamental que debe plantearse es si la teoría informa el diseño prospectivo y, de ser así, ¿de qué manera exactamente? En lugar de grandes teorías de aprendizaje que pueden ser difíciles de proyectar en circunstancias particulares, el diseño de experimentos tiende a enfatizar un alcance teórico intermedio" [1].

Adicionalmente "los experimentos de diseño se llevan a cabo para desarrollar teorías, no simplemente para ajustar empíricamente lo que funciona: una teoría del diseño

[1] Kieran, C. (2019). Task Design Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Alegebra with Technological Tools. *ICME-13 Monographs* (págs. 265-287). Hamburg : Springer Open, p. 10-11.

explica por qué diseña trabajos y sugiere cómo pueden adaptarse a nuevas circunstancias" [2].

Algunas de las particularidades que valen la pena destacar para la investigación basada en el diseño, teniendo en cuenta (Design-Based Research Collective, 2003) se detallan a continuación. Los principales objetivos del diseño en el aprendizaje y el desarrollo de teorías de aprendizaje están relacionados, el desarrollo y la investigación son implementados a través de ciclos continuos de diseño y rediseño, deben explicar cómo funcionan los diseños en escenarios reales, están basados en una estricta colaboración entre investigadores y participantes, y, finalmente, implican el compromiso de construir y explicar teorías mientras se resuelven problemas reales.

Adicionalmente, cabe resaltar que en los últimos años las teorías sobre el diseño han estado presentes en las discusiones de investigación, ejemplo claro se encuentra la conferencia PME, 2005: "The significance of task design in mathematics education" la cual se dedicó al diseño de tareas. En ICME-11 en 2008, el comité del programa científico inició la idea de tener un grupo de estudio (TSG) sobre diseño de tareas llamado "Research and development in task design and analysis". El entusiasmo generado con respecto a esta área de investigación fue grande de tal manera que se colocó un TSG similar en el programa para ICME-12 en 2012, así como para ICME-13 en 2016 y para ICME-14 en 2020. Este interés fue ilustrado además por la celebración del ICMI Study 22 (2013).

B. Población y muestra

La presente investigación está centrada en estudiantes de 8 a 10 años de colegios privados de la ciudad de Neiva y el municipio de Rivera - Huila. La investigación se desarrolla con 24 estudiantes (11 niños y 13 niñas), de los cuales, tres son de 8 años, catorce estudiantes son de 9 años y seis estudiantes que son de 10 años. Estos estudiantes fueron organizados en pequeños grupos distribuidos de la siguiente manera: el grupo del martes estaba conformados por 6 estudiantes, dos de ellos de 8 años, tres de 9 años y uno de 10 años; el grupo del miércoles estaba conformado por 7 estudiantes, de los cuales seis son de 9 años y la otra estudiante de 10 años; el grupo del jueves estaba conformado por 7 estudiantes, seis de ellos de 9 años y la otra estudiante de 10 años; finalmente, el grupo del viernes estaba formado por 4 estudiantes, en donde solo uno tiene ocho años y los demás 10 años.

C. Actividades

Cada actividad está conformada por los objetivos, los puntos a desarrollar, y los espacios destinados a recoger los trabajos desarrollados por los estudiantes. Cada actividad contiene al menos un punto a desarrollar que busca el desarrollo del pensamiento independiente y autónomo por parte del niño.

Las actividades fueron desarrolladas de manera virtual por las plataformas Microsoft Teams y Zoom. Se aplicaron un total de 9 actividades, desarrolladas semanalmente en nueve semanas, en estos pequeños grupos de 6 a 7 estudiantes, distribuidos teniendo en cuenta sus edades, grado y colegio, como se informó anteriormente.

Se trabaja con un análisis que busca interpretar las representaciones, conjeturas y estrategias de solución a cada problema o proposición abordado, y de esta forma indagar sobre las diferentes etapas y procesos de pensamiento geométrico que desarrolla el estudiante para llegar a producir conjeturas válidas y procedimientos que se acerquen a una demostración. Como se diseñaron actividades que fueron implementadas en pequeños grupos esto permitió observar el desarrollo de los estudiantes.

Se realizaron videos caseros en los que se les presentaron a los estudiantes el paso a paso de las construcciones con regla y compás de algunos objetos y nociones geométricas planteadas en el Libro I de los Elementos de Euclides.

Adicionalmente cada una de las actividades fue grabada en busca de analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando están ejecutando sus respectivas actividades. Esto sirvió para el mejoramiento continuo de las actividades, para así perfeccionar el material y rediseñar la siguiente actividad.

Se diseñó y realizó una serie final de actividades para determinar si los estudiantes lograron realizar conjeturas válidas que les acercaran a la realización de demostraciones visuales a partir de representaciones gráficas. Para verificar si esta secuencia de actividades puede ser desarrollada por los estudiantes, se propuso la siguiente secuencia, conservando un orden de construcción de algunos objetos geométricas, para finalmente llegar a construir la demostración visual del teorema de Pitágoras planteada en el Libro I de los Elementos de Euclides.

1. Actividades basadas en construcciones con regla y compás. Para la aplicación de estas actividades se realizaron videos caseros donde se mostró el paso a paso para la construcción de algunos objetos geométricos planteados en el Libro I de los Elementos como son triángulos equiláteros, isósceles, escaleno, rectas perpendiculares y paralelas, triángulos rectángulos, ángulos, cuadrado. Además, cada una de estas actividades estaba acompañada de una experiencia de pensamiento independiente que buscaba desarrollar el pensamiento geométrico autónomo. Este tipo de actividades permitió que cada niño comprendiera las particularidades que tiene cada una de estas nociones.

2. Actividades basadas en la construcción del concepto de área. El estudiante resolvió problemas aplicando la descomposición y recomposición de figuras y por medio de un plano con medidas reales en el dibujo. Además, se trabajó observación de diagramas que les permitió a los niños identificar particularidades con respecto a triángulos y concepto de área.

3. Actividades basadas en la demostración visual a través de material manipulable. Se trabajó con rompecabezas elaborados en cartón que permitió al estudiante a través de la manipulación y la visualización proponer conjeturas válidas que llevaron a procesos demostrativos. Esta actividad fue diseñada buscando que los niños demostraran el teorema de Pitágoras planteada en el Libro I de los Elementos.

IV. CONCLUSIONES

La finalidad de la investigación estuvo centrada en el diseño de una forma de aprender geometría a través de la construcción, conjeturación y prueba de conceptos y objetos matemáticos, esta primera acción se basó en la construcción de los objetos y nociones planteadas en el Libro I de los *Elementos* y se logra en cuanto el estudiante a través de construcciones con regla y compás aborda y desarrolla dichos objetos y nociones geométricos. Con base en las primeras construcciones, el estudiante realiza triángulo equilátero, isósceles, escaleno, ángulos de diferentes tipos, triángulo rectángulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares y cuadrados, identifica las particularidades que tiene cada una de ellas, y en este contexto desarrolla actividades de pensamiento

[2] Kieran, C. (2019). Task Design Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Alegebra with Technological Tools. *ICME-13 Monographs* (págs. 265-287). Hamburg : Springer Open, p. 9.

independiente hasta llegar a plantear sus propios métodos de construcción paso a paso.

Lo anterior se evidencia en las actividades basadas en construcciones con regla y compás, las cuales buscaban diseñar y desarrollar tareas que hicieron que los estudiantes de ocho a diez años analizaran, identificaran y probaran propiedades de objetos geométricos a través de demostraciones visuales.

Para responder el problema de investigación de ¿cómo desarrollar el pensamiento geométrico a través de demostraciones visuales?, se plantea un objetivo, el cual busca favorecer, por medio de construcciones geométricas y demostraciones visuales, la construcción de significado de objetos y conceptos geométricos presentados en el Libro 1 de los *Elementos* de Euclides, que propicien el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de ocho a diez años, el cual se evidencia en el desarrollo de las actividades basadas en construcciones con regla y compás, apoyado en situaciones que incitan el pensamiento independiente que requiere análisis y creatividad para su desarrollo.

Construir el triángulo equilátero más grande que se puede en un octavo de cartulina, analizar la posibilidad de construir o no un triángulo isósceles sobre una base dada y con longitudes de los lados iguales dadas, determinar el número de ángulos agudos, obtusos, rectos que se pueden construir con base en dos puntos dados en una circunferencia y la construcción con regla y compás de un triángulo rectángulo, escaleno y un cuadrado ideado independientemente por el estudiante.

Los estudiantes, al lograr la verificación recortando y haciendo coincidir las piezas o pedazos del rompecabezas, mostraron que habían asimilado la comparación de áreas por descomposición y (re)composición y que la supieron utilizar para llegar a sus conclusiones, pero al mismo tiempo mostró que no pudieron ver cómo usar las tres proposiciones euclidianas que se prepararon en las actividades basadas en la demostración visual a través de material manipulable.

Es importante aclarar, que en el marco teórico se propuso trabajar en comunidades de práctica, algo que fue imposible realizar debido a la emergencia sanitaria por el COVID-19. Esto hizo que las actividades se aplicaran de manera virtual, a través de la plataforma TEAMS y Zoom, en cuatro grupos pequeños distribuidos así: martes (6 estudiantes), miércoles (7 estudiantes), jueves (7 estudiantes) y viernes (4 estudiantes), para un total de 24 estudiantes. En cada grupo se generan conversaciones que permite a los estudiantes intercambiar ideas e interactuar con el docente quien juega el papel de guía tanto con el grupo completo como de manera personalizada. De esta manera se aplicó una actividad por semana. [Además se comprueba, que trabajar con la totalidad de los estudiantes no era adecuado, puesto que hubo una actividad que se trabajó con todos los estudiantes y los resultados no fueron favorables].

La importancia de los hallazgos y aportes implica que es necesario continuar avanzando en generar una forma de aprender geometría a través de la construcción, conjeturación, prueba de conceptos y objetos matemáticos a partir de la visualización y representación desde la escuela.

REFERENCIAS

[1] A, S. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical behavior*, 55-80.

[2] Balacheff, N. (22 de Septiembre de 2000). Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas. . Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

[3] Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. Italia.

[4] Byrne, O. (2013). *The first six books of the elements of euclid.* TASCHEN.

[5] Camargo Uribe, L. (Junio de 2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad práctica de fututos profesores de matemáticas de educación secundaria. Valencia, España.

[6] Carratalá, E. R. (1982). La represnetacion del espacio en el niño en la obra de J. Piaget . *Mallorquina de Pedagogía*, 145-170.

[7] Cecilia R. Crespo, C. C. (2016). Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática. *Acta latinoamericana de matemática educativa.*

[8] Christine Knipping, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. *ICMI 13* .

[9] Cristian Alfaro, P. F. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *UNA*, 21.

[10] Cristina Bolivar, M. A. (2010). La actividad demostrativa en basica secundaria un ejemplo de análisis. *Encuentro colombiano de matemática educativa.* , 327-335.

[11] Cristine Knniping, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early career Researchers. *ICMI 13*.

[12] de Villiers, M., & Hanna, G. (2011). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study .* Dordrecht: Springer.

[13] Diana Marcela Lourido, C. M. (2011). La enseñanza inicial de la demostración: un manual para docentes. . Brasil : CIAEM .

[14] Escobar, F. A. (Octubre de 2014). La demostración en Geometría: una mirada en la educación primaria . Bogotá, Colombia.

[15] Escobar, R. D. (2013). Teoremas en el aula de clase: una propuesta para la formulación didáctica de la enseñanza de las matemáticas a nivel de escuela secundaria. Manizales , Colombia.

[16] Ferdinando Arzarello, C. S. (2019). Approaching Proof in the Classroom Throught the Logic of Inquiry. *ICME 13.*

[17] Florez, C. S. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos cognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica. . *TED*, 121-142.

[18] Gutierrez, S. E. (2011). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria 82-90.

[19] Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics* , 5-23.

[20] Jorge Fiallo, L. C. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostració en matemáticas *Integración*, 181-205.

[21] Kieran, C. (2019). Task Desing Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Alegebra with Technological Tools. *ICME-13 Monographs* (págs. 265-287). Hamburg : Springer Open.

[22] Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education* , 379-405.

[23] López, N. R. (2010). Medios y recursos para al enseñanza de la geometria en la educación obligatoria *Revista electrónica de didácticas específicas.*

[24] Maricela Soto, M. R. (2012). Las situaciones (didáticas) de formación matemática o las competencias del saber enseñando . *S.A.E.M Thales* , 4-6.

[25]Osorio, V. M. (2 de Agosto de 2003). Si no demuestro...¿enseño matemática? *Educación matemática*, 163-178.

[26] Pereda, P. M. (24 de 06 de 2016). material ludico-manipulativo para el aprendizaje de la geometría en cuarto grado de educación primaria. Bilbao, España.

[27] Perez, D. C. (2011). Diseño, aplicacion y evaluacion de un sistema de actividades para la construcción del significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para grado sexto Bogotá, Colombia.

[28] Perry, P. (2000). Una propuesta para abordar el teorema de pitágoras en clase . *EMA* , 152-169.

[29] Silvia, M. N.-C. (2019). La enseñanza de la matemática en el nivel medio. . *REDINE*, 1-11.

[30] Solano, E. M. (2015). Convención didáctica sobre la demostración geométrica. México.

[31] Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* , 289-321.

[32] Torrejon, A. L. (s.f.). Material Mnaupulativo en geometria . Vallalodid, España .

[33] Vargas, G. V. (2013). La enseñanza del teorema de pitágoras: una experiencia en el aula con el uso de geogebra, segun el modelo de Van Hiele. . *Uniencia* , 95-118.

[34] Wenger, E. (1998). *Communities of prcatice: Learning, meaning and identity. .*

Problemas de combinaciones con estudiantesde secundaria

Carlos F. Chavez*
*Colegio Virginia Gutiérrez de Pineda, cfcchavez32@gmail.com

***Abstract*— This article deals with counting problems, applied to secondary school students in a public school in Bogotá, in which their responses to two combinatorial problems are analysed. For this purpose, the students' answers, their strategies and errors will be analysed in order to verify Piaget's and Inhelder's ideas or the ideas proposed by Fischbein, to finally draw some conclusions about the study.**

***keywords*— Counting, Combinations, Piaget, Fischbein problem solving**

***Resumen*— En este artículo se abordan problemas de conteo, aplicados a estudiantes de secundaria en un colegio público de Bogotá, en la que se analizan sus respuestas a dos problemas sobre la combinatoria. Para este propósito se analizarán las respuestas de los estudiantes, sus estrategias y errores con el fin verificar las ideas de Piaget e Inhelder o las ideas propuestas por Fischbein, para finalmente plantear algunas conclusiones sobre el estudio.**

***Palabras clave*— Conteo, Combinaciones, Piaget, Fischbein solución de problemas.**

I. INTRODUCCIÓN

A continuación, se presenta un análisis de las respuestas, por parte de los estudiantes de grado séptimo y noveno del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda, a dos problemas de conteo, relacionados con las combinaciones, el primero en un contexto numérico y el segundo en un contexto geométrico. Es de aclarar que los estudiantes hasta el momento no han recibido ningún tipo de instrucción en el tema de técnicas de conteo, y se espera identificar sus preconceptos, habilidades y dificultades. La intención es que los estudiantes identifiquen una relación entre los dos problemas y descubran una estrategia común que los lleve a solucionarlos. Posteriormente se analizarán las respuestas de los estudiantes, teniendo en cuenta las teorías propuestas por Piaget e Inhelder y se contrastarán con los estudios de Fischbein en relación con el pensamiento combinatorio. Finalmente se presentan algunas conclusiones y consideraciones finales.

II. MARCO DE REFERENCIA

En primer lugar, para hablar del pensamiento combinatorio nos referiremos a las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951). Según Piaget, el desarrollo cognitivo de los niños avanza a través de una secuencia de cuatro estadios o grandes periodos críticos los cuales son:

Etapa sensorio-motora: la cual abarca desde el nacimiento hasta los 2 años.
Etapa pre-operacional: desde los 2 años hasta los 7 años aproximadamente.
Etapa operaciones concretas: de 7 a 11 años aproximadamente y Etapa operaciones formales: que comienza en la adolescencia y se extiende hasta la edad adulta.

En relación con las combinaciones Piaget llevo a cabo algunas actividades con niños hasta los 7 años en promedio y les propuso formar todas las parejas de fichas de dos colores, elegidas entre tres montones (rojas, blancas y azules) y afirmó que los niños de estas edades se limitan a asociar dos colores cualesquiera al azar sin buscar ningún procedimiento de formación de todas las combinaciones, el niño no llega sino a un descubrimiento empírico de las combinaciones, mediante simple tanteo, sin lograr establecer un sistema de construcción de todas las posibilidades.

En cuanto a las combinaciones de dos objetos, elegidos entre cuatro de colores diferentes, ninguno de los sujetos llega a emparejar sistemáticamente uno de estos cuatro colores con los otros tres, después el siguiente con los dos restantes y finalmente estos dos últimos entre sí. El método empleado es empírico, es decir, se procede por construcción sucesiva de parejas y no mediante la aplicación de un plan que, aunque insuficiente, dirigiera los primeros ensayos de solución del problema.

En relación con los niños con edades entre los 8 y 11 años, hay un interés por la búsqueda de un sistema de formación de parejas, en lugar de contentarse con obtener parejas aisladas, pero se fracasa en el descubrimiento de tal sistema completo; el éxito en completar la tarea sigue basándose en la búsqueda empírica.

Algunos de los estudiantes de 11 o 12 años descubren un sistema, de tal modo que ninguna asociación queda olvidada. La explicación aportada sobre el requisito de haber alcanzado el nivel de las operaciones formales es que para construir el sistema de todas las combinaciones posibles dos a dos en el caso de n términos, es necesario coordinar entre si dos operaciones distintas la seriación y correspondencia en una única operación. Esto supone la intervención de las operaciones formales, esto es, operaciones de segundo orden, que es característico del nivel de pensamiento formal.

Según Piaget a diferencia del mecanismo operatorio de las combinaciones, que se adquieren en promedio desde los 12 años, en el de las permutaciones no se acaba antes de los 15 años: sobre 20 sujetos de 11 a 15 años, 6 solamente lo descubrieron espontáneamente.

En síntesis, Piaget e Inhelder (1951) han probado que el niño antes de la edad de 7 años sólo puede hacer algunas entre todas las posibles combinaciones actuando mediante ensayo y error y no intenta encontrar un procedimiento sistemático. En el período de las operaciones concretas realizan inventarios de todas las combinaciones posibles de una manera empírica; y en el período de las operaciones formales, el adolescente adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar tales inventarios.

En segundo lugar, se tendrán en cuenta las ideas de Fischbein quien hizo un análisis detallado de los resultados obtenidos por Paget e Inhelder para el nivel de las operaciones formales, llegando a las siguientes conclusiones:

- No todos los sujetos del nivel III (11 o 12 años) son capaces de descubrir el método de construir las combinaciones; algunos tardan hasta la edad de 13 o 14 años. Es decir que el desarrollo de la capacidad requerida para las operaciones combinatorias se realiza gradualmente, pero no es completado durante este estadio.

- Pone en duda la validez de la afirmación de Piaget de que existe un desfase de varios años en la adquisición de las permutaciones en relación con las combinaciones.

- Estas observaciones llevaron a Fischbein a interesarse, particularmente, por estudiar el efecto de la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria en sujetos de edades comprendidas entre 10 y 15 años. Las experiencias realizadas permitieron establecer los siguientes hechos especialmente interesantes:

- Incluso al nivel de las operaciones formales las técnicas combinatorias no son adquiridas espontáneamente. La instrucción es necesaria.

- Incluso al nivel de las operaciones concretas es posible inducir en los niños la asimilación de técnicas combinatorias, así como la constitución de nuevas intuiciones secundarias, particularmente la referida a que las colecciones de las diferentes variaciones y permutaciones son generadas multiplicando sucesivamente posibilidades.

- Se encontró que incluso niños de 10 años eran capaces de asimilar el uso de diagramas en árbol para resolver problemas de variaciones con repetición y de permutaciones. Sin embargo las combinaciones al no poder ser representadas con un diagrama de árbol presentaron especial dificultad, lo cual fue solventado estableciendo la relación existente entre las combinaciones, las variaciones y las permutaciones.

La comprensión de esta relación es fácil si el número de objetos considerados es pequeño; sin embargo, el estudio de los resultados obtenidos confirmaba que esta dificultad es mayor cuando se trata de comprender la relación en términos más generales.

III. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Los problemas propuestos fueron trabajados por los estudiantes de manera virtual asincrónicamente y participaron 39 estudiantes de grado sexto y 17 estudiantes de grado noveno. Al hacer la revisión de todas las soluciones se pudieron identificar generalidades, tanto en los aciertos como desaciertos, por tanto, se analizarán solo las soluciones de los estudiantes que presentaron ideas interesantes y que representen las ideas generales del grupo. Los problemas abordados se enuncian a continuación.

1. En la nueva pizzería del barrio están ofreciendo pizzas medianas con queso, salsa de tomate y con dos ingredientes más que el cliente escoge a su gusto por tan solo $12300. Entre los ingredientes que se pueden escoger se encuentran, jamón, piña, champiñones, pollo y pepperoni. ¿Cuántas posibilidades de pizza se pueden configurar con los ingredientes que puede escoger el cliente?

1.1. En la pizzería también ofrecen pizzas grandes a $15500 las cuales pueden llevar tres ingredientes entre, jamón, piña, champiñones, pollo, pepperoni, salchicha, anchoas, salami, vegetales y carne molida. ¿Puedes generar una estrategia para determinar cuántas posibilidades hay en total de configurar una pizza?

2. Dados 5 puntos como los que se muestran en la figura 1, ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden conformar? Intenta resolver este problema de varias maneras.

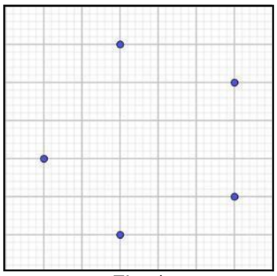


Fig. 1

PRIMER PROBLEMA.

Dificultades presentadas por los estudiantes:

1. Algunos estudiantes a pesar de hacer una lista sistemáticamente incluyeron la posibilidad de repetir un ingrediente, es decir que lo pusieron dos veces pensando en la posibilidad de elegir que un ingrediente se pueda colocar el doble de cantidad que los otros, condición que no estaba incluida en el problema.

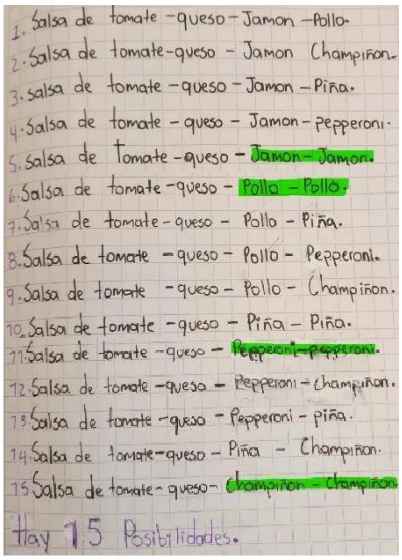


Fig. 1

2. A pesar de que se colocó el problema de conteo en un contexto donde se esperaba que no hubiese confusión entre si el orden importaba o no. Se presentaron repuestas como la que se muestra en la siguiente figura:

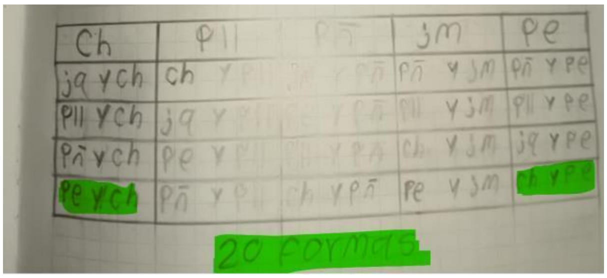


Fig. 3

Donde el estudiante considera que una pizza de champiñones con pepperoni es distinta a una de pepperoni con champiñones.

3. Algunos estudiantes hicieron efectivamente una lista sistemática, para resolver el problema 1, en el que con 5 ingredientes debían escoger 2 y formar todas las pizzas posibles y obtuvieron 10 posibilidades. Sin embargo generalizaron este resultado como proveniente de una multiplicación 5×2=10 y para el problema 1.1 donde se debían escoger 3 ingredientes de entre 10 su respuesta fue 10×3=30. Figura 3.

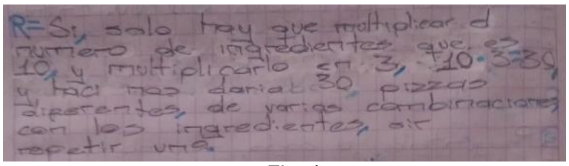


Fig. 4

4. Algunos estudiantes no leyeron bien el problema y asumieron que lo único que cambiaba era la cantidad de ingredientes pero no la cantidad de los que se podían escoger, es decir de los 10 ingredientes volvieron a formar pizzas de 2 ingredientes y llegaron a encontrar las 45 posibilidades. Figura 5

Fig. 5

5. También se presentó el caso en el que no se tuvieron en cuenta todas las posibilidades ya que se resolvió el problema a través del ensayo y error.

Estrategias de los estudiantes que resolvieron el problema correctamente.

Los estudiantes presentaron tres soluciones correctas a los dos problemas de las pizzas, las cuales se detallan a continuación:

1. Elaboración de una lista sistemáticamente

Algunos estudiantes elaboraron una lista sistemática tanto para la parte 1, que corresponde a 10 posibilidades diferentes, así como también de la parte 1.1 el cual conllevaba un poco más de trabajo ya que le correspondía 120 posibilidades.

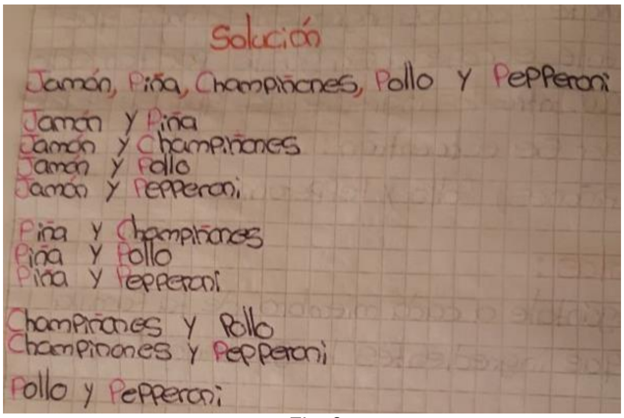


Fig. 6

2. Elaboración de una parte de una lista sistemática y posteriormente deducción de un patrón numérico.

Como podemos observar en la figura el estudiante hace una lista estratégica fijando un ingrediente (el jamón) y posteriormente infiere un patrón en la conformación de las ternas al fijar otro ingrediente, teniendo especial cuidado en restar las ternas que ya se contaron con anterioridad y de esta manera se olvida de la lista y procede únicamente con los números. Figuras 6 y 7.

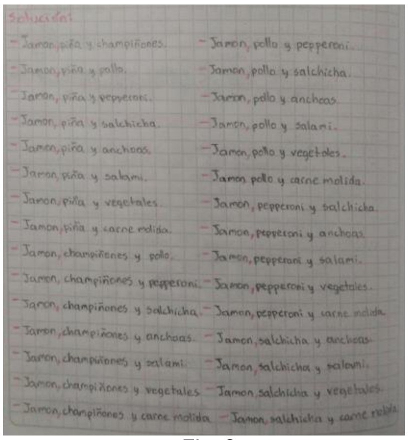


Fig. 6

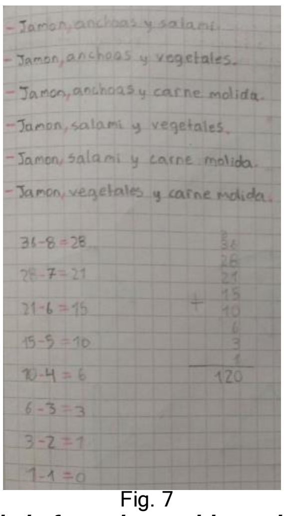


Fig. 7

3. Aplicación de la formula combinatoria

Varios estudiantes utilizaron la fórmula (figura 8) para encontrar el subconjunto de r objetos tomados de entre n objetos en que el orden de los r carece de importancia, el cual se denota por:

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

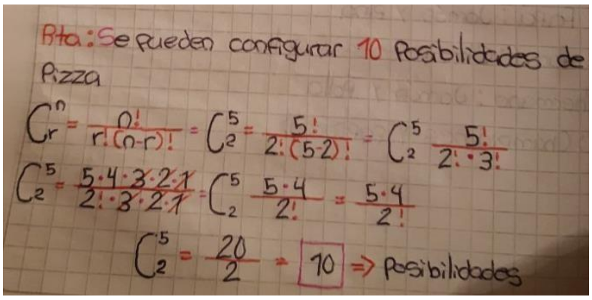


Fig. 8

Sin embargo, al saber de antemano que este tema no se abordó con anterioridad, se puede entrever que su utilización proviene de la búsqueda de problemas similares en internet o de la explicación de alguna persona cercana. Esta inferencia se hace debido a que como se dijo anteriormente los problemas se trabajaron de manera virtual y estaba abierta esta posibilidad. No obstante también se pudo observar que no había una apropiación de dicha formula, puesto que los estudiantes que desarrollaron el problema haciendo uso de ella, no pudieron ver que también se aplicaba en el segundo problema en un contexto geométrico.

SEGUNDO PROBLEMA.

En este segundo problema se esperaba que los estudiantes, a partir del primer problema utilizaran estrategias semejantes o que las perfeccionaran, pero en realidad no encontraron dicha relación y únicamente lo intentaron resolver de manera geométrica dibujando los triángulos.

Para este segundo problema los estudiantes usaron dos estrategias.

Primera estrategia:

Consiste en dibujar los triángulos superpuestos en los puntos dados como se puede apreciar en las figuras 9 y 10.

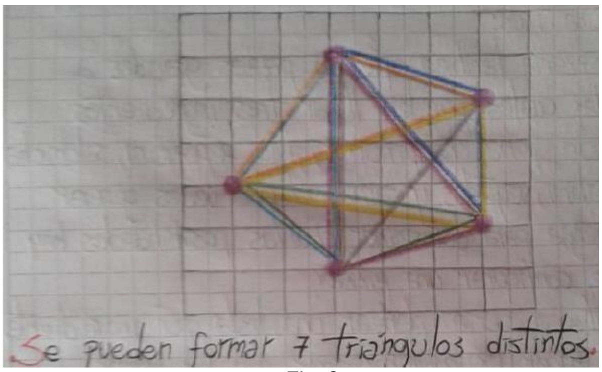


Fig. 9

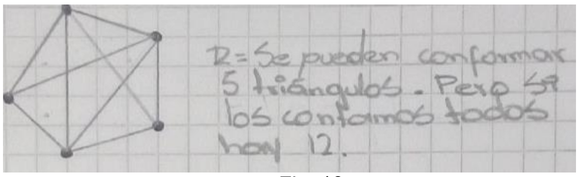


Fig. 10

Bajo esta estrategia ninguno de los estudiantes pudo conseguir el número de combinaciones correcta.

Segunda estrategia:

Consiste en dibujar todos los triángulos posibles, tomando en cada caso los puntos dados, con el fin de no caer en repeticiones o en omitir algún triángulo.

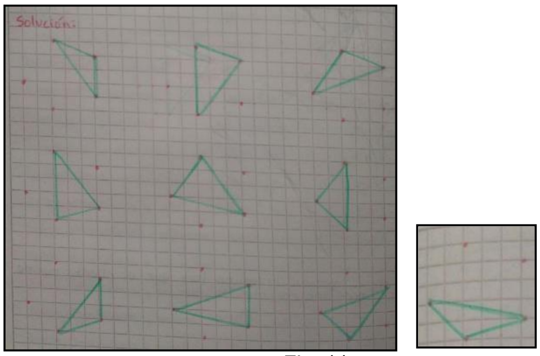


Fig. 11

IV. CONCLUSIONES

De acuerdo con los planteamientos de Piaget y el posterior análisis de Fischbein en relación con las combinaciones, se pueden hacer las siguientes conclusiones del trabajo desarrollado por los estudiantes:

- No se puede asegurar que los estudiantes con determinada edad son capaces o no, de resolver problemas de combinaciones, tal como lo dice Fischbein.

- Lo descrito en cada una de las etapas de Piaget se replica en las estrategias planteadas por los estudiantes, sin embargo no coincide con las edades planteadas.

- Los estudiantes que presentaron dificultades permitieron evidenciar oportunidades de intervención instruccional, con el ánimo de superar preconcepciones erróneas, auto restricciones a los problemas y la falta de sistematicidad en el conteo. Lo que sugiere un trabajo más profundo y amplio en relación con la combinatoria.

- La aplicación de fórmulas no era uno de los objetivos de este trabajo, sin embargo algunos estudiantes las aplicaron efectivamente en el primer problema, pero no evidenciaron su comprensión y apropiación, puesto que no lograron ver su aplicabilidad en el segundo problema.

Finalmente se puede decir los planteamientos de Piaget a pesar de no coincidir con las edades que él propone, si se logran replicar en las estrategias utilizadas por los estudiantes y sus dificultades lo que lo convierte en un buen insumo para investigaciones posteriores.

En cuanto a lo planteado por Fischbein, parece ser claro que la intervención del docente si es necesaria ya que la deducción de las fórmulas combinatorias no parece darse de manera natural en los estudiantes de este nivel académico.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los estudiantes de grado séptimo y noveno del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda de la localidad de Suba.

REFERENCIAS

[1] C. Batanero. *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Editorial síntesis 1994.

[2] E. Fischbein. *The combinatorial solving capacity in children and adolescents.* Zentralblatt fur Didaktik de mathematic. 1988.

[3] B. Inhelder. J.Piaget *De la logica del niño a la logica del adolecente.* Barcelona. Paidos

El Conocimiento Pedagógico del Contenido en los inicios de la construcción del MKT de la geometría analítica

Virginia Ciccioli y Natalia Sgreccia
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
cicciolivirginia@gmail.com, nataliasgreccia@gmail.com

***Abstract*— This paper socializes part of a doctoral research in which the activation of the domains of Mathematical Knowledge for Teaching in curricular spaces related to analytical geometry and its teaching was analyzed, taking as a case the Mathematics Teachers' Training of the National University of Rosario (Argentina). The approach was qualitative, with a descriptive-interpretive scope. The design comprised different stages; here it is shared what is related to the analysis of the teacher's discourse of nine observed classes of a first-year subject (Geometry I), in which the disciplinary bases of the mathematical branch of interest are developed. Subcategories of analysis are delimited and arise from the specificity that the model of Mathematical Knowledge for Teaching acquires when it is integrated with contents of analytical geometry. The immersion in the teacher's interventions reveals the presence of multiple activations of the domains of the model corresponding to the field of Pedagogical Content Knowledge that would contribute to the foundation of the bases of this knowledge in students in training.**

***keywords*— teachers' training, Pedagogical Content Knowledge, analytical geometry, teacher's speech.**

***Resumen*— En este trabajo se socializa parte de una investigación doctoral en la que se analizó la activación de los dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza en espacios curriculares relativos a geometría analítica y su enseñanza, tomando como caso el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina). El enfoque fue cualitativo, con alcance descriptivo-interpretativo. El diseño comprendió distintas etapas; aquí se comparte lo relativo al análisis del discurso del profesor de nueve clases observadas de una asignatura de primer año (Geometría I), en la que se sientan las bases disciplinares de la rama matemática de interés. Se delimitan subcategorías de análisis que surgen de la especificidad que cobra el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza al integrarse con contenidos de la geometría analítica. El adentramiento en las intervenciones del docente revela la presencia de múltiples activaciones de los dominios del modelo correspondiente al campo del Conocimiento Pedagógico del Contenido que aportaría a la cimentación de las bases de este conocimiento en los estudiantes para profesor.**

***Palabras clave*— formación de profesores, Conocimiento Pedagógico del Contenido, geometría analítica, discurso del profesor.**

I. Introducción

En este trabajo se comunica parte de una investigación doctoral en la que se analizó la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, [1]) a través de la activación de sus dominios, en espacios curriculares del Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) relativos a la geometría analítica y su enseñanza.

Es reconocida la importancia del desarrollo del pensamiento geométrico en todos los niveles. Ya señalaba Atiyah en el *III International Congress of Mathematical Education* (ICME de 1976) que la geometría representa un modo de pensar que está presente en todos los sectores de la Matemática como un canal sumamente poderoso para la comprensión. También [2] y [3] refuerzan esta idea señalando que la geometría proporciona oportunidades para desarrollar la percepción espacial, la intuición geométrica y la capacidad de visualizar e imaginar. En este mismo sentido Vianna et al. (2014, citado en [4]) destacan la relevancia de esta rama de la Matemática en la comprensión del espacio que nos rodea y en el establecimiento de referencias para la localización. Mandarino (2014) y Fonseca et al. (2002) (citados en [5]) agregan a este último aspecto la importancia histórica de la Geometría en el desarrollo de conocimiento matemático y en la apreciación de las construcciones y obras artísticas, tanto de seres humanos como de la naturaleza.

Por todo lo mencionado, puede reconocerse que la construcción de un repertorio de conceptos geométricos permitirá al alumno ampliar las formas de ver y comprender el mundo. Sin embargo, el desarrollo del pensamiento geométrico no es inmediato y las simplificaciones en su enseñanza pueden resultar perjudiciales para el aprendizaje de los niños y adolescentes. [5] realizan un estudio con profesores en Matemática en un curso de formación continua en el que estos reconocen que se sienten inseguros sobre la enseñanza de la geometría por lo que no la incluyen en sus programas y planificaciones o la abordan de manera precaria. Los profesores, a su vez, atribuyen esta deficiencia en la enseñanza a la escasa profundidad con que los contenidos geométricos habían sido desarrollados en su formación inicial. En esta misma línea Aslan-Tutak y Adams (2015, citado en [6]) explican que esa falta de conocimiento matemático relativo a contenidos geométricos en la formación de profesores limita el aprendizaje de aspectos de la enseñanza de los mismos y la posibilidad de potenciar producciones en sus estudiantes. Este hecho se traduce en diversidad de investigaciones realizadas sobre finales del siglo XX y a inicios del siglo XXI que revelan cierta ausencia en el abordaje de contenidos geométricos en las escuelas o bien una enseñanza superficial, con énfasis en los aspectos algebraicos y en la terminología.

Focalizando la mirada en la geometría analítica podríamos decir de manera simplificada que esta rama de la matemática unifica el álgebra y la geometría sintética, como consecuencia de la asociación de números con puntos y de ecuaciones con figuras y en tal sentido requiere desde su génesis de la vinculación o complementariedad de los enfoques sintético -de las formas- y analítico -de las coordenadas-. Las geometrías de Descartes y de Fermat nacen de forma casi simultánea en el siglo XVII, en el que la recuperación del legado matemático de las obras griegas alcanza su máximo esplendor. Ello les permitió encontrarse con un terreno muy abonado por los aportes de la geometría griega (en particular, de Apolonio y Pappus). Sin embargo, cabe señalar que este descubrimiento no habría podido darse en paralelo con el surgimiento de la geometría sintética pues requirió del aporte de muchas obras matemáticas posteriores como la Aritmética de Diofanto, los descubrimientos de Oresme y del álgebra simbólica de Vieta ([7]).

Surgen así, dos formas de abordar el tratamiento de problemas geométricos a través de la geometría analítica o de la geometría sintética que no dejan de ser, en esencia, una misma geometría que se vale de distintos métodos o enfoques. Asimismo, este es un aspecto que cabe ser analizado desde los marcos curriculares y el modo en que se plasma en la enseñanza ya que se vincula directamente con su génesis epistemológica.

En Argentina la Geometría tiene presencia obligatoria en todos los años de la escolaridad secundaria y dada su señalada relevancia en la formación de los ciudadanos es importante que nos cuestionemos cómo queremos que llegue a la sociedad. El esquema que se mantiene actualmente en los diseños curriculares en nuestro país plantea la incorporación de la geometría sintética en los primeros años de la escolaridad secundaria y la geometría analítica en los últimos. Esta secuenciación está sustentada en acuerdos realizados por grandes matemáticos a comienzos del siglo XX que, según [8] y [9], no han sido sólidamente argumentados, provocando una falsa controversia entre enfoques y una consecuente discontinuidad en su enseñanza que se acentúa en la formación de profesores ([2]).

Si bien numerosos estudios se han ocupado de analizar qué conocen los profesores o futuros profesores sobre un tema matemático específico empleando distintos modelos de conocimiento, son escasos los que centran su indagación en el conocimiento requerido para la enseñanza de la geometría en la formación inicial o en sus prácticas como nóveles ([10]; [11]; Steele, 2013, citado en [6]).

Es así que en esta investigación resulta de interés conocer cómo se construye el MKT para la enseñanza de la geometría analítica en estudiantes que proyectan ser profesores, asumiendo como caso el PM de la UNR. En la parte que se comparte en el presente artículo se pone el foco en las prácticas iniciales específicas de la formación que ofrece el PM, concretamente, en la asignatura Geometría I, de carácter anual, en la que se sientan las bases disciplinares de la geometría analítica en la carrera. Se acentúa la mirada en la actuación del docente a cargo, en su discurso en instancias de explicación guiada, ya que se reconoce que la formación discursiva tiene un impacto considerable en la construcción del significado ([5]). Puntualmente se analiza en el discurso del profesor la especial relevancia que adquiere el campo del conocimiento pedagógico del contenido dentro del modelo MKT.

II. MARCO TEÓRICO

Las investigaciones llevadas a cabo por el grupo Michigan liderado por Ball refuerzan la idea de que enseñar Matemática requiere habilidades que se entrelazan profundamente con la Matemática, pero que son propias de la esfera del conocimiento del profesor. Proponen, de este modo, un conjunto de seis dominios que constituyen el MKT agrupados en dos grandes campos: conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del contenido ([1]). El primero de ellos está conformado por los dominios del conocimiento: común del contenido (CCK), especializado del contenido (SCK), en el horizonte matemático (HCK); el segundo, por los dominios del conocimiento: del contenido y de la enseñanza (KCT), del contenido y de los estudiantes (KCS), del contenido y del currículum (KCC).

En la tesis que enmarca este trabajo se procuró caracterizar la configuración del MKT de la geometría analítica en el PM de la UNR. En esta instancia se comparte se pone el foco en las prácticas iniciales específicas de la formación que ofrece el PM, concretamente, en la asignatura Geometría I, de carácter anual, en la que se sientan las bases disciplinares de la geometría analítica en la carrera. Se acentúa la mirada en la actuación del docente a cargo, en instancias de explicación guiada, puntualmente en la especial relevancia que adquiere el campo del conocimiento pedagógico del contenido, con los tres dominios que lo componen: KCT, KCS y KCC.

Sucintamente, el KCS integra el conocimiento acerca de la cognición de los estudiantes y permite anticipar acciones, dificultades, errores y aciertos. Se evidencia al elegir actividades que pueden ser de interés para los estudiantes, al interpretar sus emergentes, al identificar sus modos de pensamiento cuando, por ejemplo, se expresan mediante razonamientos incompletos haciendo un uso inadecuado del vocabulario matemático.

El KCT incluye las formas didácticas de abordar el desarrollo de un contenido para hacerlo accesible a otros. Comprende el uso de recursos, el establecimiento de conexiones con ideas previas así como la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

El KCC encuadra decisiones y acciones acerca de los enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza en cierto nivel educativo. Se vincula con lo normado jurisdiccional e institucionalmente.

III. METODOLOGÍA

El diseño de la investigación responde al de un estudio de caso: el PM, centrado en la configuración del MKT de la geometría analítica. La investigación tiene un enfoque eminentemente cualitativo, en correspondencia con la esencia del objeto que se desea estudiar. El alcance es principalmente descriptivo, dado que se especifican las características relevantes del caso en cuestión. La investigación es de tipo empírica no experimental porque se analizan los fenómenos tal como se dan en su contexto natural ([12]) El estudio es transversal, debido a que se recolectan datos con simultaneidad y en instancias puntuales. La técnica de recolección implementada para la parte del trabajo que aquí se comparte es la observación directa de clases. Se observan nueve clases de Geometría I; se efectúan de manera intencionalmente discontinua (inicio, intermedio, final) a lo largo del segundo cuatrimestre (desarrollo de “geometría analítica”, siendo en el primero “geometría sintética”) para tener un espectro variado de clases en torno a la temática de interés. Se toman registros de audio y notas de campo.

La técnica de procesamiento de la información predominante es la de análisis del contenido. Cada una de las clases observadas constituye la unidad de análisis, siendo subunidades los mensajes agrupados en configuraciones de mensajes delimitadas de acuerdo al contenido matemático de referencia.

Se delimita un sistema de categorías y subcategorías de análisis que surge de la especificidad que cobra el modelo MKT al integrarse con contenidos de la geometría analítica. Cada una de las categorías se corresponde con los dominios del modelo MKT. Las subcategorías emergentes de los dominios correspondientes al campo del conocimiento pedagógico del contenido (de interés en esta comunicación) se comparten en la Tabla I.

TABLA I

CATEGORÍAS Y SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

Categoría	Subcategorías
KCT	Conexión con lo previo
	Utilización de recursos
KCS	Anticipación de acciones
	Interpretación de emergentes
KCC	Articulación horizontal
	Articulación vertical

IV. RESULTADOS

En el discurso del profesor en las instancias de explicación guiada se revelan modos de poner a disposición de los estudiantes oportunidades de aprendizaje matemático que serán resignificados en instancias más avanzadas de la carrera. En el análisis del discurso se trata de encontrar regularidades en el lenguaje del sujeto en su contexto (clases de geometría analítica orientadas a la formación de futuros profesores en Matemática) con la intención de develar sentidos y significados en la construcción del conocimiento matemático a partir del análisis de las condiciones de producción de sus dichos (Almeida, 2007, citado en [5]) en vinculación con las categorías delimitadas para el estudio. Así es que se realiza un análisis pormenorizado del contenido del texto de campo a partir del que se delimitan 32 CM, 26 de las cuales corresponden a instancias de explicación guiada (de particular interés en este trabajo) y al interior de cada una de ellas se reconocen subcategorías correspondientes a los dominios del MKT (Tabla I).

Para cada una de las clases observadas se delimitan CM asociándoles un nombre referente al contenido matemático que se desarrolla en los actos de habla que la conforman. Así, un recorrido por las CM de cada clase permite un primer reconocimiento de los bloques temáticos abordados en cada una de ellas. Se comparten, a modo de ejemplo, las cuatro CM de la sexta clase analizada.

1. Equivalencia entre las distintas formas de la ecuación de la recta en el plano
2. Búsqueda del circuncentro de un triángulo en forma algebraica (ejemplo)
3. Distancia de un punto a una recta en el plano
4. Desigualdades lineales en dos variables

En una instancia posterior de procesamiento, para cada CM se elabora un texto de síntesis del recorrido que se realiza al interior de la misma en el que se muestra cómo se establecen asociaciones con las subcategorías de análisis. Se comparte, a modo de ejemplo, el texto de síntesis de la CM3 de la clase 8.

*Se reflexiona sobre los significados (**SCK: nivel de profundización matemática**) de intersecciones de superficies cuádricas con planos y se evocan conocimientos previos (**KCT: conexión con lo previo**) relativos a cónicas a la vez que se recapitula lo trabajado en clases anteriores.*

*En todos los casos se realiza una primera asociación nombre - representación gráfica (**CCK: lenguaje matemático**) al analizar a priori los cortes que se obtienen mediante planos paralelos a los planos coordenados. Se realiza un tratamiento algebraico y geométrico pormenorizado de las distintas secciones que resultan al intersecar la cuádrica con planos paralelos a los planos coordenados. Se realizan interpretaciones gráficas de las representaciones matemáticas efectuadas (**SCK: representaciones matemáticas**).*

*En todos los casos se establecen vinculaciones geometría sintética - geometría analítica (**HCK: conciencia de la relación entre tópicos matemáticos**) al traducir los objetos geométricos en ecuaciones y luego reinterpretar geométricamente los resultados algebraicos obtenidos.*

*Se evocan conocimientos previos (**KCT: conexión con lo previo**) relativos a curvas en el plano, ecuaciones con valor absoluto, sistemas de ecuaciones, conos de rotación. En algunas oportunidades se realizan articulaciones con asignaturas simultáneas (**KCC: articulación horizontal**) y algunas apreciaciones matemáticas de nivel superior (**HCK: conciencia de la relación entre tópicos matemáticos**) en cuanto a cómo obtener conos generalizados y a las particularidades que presenta el punto de ensilladura de un paraboloide hiperbólico.*

*Se establecen vinculaciones con la realidad (**KCT: utilización de recursos**) al analizar el caso del paraboloide hiperbólico (silla de montar). En reiterados casos se potencian las respuestas de los estudiantes desde la justificación (**KCS: interpretación de los emergentes de los estudiantes**).*

*Se institucionalizan (**CCK: procesos de desarrollo matemático**) ecuaciones de las superficies cuádricas estudiadas con precisión matemática (**CCK: tratamiento matemático del contenido**) introduciendo términos y notaciones (**CCK: lenguaje matemático**) correspondientes. Se utiliza el pizarrón como medio de fijación de las ideas socializadas (**KCT: utilización de recursos**).*

Del análisis de los datos se desprende la presencia de un bloque central de activaciones de los dominios SCK y HCK que constituyen el corazón matemático de las clases de geometría analítica. Asimismo, la cantidad y diversidad de modalidades que emergen en los dominios KCS y KCT y la cantidad de activaciones que se dan en el desarrollo de las nueve clases permiten observar que el aporte del conocimiento del profesor acerca de la enseñanza y de los estudiantes a quienes va dirigida su enseñanza, no es menor. El profesor provoca a no conformarse con la primera impresión, atrapa a la audiencia, vela por la accesibilidad. Todo ello se hace visible desde los conocimientos y habilidades correspondientes al dominio del KCT que acciona en sus clases al establecer conexiones con lo previo de manera constante, fundamentalmente en los momentos en los que convoca a la indagación y al hacer uso intencionado de los recursos. Por otro lado, la orientación (en algunos casos más dirigida que en otros) es una de las acciones relativas al KCS de las que el docente echa mano para adecuarse al nivel en el que se está desempeñando, así como también lo hace cuando prevé posibles errores y dificultades, selecciona ejemplos según el nivel de abstracción de los estudiantes y potencia justificaciones. Por su parte, el KCC se activa en algunos tramos de las clases, aunque más significativa resulta su presencia basal para la concreción de propuestas acordes al nivel al que están dirigidas.

V. CONCLUSIONES

Se revelan elementos clave del conocimiento del profesor que sientan las bases (en términos disciplinares y pedagógicos) para la configuración inicial del MKT de los futuros profesores que serán resignificados en instancias más avanzadas de la carrera. A través de una mirada holística del MKT en su conjunto, ha sido posible advertir la centralidad que adquieren los dominios SCK y HCK en los inicios de la construcción del MKT. Asimismo, los restantes dominios -entre ellos, los de interés en este trabajo- completan el conocimiento puesto en juego en cada explicación del profesor formador de formadores, en cada pregunta que intencionalmente se formula para orientar búsquedas e indagaciones y complementan sustancialmente de manera dinámica el bloque central de conocimientos, al mismo tiempo que el SCK y el HCK se nutren de ellos (Fig. 1).

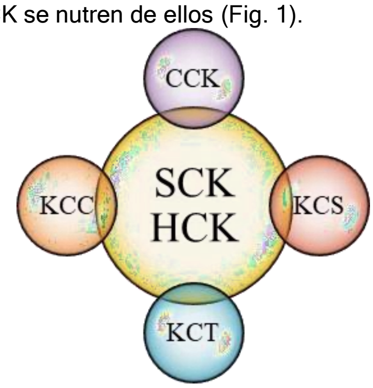


Fig. 1: Configuración del MKT de la geometría analítica ([13])

A modo de cierre, cabe advertir que el estudio realizado ha procurado realizar un aporte a la vacancia de estudios empíricos sobre el conocimiento requerido para la enseñanza de la geometría. Al mismo tiempo, se ha empeñado en proponer una delimitación concisa de componentes que configuran el MKT de la geometría analítica. En efecto, se ha detenido en estudiar cómo tales componentes se van construyendo y cimentando a partir de una formación matemática y didácticamente intencionada con el propósito de contribuir sustancialmente desde la investigación educativa, en sintonía con lo propuesto por [14], acerca de qué es lo que debe saber un profesor para sostener una enseñanza de la geometría analítica de calidad.

REFERENCIAS

[1] D. Ball, M. Thames y G. Phelps, "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?", *Journal of Teacher Education*, vol. 59, núm. 5, pp. 389-407, 2008.

[2] K. Jones. "Issues in the Teaching and Learning of Geometry", en *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, pp.121-139. Londres: Routledge Falmer, 2002.

[3] J. C. Pinto, "Geometrización del curriculum en la formación del Profesorado de Matemáticas", en *Investigación en Educación Matemática XV*, pp.481-490. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2011.

[4] L. Vasconcelos, E. Leandro, C. Passos yR. Anunciato, "Rede de Aprendizagem e Desenvolvimento da Docência: expressões do pensamento geométrico de professoras que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental", *Bolema*, vol. 35 núm. 70, pp. 708-726, 2021.

[5] A. Barbosa y B. Cortela, "Formação do PNAIC em Geometria e a Trajetória Educacional dos Professores Alfabetizadores", *Bolema*, vol. 32, núm. 61, pp. 419-438, 2018.

[6] E. Carreño y N. Climent, "Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros", *PNA*, vol. 14, núm. 1, pp. 23-53, 2019.

[7] P. González Urbaneja, "Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica", *Sigma*, vol. 30, pp. 205-236, 2007.

[8] J. Gascón, "Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?", *Suma*, vol. 39, pp. 13-25, 2002.

[9] J. Gascón, "Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria", *Suma*, vol. 44, pp. 25-34, 2003.

[10] C. Henríquez y E. Montoya, "Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 33, núm. 2, pp. 51-70, 2015.

[11] V. Ciccioli y N. Sgreccia, "Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT", *Educación Matemática*, vol. 29, núm. 1, pp. 141-170, 2017.

[12] R. Hernández, C. Fernández y P. Baptista, *Metodología de la Investigación*, México: Mc Graw Hill, 2010.

[13] V. Ciccioli y N. Sgreccia, "Conocimiento matemático para la enseñanza de geometría analítica en futuros profesores", *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, vol. 15, núm. 1, pp. 1-20, 2020.

[14] D. Ball, "Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching", en *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*, pp.11-34. Hamburgo: Springer, 2017.

RESULTADOS DEL CURSO DE COMPRENSIÓN DE PROBLEMAS

María Elisa Espinosa Valdés*, Rosa Alor Francisco** y Julieta del Carmen Villalobos Espinosa***
Tecnológico Nacional de México/campus IT de Minatitlán, maría.ev@minatitlan.tecnm.mx*Tecnológico Nacional de México/campus IT de Minatitlán, rosa.af@minatitlan.tecnm.mx, *** Tecnológico Nacional de México/campus ITS Teziutlán, julieta.ve@teziutlan.tecnm.mx

Abstract-The present work presents the results of a course base on the first phase proposed by Polya in 1945 to solve problems, which is the problem understanding phase, it is an exploratory type of work that had the objective that the students after Reading as many times as required the problem Will answer a series of questions t see if they had understood the problem before planning how they were going to solve it. The work was done with eight students and here we only present the results of three of them and of three problems with which the students worked. The problem that we present as number one that could be solved with a linear equation, the three students answer almost all the questions correctly, but in the end, they cannot write the problem in their own words, while problem number two that is also solved with a linear equation, the three students answer most of the questions well and this problem if all three can write in their own words. And finally, problem number three, the students answer most of the questions and one of the students does the writing wrong in their own words and the other two say they do not understand the problem, this problem was of maximum and minimum. Two of the problems were understood, but not completely, and the third was not understood by any of the three students.

Keywords- Understanding, Problems, Writing, Solution phases

Resumen-El presente trabajo expone los resultados de un curso basado en la primera fase que propone Pólya en 1945 para resolver problemas, que es la fase de comprensión de problemas, es un trabajo de tipo exploratorio que tenía como objetivo que los estudiantes, después de leer las veces que requería el problema, contestaran una serie de preguntas para saber si habían entendido el problema antes de hacer una planeación de cómo lo iban a resolver. El trabajo se hizo con ocho estudiantes y aquí presentamos solamente los resultados de tres de ellos y de tres problemas con los que trabajaron los estudiantes. El problema que presentamos como número uno se podía resolver con una ecuación lineal, los tres estudiantes contestan casi todas las preguntas bien, pero al final no logran redactar el problema con sus propias palabras, mientras que el problema numero dos que también se resuelve con una ecuación lineal, los tres estudiantes contestan la mayoría de las preguntas bien y este problema si lo logran redactarlo con sus propias palabras los tres. Y por último el problema número tres, los estudiantes contestan la mayoría de las preguntas y uno de los estudiantes hace mal la redacción con sus propias palabras y los otros dos dicen no entenderle al problema, este problema era de máximos y mínimos. Dos de los problemas los lograron comprender, pero no en su totalidad, y el tercero no lo entienden ninguno de los tres alumnos.

Palabras claves- Comprensión, Problemas, Redacción, Fases de solución

I. INTRODUCCIÓN

Desde hace décadas se hace énfasis en la solución de problemas verbales como una actividad central de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, para los docentes de estas asignaturas, así como para los investigadores en didáctica de la matemática es una preocupación encontrar la vía o el método para encontrar la solución de los problemas en matemáticas, esto se demuestra con el gran número de publicaciones que sobre resolución de problemas encontramos en la actualidad en las revistas del área [1] - [13].

En México, citando un caso particular, esto se vio reflejado a nivel superior, en los programas por competencias del Tecnológico Nacional de México, donde podemos leer que en todos los programas de las asignaturas de matemáticas incluyen la resolución de problemas como una competencia genérica, ya que aparecen en los programas sugerencias didácticas como "*modelen y resuelvan situaciones reales mediante conceptos propios de la asignatura" "utiliza trigonometría para resolver problemas" "resolver problemas de optimización " "plantear y resolver problemas*" etc. Otro ejemplo lo podemos observar en el nivel medio superior que en sus programas también mencionan, en las competencias disciplinares básicas de matemáticas que "*Los estudiantes deben de construir e interpretar modelos matemáticos" "Formulan y resuelven problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques" "Sabe argumentar la solución que se obtiene de un problema"* [14]. Por lo que señalamos, los estudiantes al ingresar en el nivel superior ya deberían saber resolver problemas, sin embargo, como menciona [12] "el sistema educativo, ha jugado un papel muy importante en la promoción del desarrollo de la habilidad para solucionar problemas, especialmente en estudiantes de nivel medio superior (…) pese a la importancia que le han concedido a la resolución de problemas matemáticos, en la actualidad, es aún un proceso en el que los estudiantes mexicanos continúan presentando dificultades" (p. 100). Además como antecedente podemos mencionar, un trabajo realizado en el Instituto Tecnológico de Minatitlán (ITM) con alumnos de nuevo ingreso para saber si los estudiantes que ingresan eran resolutores de problemas: Como resultado se tuvo: que no son resolutores de problemas ya que el 70.25 % de los problemas no son resueltos o los resuelven mal y solamente el 29.74 % estuvieron bien resueltos. Los problemas que se aplicaron fueron 10 problemas de álgebra elemental que se resolvían con una ecuación lineal o con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por esta razón decidimos realizar un trabajo de tipo exploratorio, con estudiantes de semestres más avanzados para ver si ellos que ya habían transitado por varias materias en el ITM eran resolutores de problemas verbales, para esto formamos un taller de resolución de problemas

II. PROBLEMA Y FASES DE SOLUCION

Problema

Hasta aquí se ha hablado de resolución de problemas pero antes de resolver un problema se debe de tener un "*problema",* por lo que aparece una interrogante ¿Qué es un problema?, todos los profesores de matemáticas saben de forma más o menos intuitiva qué es un problema, ya que constantemente se enfrentan a ellos y hablan de ellos, sin embargo al buscar la definición de lo que en matemáticas se considera un problema, se encuentran en la literatura varias definiciones de "*problema en matemáticas*", entre las que se encontraron [15] - [22], tomando para este trabajo la definición de [17] que dice: Un problema es una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución [17]. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema. Sin embargo, en general todos los autores mencionados hablan de una situación inicial que se tiene que llevar hasta una situación final y no sabe cómo llegar a esa condición final. Todos dejan ver implícitamente que el que exista un problema es algo relativo a la relación del estudiante con la tarea, pero solamente [20] es el que lo dice en forma explícita. Además, esta tarea se debe de realizar de forma consiente como menciona [19]. Para el concepto de problemas verbales en matemáticas encontramos varios trabajos que hablan sobre el concepto [23] - [25]. Para este trabajo se toma la definición de [23] que dice:

• La primera componente es el contexto o la localización de la historia, aunque este componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema, pero debe ser significativo para el alumno, para crear interés en encontrar la solución.

• La segunda componente es la información o datos que se necesitan para resolver el problema. A veces se da información irrelevante como señuelo para producir recelo en el resolutor inseguro o se da información de forma implícita que los estudiantes deben saber interpretar.

• La(s) pregunta(s) a la que hay que dar respuesta.

Fases de resolución de problemas:

Al realizar la búsqueda acerca de las fases de solución de un problema verbal encontramos que varios autores han propuesto sus propias fases las cuales mencionamos a continuación:

[26] Menciona que Descartes desde 1596, establece cuatro pasos en la resolución de problemas matemáticos, de forma abreviada estos pasos son: 1.- No aceptar nada como cierto hasta no haber reconocido claramente lo que es. 2.- Dividir cada dificultad por examinar en tantas partes como sea posible. 3.- Llevar a cabo mis reflexiones en el orden debido, comenzando con los objetos más simples y fáciles de entender. 4.- Hacer las enumeraciones tan completas y las revisiones tan generales que pueda tener la seguridad de no haber omitido nada.

Por su parte [26] menciona que Blanco en 1996, afirma que el modelo más relevante entre los primeros propuestos se debe a Wallas de 1926, quien estableció cuatro fases para la resolución de problemas: 1. Preparación: Recolección de información e intentos preliminares de solución. 2. Incubación: Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar. 3. Iluminación: Es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución. 4. Verificación: Se comprueba la solución.

Continuando la búsqueda encontramos a Pólya desde 1945, quien propuso, cuatro pasos para resolver el problema: 1.- Comprender el problema, en esta etapa se determinan las incógnitas, los datos, las condiciones y decidir si las condiciones son las necesarias. Una vez que se comprende el problema se debe de: 2.- Concebir un plan, para Pólya en esta etapa el plan debe de relacionarse con problemas anteriores, con resultados útiles. 3.- Ejecución del plan, en esta parte de la solución debe de comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos. 4.- Examinar la solución también denominada la etapa de la visión retrospectiva debemos de observar lo que hicimos y lo que no hicimos y por qué, es necesario verificar el resultado y el razonamiento seguido.

Por su parte [21] desde 1985 después de realizar varias investigaciones asegura que existen cuatro dimensiones que inciden en el proceso de resolución de problemas: 1.- estrategias cognitivas, 2.- recursos, 3.- estrategias metacognitivas, 4.- sistema de creencias. A pesar de apoyarse en los trabajos hechos por Pólya (1945, 1976) y reconocer que se pueden utilizar las estrategias que este propone como buscar problemas ya resueltos por el estudiante parecidos al que quiere resolver, aun así, los estudiantes presentan usualmente tropiezos cuando los problemas están planteados con pequeñas modificaciones. Además, Schöenfeld entre todos los trabajos que encontramos es el que menciona las creencias de los alumnos y los profesores acerca de las matemáticas. Para abordar el proceso de resolución de problemas, Shoenfeld también indica cuatro pasos: 1.- Analizar y comprender un problema: dibujar un diagrama, examinar un caso especial, intentar simplificarlo. 2.- Diseñar y planificar una solución 3.- Explorar soluciones: considerando una variedad de problemas equivalentes, considerando ligeras modificaciones del problema original, y considerando amplias modificaciones del problema original. 4.- Verificar la solución. Realizándose algunas preguntas como: ¿Utiliza todos los datos pertinentes? ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables? ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
¿Verifica la solución los criterios generales siguientes? ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?

[27] en 1994**,** explican el método creado por Bransford y Stein en 1984, basados en la propuesta de Pólya en 1945 con la intención de facilitar la identificación y el reconocimiento de las distintas partes a tener en cuenta en la resolución de problemas. Las letras de la palabra IDEAL indican los elementos del método. Las fases del método son las siguientes: 1. Identificación de los problemas: esta fase tiene la intención de ayudar a identificar los problemas. 2. Definición y representación del problema: consiste en definir y representar el problema con toda la precisión y cuidado que sea posible. 3. Exploración de posibles estrategias: se dirige a la indagación de distintos métodos de resolución del problema, además de analizar cómo se está reaccionando en ese momento ante el problema. 4. Actuación: fundada en una estrategia. 5. Logros: Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

Por su parte [3] en 2017, menciona que el estudiante al resolver un problema transita por tres momentos o fases fundamentales: orientación, ejecución y control, las que no son absolutas. Menciona el autor que al transitar por estas fases el alumno debe de comprender el problema, a su vez deberá de buscar e implementar una vía para resolverlo, comprobar la veracidad de la solución obtenida y la vía utilizada.

Después de analizar todos estos trabajos, podemos decir que, aunque son varios autores que han propuesto diferentes fases o etapas para la solución de un problema durante un periodo de tiempo largo, casi todos giran en torno al trabajo realizado por Pólya, por lo que nosotros elegimos basar nuestro trabajo en las cuatro fases propuestas por [1].

III. EXPERIENCIA EN EL AULA

Decidimos realizar una experiencia en el aula con una muestra de ocho estudiantes de Ingeniería Química, con el requisito previo de haber cursado, mínimo tres o cuatro de las asignaturas de matemáticas que aparecen en su plan de estudios y les realizamos un examen diagnóstico, donde tenían que solucionar un problema que se resolvía con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con los siguientes resultados: Con base al objetivo del estudio que era describir si los estudiantes que tomarían el curso, eran resolutores de problemas, encontramos que de forma general los estudiantes, cuando se les pide resolver un problema verbal, tienden a ser ejecutores sin detenerse a ver si comprenden el problema o no. No identificamos que exista un proceso consciente de comprensión del propio razonamiento (metacognición). Solamente el 12.5 %, resuelven bien los problemas. El 37.5 % encuentran bien la solución, pero no tienen orden para encontrar la solución, no definen las incógnitas, sin embargo, dos de ellos saben lo que están buscando, ya que encuentran los resultados correctos le ponen unidades y reducen la matriz a escalonada reducida utilizando bien las propiedades de matrices. Uno de ellos hasta el final sigue sin saber qué fue lo que encontró, y tampoco sabe las unidades de lo encontrado. El 25 %, no definen bien las incógnitas, pero al final encuentran bien los resultados, le ponen unidades, lo que nos indica que, si sabían lo que estaban buscando, pero no de forma razonada y estructurada. Para hallar la solución del sistema de ecuaciones utilizan los métodos que aprendieron en álgebra elemental (secundaria y bachillerato), a pesar de que ya cursaron algebra lineal. El 25 % no saben lo que están calculando y hacen mal uso del álgebra elemental y tampoco utilizan las propiedades de matrices bien. Dos de los estudiantes encuentran la solución, uno al forzar los resultados al usar álgebra elemental (creemos que alguien le dio el resultado) y el otro está mal en la reducción que hace de la matriz, y a pesar de tener los resultados correctos al final no supieron ni lo que hicieron ya que dicen: “*no pudimos llegar a la solución”* [29].

Con estos resultados, decidimos que los ocho participaran en el curso sobre comprensión de problemas ya que ninguno resolvía problemas en orden ni conscientes de lo que estaban realizando más bien tienden a hacer cuentas por hacer algo (tendencia a la ejecución), pero mayoría no sabían lo que estaban haciendo. Sin embargo, aquí solamente presentamos el resultado de 3 de los participantes.

La mecánica que se siguió fue que para esto se les proporcionaron tres problemas (de uno en uno) y un cuestionario que acompañaba a cada cuestionario. y se les indicaba que lo leyeran las veces que requerían hasta entender el problema, cuando ellos decían que ya lo habían entendido, entonces empezaban a resolver el cuestionario.

El cuestionario tenía las siguientes preguntas que justificamos a continuación por que fueron realizadas:
Preguntas para saber si comprenden un problema:
Contexto; Porque es una parte del problema verbal [23].
Información: Porque es una parte del problema verbal [23].
Preguntas: Porque es una parte del problema VERBAL [23].
Condiciones del problema: Se obtiene de las realizadas por [1].
Falta información y Sobre información: Estas dos preguntas se hicieron para saber si el estudiante está preparándose para seguir la siguiente fase.
Enuncia el problema con tus propias palabras: Formulación del problema con sus propias palabras, es el resultado final de un problema formulado de modo significativo, ubicándolo en un contexto conocido, con una identificación precisa del objetivo final [3] *y nos demuestra si han comprendido el problema.*

IV. RESULTADOS

Lo que presentamos a continuación entre comilla es lo que contestaron los estudiantes y está escrito tal y como ellos lo escribieron.

Problema 1

Tenemos dos depósitos de agua. Al deposito A le caben 140 litros y el depósito B le caben 10 0litros del depósito A se sacan 17 cubetas de agua y del depósito B se sacan 12 cubetas de agua, quedando los dos depósitos con la misma cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua cabe en cada cubeta? [29].

Estudiante A

Contexto: “Dos depósitos con volumen de agua diferente se les saca agua utilizando cubetas y se quiere saber la cantidad de agua que cabe en cada cubeta”
Información: “Capacidad del depósito A, capacidad del depósito B y cantidad de cubetas que se sacan de cada uno”.
Qué piden encontrar: “Cantidad de agua que le cabe a cada cubeta”.
Condiciones del problema: “Que los depósitos queden con la misma cantidad de agua”.
Te falta información: “No”.
Te sobra información: “No”.
Define tus variables (con unidades): “x = cantidad de agua que le cabe a cada cubeta”.
Enuncia con tus propias palabras el problema: “Tenemos dos depósitos de agua. Al primer depósito le caben 140 litros y al segundo le caben 100 litros. Al primer depósito se le saca 17 cubetas de agua y al segundo se le sacan 12 cubetas de agua de manera que le queda la misma cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua le cabe a cada cubeta?

Observaciones: El estudiante no entendió que es el contexto, no identifica las unidades de la variable y por último no redacta con sus propias palabras el problema, ya que escribe el mismo enunciado que le dimos.

Estudiante D

Contexto: “Calcular la capacidad de agua que tiene la cubeta”.
Información: “La capacidad de los contenedores y cuantas cubetas de agua les quitan, quedando con la misma cantidad de agua en los dos contenedores”.
Qué piden encontrar: “La capacidad de la cubeta”
Condiciones del problema: “Que ambos contenedores de agua queden al mismo nivel de agua”.
Te falta información: “No, tienen información necesaria”.
Te sobra información: “No, está la información necesaria para hacer los cálculos”.
Define tus variables (con unidades): “x = cantidad de agua que le entra a la cubeta”
Enuncia con tus propias palabras el problema: “Se tienen dos depósitos de agua, el primero tiene 140 lt de agua y el segundo 100 lt de agua. El primer depósito le saca 17 cubetas de agua y al segundo 12 cubetas de agua. Por último, nos piden calcular la capacidad de la cubeta”.

*Observaciones***:** No identifica el contexto lo confunde con lo que le piden, no identifica las unidades de las variables igual que el estudiante anterior no formula el problema simplemente vuelve a escribir el enunciado.

Estudiante E

Contexto: “Solo se quiere saber la cantidad de agua que le cabe a cada cubeta”.

Información: "que hay dos depósitos, al depósito A le caben 140 L, al b 100 litros de agua, al A se le sacan 17 cubetas y al B 12 cubetas de agua al final los dos depósitos quedan en la misma cantidad".
Qué piden encontrar: "Cuántos litros de agua caben en una cubeta".
Condiciones del problema: "Qué, haciendo la diferencia de cubetas, la cantidad de agua que sobre en cada depósito sea la misma".
Te falta información: "No"
Te sobra información: "No"
Define tus variables (con unidades): "x = cantidad de agua de cada cubeta".
Enuncia con tus propias palabras el problema: "Se tienen dos tanques de agua, el tanque A tiene 140 litros y B tiene 100 litros, al tanque A se sacan 17 cubetas de agua, al tanque B se sacan 12 cubetas de agua, quedando los tanques con la misma cantidad de agua ¿Cuánta agua cabe en cada cubeta?".

Observaciones: No identifica el contexto, no identifica las unidades de las variables, igual que los alumnos anteriores no formula al final el problema con sus propias palabras.

.

Problema 2

"En una estantería hemos colocado una colección de novelas. En la colección hay dos tipos de novelas por su anchura: novelas gruesas y novelas delgadas. Si ponemos juntas una novela gruesa y dos delgadas, ocupan 18 cm. de la estantería, la novela gruesa es 3cm más ancha que la delgada ¿Qué anchura tiene cada una de las novelas?" [29]

Estudiante A

Contexto: "Una biblioteca donde están estantes con dos tipos de novelas gruesas y delgadas"
Información: "Hay dos tipos de novelas" "Una gruesa y otra delgada" "La gruesa es 3 cm mayor que la delgada" "Al juntar una gruesa y una delgada suman 18 cm"
Qué piden encontrar: "Ancho de cada una de las novelas"
Condiciones del problema: "Al sumar las novelas gruesas con dos delgadas suman 18 cm" "La anchura de la novela gruesa es de 3 cm mayor que la delgada" "Hay dos tipos de novelas"
Te falta información: "Es suficiente la información"
Te sobra información: "No"
Define tus variables (con unidades): "x= Anchura de la novela gruesa en cm" " y = Anchura de novelas delgadas en cm"
Enuncia con tus propias palabras el problema: "En repisas de una biblioteca se han colocado dos colecciones de novelas, estas son acomodadas por el ancho que tienen. Si en una repisa se pone una novela gruesa y 2 delgadas abarcan 18 cm. La bibliotecaria necesita saber los dos tipos de novelas, ella sabe de antemano que la gruesa es 3 cm más ancha que la delgada ¿Qué anchura tiene cada novela?

Observaciones: El estudiante comprende el problema desde un inicio ya que contesta bien todas las preguntas, define bien sus variables, identifica las unidades de las mismas y logra enunciarlo con sus propias palabras.

Estudiante D

Contexto: "Una biblioteca"
Información: "Que hay dos tipos de novelas" "Que una novela es más ancha que la otra" "Que la gruesa es más 3 cm más ancha que la delgada" "Que la suma de una revista gruesa y 2 delgadas suman 18 cm"
Qué piden encontrar: "El grosor de cada novela (ancho)"
Condiciones del problema: "que al sumar el ancho de 2 revistas delgadas y una gruesa suman 18 cm" "que la gruesa es de 3 cm más ancha de la delgada" "que hay dos tipos de revista una ancha y una delgada"
Te falta información: "No, es suficiente información"
Te sobra información: "No, no falta"
Define tus variables (con unidades): "x = grosor de la novela más ancha en cm y = grosor de la novela más delgada en cm
Enuncia con tus propias palabras el problema: "Juan estaba acomodando sus cajas de video juegos, tenía dos tipos de cajas una con anchura más gruesa que la otra. Al acomodarlas en una estantería se dio cuenta que, si colocaba una caja gruesa y dos delgadas ocupaban 18 cm de ancho, teniendo en cuenta que la gruesa tiene 3 cm más que la delgada entonces se pregunta ¿Cuánto mide cada caja de ancho?

Observaciones: El estudiante identifica bien el contexto, contesta bien todas las preguntas y hasta logra reformular el problema en otro contexto.

Estudiante E

Contexto: "Todo sucede en una biblioteca"
Información: "Hay dos tipos de novelas" "Una gruesa y una delgada" "El ancho de la gruesa es 3 cm mayor que la delgada" "La suma de una novela gruesa + 2 delgadas es 18 cm?
Qué piden encontrar: "El ancho de cada tipo de novela"
Condiciones del problema: "Que la suma de una novela gruesa + dos delgadas es de 18 cm que la novela gruesa es de 3 cm más ancha que la delgada"
Te falta información: "Es suficiente la información"
Te sobra información: "No se"
Define tus variables (con unidades): "x = ancho de las novelas gruesa en cm" "y = ancho de las novelas delgadas en cm"
Enuncia con tus propias palabras el problema: "Existen dos tipos de novelas una gruesa y otra delgada. Si ponemos una novela gruesa y dos delgadas sobre una mesa estas abarcaran 18 cm, pero la novela gruesa es de 3 cm más ancha que la delgada ¿Cuánto de ancho tiene cada una de las novelas?"

Observaciones: El estudiante comprende el problema lo va describiendo al ir contestando cada una de las preguntas que se le formula, identifica las variables con unidades y por último redacta en sus propias palabras el problema, aunque el nuevo contexto que utiliza no es muy adecuado, sobre todo por el nivel en el que se encuentra.

Problema 3

"El interior de un recipiente de fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse de plomo. Si el volumen del recipiente es de 32 litros ¿Cuáles deben de ser sus dimensiones para que sea mínima la cantidad de plomo?" [29].

Estudiante A

Contexto: "En una industria tienen un recipiente de capacidad de 32 L"
Información: "La base del recipiente es cuadrada" "capacidad del recipiente es de 32 L"
Qué piden encontrar: "Las dimensiones del recipiente"
Condiciones del problema: "No se"
Te falta información: "Me hace falta información, necesito las dimensiones del recipiente"
Te sobra información: "No me imagino"

Define tus variables (con unidades): "x = base de la figura en m" "y = altura de la figura en m"
Enuncia con tus propias palabras el problema: "En un recipiente con capacidad de 32 L. se quiere llenar de plomo porque lo ocuparan en un trabajo ¿qué dimensiones debe tener este para que la cantidad de plomo sea mínima?

Observaciones: El estudiante no comprende el problema, de las observaciones que anotamos cuando trabajaron, este estudiante en este problema hizo muchas preguntas acerca de las palabras que no conocía, además dice que le falta información y ya había dicho que esa información eran precisamente las preguntas, lo que él estaba buscando como resultado, la redacción que hace está mal hecha ya que dice que quieren rellenar el recipiente y eso sería cálculo del volumen y no es lo que pide el problema.

Estudiante D

Contexto: "Es un recipiente al cual quieren ponerle una capa de plomo"
Información: "que tiene el fondo cuadrado con un volumen de 32 lt"
Qué piden encontrar: "Las dimensiones del recipiente"
Condiciones del problema:
Te falta información: "La forma del recipiente"
Te sobra información: "No sé ni que tengo que hacer"
Define tus variables (con unidades): "No entiendo el problema"
Enuncia con tus propias palabras el problema: "no entendí el problema"

Observaciones: El estudiante no comprende el problema ya que dice que no le dan la forma del recipiente e implícitamente esta esa información en el problema y un alumno de ingeniería ya la debe de identificar. Al final el mismo reconoce no entender el problema.

Estudiante E

Contexto: "Ocurre en un recipiente de fondo cuadrado"
Información: "El recipiente tiene forma cuadrada" "El recipiente está abierto de arriba" "El volumen es de 32 L del recipiente"
Qué piden encontrar: Las dimensiones para que sea la mínima cantidad de plomo"
Condiciones del problema: "
Te falta información: "Si el volumen del plomo"
Te sobra información: "no sé hasta que haga los cálculos"
Define tus variables (con unidades): "x = el largo del recipiente en m" "z = alto del recipiente en cm"
Enuncia con tus propias palabras el problema: "No entendí el problema"

Observación: El estudiante no entiende el problema en sus respuestas lo podemos ir viendo, dice requerir una información (volumen del Plomo) que no lo requiere, no define bien las variables ya que habla del largo del recipiente y no queda claro a que le llama "largo del recipiente", finalmente el mismo reconoce no comprender el problema.

V. CONCLUSIONES

Observaciones Generales del problema 1: Este problema que se resolvía con una sola ecuación lineal es un problema de nivel de secundaria y además significativo para los alumnos por lo que deberían de entender el contexto bien por el nivel en el que se encuentran sin embargo no lograron redactarlo con sus propias palabras ninguno de los participantes, ninguno les pone unidades a las variables, y por sus respuestas el problema no está muy claro todavía para ellos.

Observaciones Generales del problema 2: Este problema es de nivel secundaria, los tres participantes lo comprenden saben explicar el contexto, los datos que les dan, la información, identifican bien las variables con unidades y los tres logran enunciarlo con sus propias palabras y uno hasta cambia completamente el contexto.

Observaciones Generales del problema 3. Este problema no lo comprendió ninguno de los tres estudiantes, sin embargo, es un problema de máximos y mínimo que el estudiante ya debería saber resolverlo. Este problema realmente ellos mismos manifestaron no entenderlo.

En general no identificamos que exista un proceso consciente de comprensión del propio razonamiento (metacognición) de los estudiantes como lo menciona [19] lo que indica que no comprenden los problemas en la mayoría de los casos a pesar de que son problemas de nivel secundaria y otro de bachillerato. Y por supuesto no existe una relación entre la tarea y el estudiante como nos dijo [20].

Les hace falta lectura de comprensión ya que en las preguntas no había nada referente a este tema, pero ellos se paraban a preguntar mucho "que dice aquí", "no entiendo aquí que me quieren decir" "esa palabra que quiere decir".

Por lo que nosotros recomendamos que los tres estudiantes permanecieran en otro curso de comprensión de problemas, ya que en general les hace falta realizar más trabajo en esta fase de las propuestas por [1], para resolver problemas, antes de pasar al siguiente curso que es la fase de planeación y además propusimos que tomen un curso de lectura de comprensión.

REFERENCIAS

[1] *Pólya, G. How to solve it. Princeton University Press, Princeton. 1945.*

[2] *Alfaro, C. Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. Cuaderno de investigación y formación en educación matemática. Año 1. Núm. 1. 2006*

[3] *Almeida, B. y Almeida, J.N. Comprender antes que resolver. Revista Atenas. Vol. 3 Núm.39. 48-63. 2017*

[4] *Blanco, L.J. y Caballero, A. La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores. Manuales UEX. Universidad de Extremadura: España. 2015*

[5] *Cortés, J.C., Hitt, F. y Saboya, M. (2016). Pensamiento aritmético- Algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y Tecnología en la escuela secundaria. Bolema. v. 30, n54, p240-264.*

[6] *Díaz, J.A. Los métodos de resolución de problemas y el Desarrollo del Pensamiento. 2018*

[7] *Gallardo, J. y Quintanilla, V.A. El circulo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 97-122. 2019*

[8] *Perez, Y. Y Ramirez, R. Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos Teoricos y metodologicos. Revista de Investigación no.73, vol. 35. 2011*

[9] *Pino, M. y Almeida, B. Enseñar procedimientos para resolver problemas de matemática y física: reto de la didáctica en la formación de profesores. En B. Almeida. (Presidencia). Memorias de matecompu 2018*

[10] *Rodríguez, M., Gregori, P. Riveros, A. y Aceituno, D. Análisis de las estrategias de la resolución de problemas en matemáticas utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. Educación matemática. Vol.29 no. 2. 2017*

[11] *Santos, L.M. La resolución d problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas. 2015*

[12] *Tapia, I.R. Evaluación de habilidades para la resolución de problemas de matemáticas en estudiantes de bachillerato, a partir del modelo heurístico de Polya. Revista RedCA Vol.2 Num.4. p. 98-110. 2019*

[13] *Txabarri, J.G. La resolución de problema aritméticos – algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas.*

Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 20(2). Pp.167-192. 2017

[14] Reforma integral del Bachillerato. Programas de estudio de matemáticas para los bachilleratos Tecnológicos. Coordinación Sectorial de desarrollo académico. 2009

[15] Ballester, S.H. Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas. Tomo I. 1ª. Edición. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. 2001

[16] Espinoza, J. La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de Matemática. Revista científica pedagógica Atenas. Vol 3 (39). pp 64-79. 2017

[17] Kantowski, M. G. Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), Problem Solving in School Mathematics. NCTM Yearbook 1980. 195–203. Reston (VA): Council. 1980

[18] Mancera, E. Saber matemáticas es saber resolver problemas. Editorial Iberoamericana. México. 2000

[19] Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas. 1976

[20] Santos, L.M. La resolución d problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas. 2015

[21] Schoenfeld, A. H. Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press. 1985

[22] Vila, A. y Callejo, M. L. Matemáticas para aprender a pensar. Editorial Narcea. Madrid, España. Mayer, R. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona, Paidós. 2004

[23] Gerofsky, S. A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics, 16, 36-45. 1996

[24] Mayer, R. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona, Paidós. 1986

[25] Rivera, L.M. Primeros Auxilios para resolver Problemas Verbales en tus cursos de Matemáticas. Universidad Interamericana de Puerto Rico - Recinto de Ponce. 2004

[26] Zamora, J. Propuesta de método de resolución de problemas matemáticos en educación primaria. Universidad Jaume. tesis de grado. 2017

[27] Hernández, J., Socas, M. I seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas. Revista suma. 1994 pp. 82-90.

[28] Espinosa, M.E., Alor, R. y Villalobos, J. del C. Resultado del diagnóstico previo a un curso sobre resolución de problemas verbales. Reporte del IV Taller de didáctica y aplicaciones de las ciencias Básicas. Cuba. 2021.

[29] Fernández, F. Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 1997

.

.

EL ENFOQUE GENÉTICO INDIRECTO APLICADO A LA COMBINATORIA

Octavio Giraldo Mahecha
Universidad Antonio Nariño, octavio.giraldo@uan.edu.co

Abstract— This article presents the development and conclusions of the application of an activity, designed taking into account the genetic method proposed by Otto Toeplitz, in it you can observe the position of the researcher in the face of the need to design activities and make use of different methodologies that potentiate the learning of combinatorial thinking. Although the design of activities designed in the genetic method are a challenge, it can be evidenced, the conceptual and procedural progress obtained by the students in the development of the exercises.

Keywords— Genetic method, history of mathematics, combinatorics, problem solving.

Resumen— El presente articulo presenta el desarrollo y conclusiones de la aplicación de una actividad, diseñada teniendo en cuenta el método genético propuesto por Otto Toeplitz, en él se puede observar la postura del investigador frente a la necesidad de diseñar actividades y hacer uso de diferentes metodologías que potencialicen el aprendizaje del pensamiento combinatorio. Aunque el diseño de actividades pensadas en el método genético son un desafío, se puede evidenciar, el avance conceptual y procedimental obtenido por los estudiantes en el desarrollo de los ejercicios.

Palabras Claves— Método genético, historia de las matemáticas, combinatoria, resolución de problemas.

I. Introducción:

El presente artículo explica las características del método genético en el sentido de Otto Toeplitz y su aplicación en la didáctica de las matemáticas, en particular en la combinatoria, además se analiza las estrategias que utilizan los estudiantes para generalizar y cómo este método motiva el aprendizaje de las matemáticas.

En la educación básica y media actualmente se presentan diferentes problemáticas como el desinterés de los estudiantes por aprender matemáticas, algunas veces ven las matemáticas como un compendio de fórmulas descontextualizadas y sin sentido que deben utilizarse para resolver ejercicios (considérese un problema en el que se proporcionan algunos datos y se realiza una pregunta sin relación a ellos y seguramente algunos estudiantes "más de los que se espera" responderán la pregunta), esto hace que los estudiantes tengan bajo rendimiento como se evidencia en las pruebas estandarizadas. Por ello es importante buscar alternativas que permitan abordar algunas de estas problemáticas e intentar minimizarlas; en el desarrollo del artículo se mostrará que el método genético presenta potencialidades en relación con las problemáticas descritas.

II. Antecedentes:

Para la realización del presente estudio, se tuvieron en cuenta algunas investigaciones, frente al uso del método genético y su impacto en la motivación del aprendizaje de las matemáticas:

Martinez, O. [4]. En su tesis de maestría utiliza el método genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primer y segundo grado, para esto el autor diseña y aplica 5 guías (tres para el grado octavo y dos para el grado décimo) y concluye que el uso permanente del método favorece el rendimiento académico de los estudiantes y dentro de las recomendaciones propone desarrollar investigaciones dirigidas a la utilización del método genético como medio y recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

Beyer, H y Beyer, M [1]. Realiza una descripción del método genético y su aplicación en didáctica de las matemáticas y propone un ejemplo en el tema de límites de una sucesión y lo resuelve utilizando los procesos de Arquímedes; al finalizar concluye que este método es de gran tradición en Europa y que puede ser aplicado en todos los niveles de enseñanza (primaria, secundaria, bachillerato y superior), además, en una colaboración la UNACH, el CONACyT y la UNAM, han creado el curso masivo en línea llamado "Matemáticas para todos" teniendo en cuenta el uso del método genético y esta disponible para consulta en www.cursos.unach.mx.

Otto Toeplitz en su libro Das Problem der Universitaetsvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren, Schulen publicado en 1927, describe el método genético, como un método de enseñanza alternativo al sistema axiomático, en el que prima la génesis de los conceptos matemáticos, es decir, se utiliza la historia para motivar la enseñanza y el aprendizaje. Toeplitz en su escrito, distingue dos variantes del método: el método genético directo, que muestra la historia del desarrollo de los conceptos matemáticos y que sugiere hacer uso de las dificultades que se presentaron para demostrar que los errores y las hipótesis infructuosas hacen parte de la construcción histórica de los conceptos matemáticos; y el método Genético indirecto, donde se analizan dificultades, confusiones y problemas a lo largo del desarrollo histórico de cada concepto matemático y se crea la discusión para la correcta solución.

En el estudio ICMI Fauvel, J. y van Maanen, J. [2] describen el enfoque genético indirecto al calculo en el sentido de Otto toeplitz y que fue propuesto en el Memorandum del 62 como respuesta a las nuevas matemáticas. También señalan que Fisher en los años 70 (EE. UU.) redescubre el método genético, proponiendo un enfoque heurístico con "exactitud subsiguiente" (1978) en contrariedad con la idea de las nuevas matemáticas de colocarlo en forma rigurosa y propone que, en los niveles iniciales, el desarrollo de los conceptos, teoremas y algoritmos se trabajen en el nivel más bajo posible, para implementar el rigor después

Mosvold, R [5]. describe el desarrollo histórico del principio genético en educación matemática desde Bacon y Comenius teniéndolos en cuenta como las primeras versiones del principio genético, pasando por la influencia de filósofos y teóricos como Descartes, Hobbes, Spinoza y Leibniz, toma los descubrimientos de matemáticas de Arnauld y Clairaut, pasando por un desarrollo adicional con Lindner y Mager, tiene en cuenta las consideraciones de Felix Klein y Benchara Branford, se refiere a Otto Toeplitz (1927) quien acuña el término método genético y hace referencias a expresiones modernas del principio genético incluyendo la tradición Noruega con el principio genético. En el artículo el autor indica que para no generar confusiones el término genético es entendido desde la palabra griega génesis que se refiere a creación o desarrollo, para Mosvold el principio genético histórico tiene como objetivo guiar a los estudiantes desde el conocimiento básico al complejo de la misma manera que la humanidad ha progresado en la historia de las matemáticas, además propone que el principio genético se centra en el desarrollo de conceptos.

III. Metodología

El estudio se realizó con estudiantes de grado décimo del colegio INEM Francisco de Paula Santander IED, la población seleccionada fueron seis estudiantes voluntarios (dada la situación de pandemia el número de estudiantes con conexión a internet es limitado), se diseñaron y aplicaron tres actividades en cinco espacios de clase “virtuales” (entre 45 y 70 minutos cada una) mediadas por la plataforma Meet, en cada actividad las preguntas se proponían conforme se llegaba a la solución una seguida de otra.

Los espacios se desarrollaron teniendo en cuenta el método genético en el sentido de Toeplitz, proponiendo una actividad inicial en contexto histórico que permitiera a los estudiantes promover la discusión, logrando encontrar la respuesta correcta; después se propuso una actividad de un contexto cotidiano cercano, en donde los estudiantes tenían la opción de usar las conjeturas generadas en la actividad anterior. En este espacio se observó que los estudiantes hicieron uso del pensamiento combinatorio, sin tener experiencias formales.

La intención con las dos primeras actividades era que los estudiantes se enfrentarán a los problemas haciendo uso de su creatividad, sin elementos adicionales; luego se presentó la teoría formal con la simbología actual, que en ese momento estaba dotada de sentido para los estudiantes y por último una actividad en un contexto de la realidad de los estudiantes. En todas las sesiones los estudiantes tuvieron las cámaras y los micrófonos abiertos permitiéndoles argumentar o refutar las ideas propias y de otros.

IV. Resultados

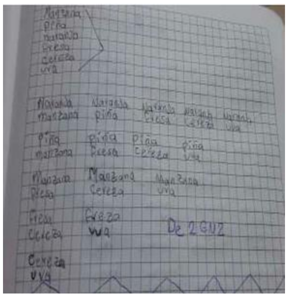
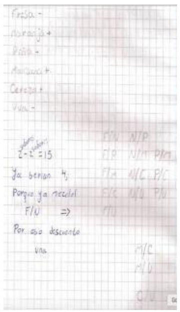
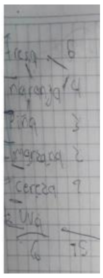
Actividad inicial

En el siglo VI a. C., en la antigua India, el médico Sushruta asegura en el Susruta-samhita que es posible formar 63 combinaciones a partir de 6 sabores distintos, tomados de uno en uno, de dos en dos y así sucesivamente.

Verifique o refute la afirmación de Sushruta contestando Cuántas combinaciones a partir de seis sabores distintos se pueden hacer:

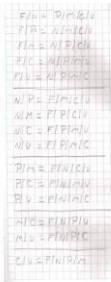
¿tomados de uno en uno?
¿tomados de dos en dos?
¿tomados de tres en tres?
¿tomados de cuatro en cuatro?
¿tomados de cinco en cinco?
¿tomados de seis en seis?

Los estudiantes toman decisiones y realizan conjeturas

Es de notar que los estudiantes utilizan diferentes estrategias para abordar el problema, inicialmente intentaron relacionar los sabores con amargo, dulce, entre otros, pero luego abandonaron esa idea y decidieron utilizar frutas para los sabores, en ese proceso una de las frutas fue manzana y otra que pensaron elegir fue mandarina, sin embargo, un estudiante señaló que para distinguir mejor las combinaciones deberían usar frutas con diferentes iniciales, así que decidieron utilizar las frutas (fresa, naranja, piña, manzana, cereza y uva). Se puede evidenciar que utilizan diferentes estrategias, algunos estudiantes utilizan las iniciales, otros escriben completo sin embargo un estudiante cuenta las posibilidades sin necesidad de escribir en este caso las parejas, el identifica que para la primera fruta que escribió (fresa) le corresponde una de las otras 5 frutas, cuando mira las parejas con la segunda fruta (naranja) analiza que puede formar parejas con otras 4 frutas (dado que ya la emparejo con fresa en el primer paso) y sigue su idea y encuentra la respuesta como 5+4+3+2+1=15





Se puede evidenciar que los estudiantes siguen utilizando sus estrategias para realizar los grupos de tres sabores, siguiendo un orden específico para no repetir grupos de sabores y encuentran en total 20 grupos, sin embargo, cuando comienzan a mirar los grupos de cuatro sabores en la discusión un estudiante sorprende afirmando que el número de grupos que aparece es 15, cuando se le pide argumentar su afirmación él explica que cuando se forman grupos de cuatro sabores de seis posibles en cada grupo se deben quitar dos sabores y eso ya lo tenemos resuelto cuando agrupamos dos sabores y así escribe los grupos (en terminología formal el conjetura que C(6,2)=C(6,4) que es correcto), además afirma que calculando los tres primeros es suficiente, con esta idea terminan el problema con 5 sabores (en total 6 grupos) y con 6 sabores (un grupo) y confirman la afirmación inicial 6+15+20+15+6+1=63

Problema 2

Un grupo de estudio de matemáticas esta conformado por 8 estudiantes,

¿De cuántas maneras se pueden escoger dos estudiantes de ese grupo para realizar una sustentación?
¿De cuántas maneras se pueden escoger tres estudiantes de ese grupo para realizar una sustentación?

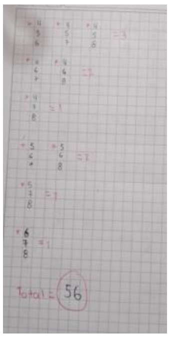
¿Puede conjeturar una fórmula para el número de formas en que se pueden escoger 3 estudiantes de un grupo de 10?
¿Qué dificultades presenta?
Suponiendo que Juan, Miguel y Ana conforman el grupo escogido ¿Cuántas organizaciones representan el mismo grupo? (ej: Miguel, juan y Ana representa el mismo grupo)
¿Puede conjeturar una fórmula para el número de formas en que se pueden escoger 3 estudiantes del grupo de estudio de n?

Se realiza la primera pregunta ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos estudiantes de ese grupo para realizar una sustentación? los estudiantes comienzan a aportar sus ideas, proponen asignar un nombre a cada estudiante para desarrollarlo de forma similar al problema anterior, sin embargo, acuerdan asignar un número a cada estudiante de los ocho, en el desarrollo del ejercicio algunos estudiantes proceden de forma similar al problema anterior, pero uno de ellos entrega rápidamente una respuesta, “es 28”, cuando se le solicita argumentar su afirmación él responde que lo piensa de manera análoga al anterior, “si voy a organizar grupos de dos, al primero lo puedo agrupar con cada uno de los otros siete, al segundo con cualquiera de los otros seis (por que el primero ya lo agrupe con el), al tercero con cada uno de los otros cinco (por que ya lo agrupe con el primero y con el segundo) y así sucesivamente.

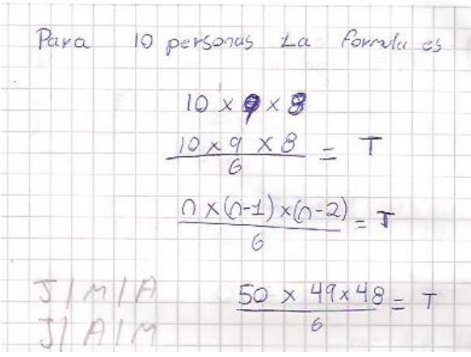
Los estudiantes toman decisiones y realizan conjeturas “7+6+5+4+3+2+1”

Cuando se les propone la pregunta ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres estudiantes de ese grupo para realizar una sustentación? los estudiantes realizan los grupos utilizando un orden específico como se muestra en la figura con el ánimo de no repetir los grupos





Cuando se realiza la pregunta ¿Puede conjeturar una fórmula para el número de formas en que se pueden escoger 3 estudiantes de un grupo de 10?, rápidamente un estudiante responde 10x9x8, sin embargo los otros estudiantes discuten su afirmación dado que se encontraron grupos repetidos, luego se pregunta ¿Qué dificultades presenta? y contestan que existen grupos que se repiten como ya lo habían notado, luego se les propone, suponiendo que Juan, Miguel y Ana conforman el grupo escogido ¿Cuántas organizaciones representan el mismo grupo? (ej: Miguel, juan y Ana representa el mismo grupo), después de un tiempo deducen que son seis grupos y discuten para acordar que se divide entre los grupos que se repiten para encontrar la respuesta correcta, cuando se realiza la pregunta ¿Puede conjeturar una fórmula para el número de formas en que se pueden escoger 3 estudiantes de un grupo de estudio de n? los estudiantes generalizan lo realizado para n estudiantes y realizan un ejemplo para n=5

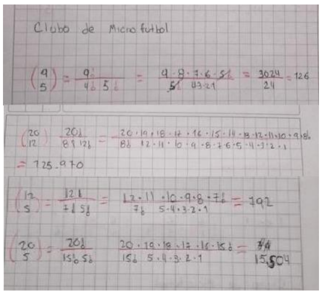
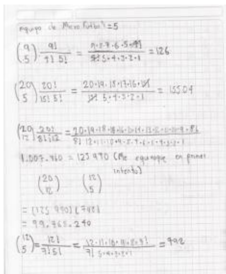


Después de resolver las primeras actividades se describe la teoría formal sobre combinatoria (principios de la suma y la multiplicación, combinaciones), es clave anotar que en ese momento la teoría esta dotada de sentido en la medida que los mismos estudiantes son quienes aportan a la generalización como se mostro anteriormente y luego se propone la ultima actividad.

Problema
De cuántas formas se puede escoger el equipo de microfútbol (de cinco jugadores) para iniciar un partido si:

¿Si el club tiene 9 integrantes?
¿Si el club tiene 20 integrantes?

Si el club tiene 20 integrantes y se inscriben en un torneo en el que solo pueden registrar 12 integrantes en la planilla, ¿de cuántas formas se puede escoger el equipo para iniciar un partido?

El problema fue resuelto de manera adecuada en las dos primeras preguntas, sin embargo, cuando se les propuso la tercera pregunta un estudiante se apresuro a entrega la respuesta como C(20,12)xC(20,5) y los demás estudiantes refutaron su afirmación argumentando que para escoger los cinco que iniciaban el partido no se tenían 20 para escoger sino solo 12, con lo que encontraron la respuesta correcta C(20,12)xC(12,5).

V. Conclusiones

A partir del análisis del desarrollo de las actividades se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- El enfoque motiva a los estudiantes.
- Los estudiantes realizan conjeturas y las defienden con argumentos.
- Los estudiantes debaten las conjeturas de otros con argumentos.

- Se promueve la discusión para la solución adecuada de los problemas.
- Los estudiantes propenden por la generalización de patrones.
- La teoría formal adquiere sentido para los estudiantes.
- El enfoque presenta beneficios en la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria.

Referencias

[1] H. Beyer y M. Beyer. El método genético en la didáctica de las matemáticas. Staobil lekilal ta lekil abtel. Administració n para el desarrollo. No. 14 México, 2018.

[2] J. Fauvel. y J. Van Maanen. History in mathematics education: the ICMI study, Dordrecht: Kluwer, pp. 71-74, 2000.

[3] R. Fisher. Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht, Didaktik der Mathematik 6, Heft 3, pp. 212-226, 1978.

[4] O. Martinez. El método genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primer y segundo grado. Tesis de maestría en Matemática educativa. Universidad de Panamá. 2014.

[5] R. Mosvold. Genesis Principles In Mathematics Education. Telemarksforsking Notodden, 2002.

[6] O. Toeplitz. Das Problem der Universitaetsvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren Schulen, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.36, pp. 90-100, 1927

PROPUESTA PARA CUANTIFICAR LA HABILIDAD LECTORA DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS A TRAVÉS DE UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Emilia López-Iñesta*, Maria T. Sanz**, Daniel Garcia-Costa*** y Francisco Grimaldo****
*Universitat de València. emilia.lopez@uv.es, **Universitat de València, m.teresa.sanz@uv.es,
***Universitat de València, daniel.garcia@uv.es, ****Universitat de València, francisco.grimaldo@uv.es

***Abstract*— In recent years, technology has been integrated into the teaching-learning process, making it possible to analyze the interaction of student-computer and student-content through computer systems, technological environments or digital learning ecosystems. In this work, we design an experiment with a computer system to record data of the student's interactions. This data is used to analyze the student's strategies when they read a math problem statement and answer questions in a digital context. The objective is to determine if the reading time of the problems statements and the analysis of the concepts that imply some difficulty in solving the problems can be used as a measure of the complexity of the statements. The methodology is based on the decomposition of the statement into propositions, the analysis of the concepts involved and the reading time of the propositions allows obtaining results consistent with other approaches that measure the complexity of mathematics problems. The results suggest that the reading time can be used to confirm the complexity of the sentences.**

***keywords*— Mathematics, problem solving, reading comprehension, technology.**

***Resumen*—En los últimos años la tecnología se ha integrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo posible analizar la interacción de estudiante-computador y estudiante-contenido a través de sistemas informáticos, entornos tecnológicos o ecosistemas digitales de aprendizaje. En este trabajo se diseña una experimentación con un sistema informático con el que registrar datos de las interacciones del alumnado para analizar las estrategias que utilizan cuando leen un enunciado de un problema de matemáticas y contestan preguntas en un contexto digital. El objetivo reside en determinar si el tiempo de lectura de los enunciados de los problemas junto con un análisis de los conceptos que implican una dificultad en la resolución de los problemas planteados se puede emplear como una medida de la complejidad de los enunciados. La metodología empleada basada en la descomposición del enunciado en proposiciones, el análisis de los conceptos involucrados y el tiempo de lectura de las proposiciones permite obtener resultados consistentes con otros enfoques que miden la complejidad de los problemas de matemáticas. Los resultados sugieren que el tiempo de lectura puede usarse para confirmar la complejidad de los enunciados.**

***Palabras clave*— Matemáticas, Resolución de problemas, Comprensión lectora, tecnología.**

I. INTRODUCCIÓN

El uso de herramientas relacionadas con las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje ofrece muchas posibilidades. Por un lado, la incorporación de sistemas de gestión del aprendizaje y aplicaciones web ha hecho que se pueda proporcionar materiales y recursos al alumnado en distintos formatos. Por otro lado, existen herramientas como Moodle, Socrative o Kahoo que facilitan la ludificación de la enseñanza y plantear cuestionarios, retos o evaluaciones al alumnado de manera individual o colectiva. Todos estos entornos y plataformas tecnológicas permiten obtener interesantes datos que reflejan la traza de las interacciones de estudiante-computador y estudiante-contenido (López-Iñesta y Sanz, 2021).

En los últimos años, el análisis de datos y la toma de decisiones basadas en evidencias en educación es una cuestión de máxima actualidad en el ámbito de la investigación educativa. De hecho, se puede definir un área de estudio conocida como *Learning Analytics* o analítica de datos en educación como el área que se encarga de medir, recopilar, analizar y presentar datos sobre el alumnado y sus contextos para comprender y optimizar el aprendizaje y los entornos en el que este se produce (Romero, Ventura y García, 2008; Long, Siemens, Conole y Gašević, 2011;).

El uso de entornos tecnológicos y de analítica de datos en educación supone un enfoque actual con el que detectar patrones sobre las estrategias seguidas al resolver una tarea, entender los hábitos de estudio, los materiales consultados o los tiempos que se dedican a las actividades propuestas (Hernández-Lara, Perera-Lluna y Serradell-López, 2019) que se puede complementar con información sobre la asistencia, participación, motivación, etc. (Wong et al., 2019).

En este contexto se presenta este trabajo en el que se emplea un sistema informático con el que se registran las acciones del alumnado cuando están leyendo un texto y han de contestar preguntas en un contexto digital. A través de los datos registrados, es posible calcular una serie de variables como el tiempo empleado en contestar una pregunta o el tiempo de lectura de un texto.

El trabajo se centra en la medición de tiempos de lectura para detectar patrones relacionados con la lectura y la comprensión de enunciados de problemas de matemáticas de alumnado de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Esto se debe a que hay numerosos trabajos que relacionan el desempeño de la resolución de problemas y el nivel de comprensión lectora en estudiantes de todos los niveles (Boonen et al., 2014; Vilenius-Tuohima et al., 2008).

Para mejorar el desempeño del alumnado en la resolución de problemas, es importante hacer hincapié en la lectura de los enunciados. En este sentido, las fases designadas por Pólya en 1945 siguen totalmente vigentes y se relacionan con la definición de lectura de Santiago et al. (2007) que señalan que la lectura se entiende como una actividad de comprensión y producción de sentido en el que hay un proceso de interrogación, participación y actualización por parte de un receptor, produciendo que el lector efectúe una serie de operaciones cognitivas (abstracción, análisis, síntesis, inferencia, predicción, comparación). Así se ponen en juego los conocimientos, intereses y estrategias del lector o lectora, con los aspectos que proporciona el texto, en unas circunstancias determinadas. De esta forma, la lectura se torna una interacción entre el lector, texto y contexto como indica Arroyo (2009).

No existe un consenso en la definición del concepto de comprensión lectora tal y como apunta Jiménez-Pérez (2014). Una de las más utilizadas es la de Martín y Núñez Cortés (2011, p. 7) que define la comprensión lectora como «la habilidad general de comprender, usar y reflexionar sobre las distintas formas del lenguaje escrito con el objetivo de alcanzar un desarrollo personal y social satisfactorio». Esta definición es parecida a la que se utiliza en el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora (*PIRLS, Progress in International Reading Literacy Study*) o el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe *PISA* (*Programme for International Student Assessment*) para estudiantes de 4.º de Educación Primaria o alumnado de quince años, respectivamente

Aunque existen distintos tests estandarizados para la evaluación de la comprensión lectora que se utilizan en el ámbito de la educación como la conocida batería de evaluación de los procesos lectores Prolec -R (Cuetos et al. 2007), cabe notar como señala Ripoll-Salceda (2011, p.15) que «la comprensión lectora es un fenómeno inobservable, y es un fenómeno interactivo: depende de la competencia y los conocimientos del lector, pero también de las características del texto que está leyendo. Por lo tanto, ninguna medida nos va a decir cómo es la comprensión de un lector, sino que nos van a proporcionar una información indirecta a partir de la cual se deberá hacer un juicio sobre cómo es esa comprensión».

Como se puede deducir de los trabajos mencionados, la comprensión lectora es un proceso de interacción que sucede entre lector y texto, que requiere de una serie de capacidades y habilidades y en la que influye el conocimiento previo y la experiencia del lector o lectora.

Existen distintos trabajos que proporcionan clasificaciones sobre las habilidades que son necesarias para leer de forma eficaz. Un ejemplo se tiene en el trabajo de Navarro, que, citando a Cooper, Solé y Puente, (2008) describe las habilidades necesarias para una correcta comprensión:

a. Habilidades y procesos relacionados con ciertas claves para entender el texto, entre las que se encuentran el conocimiento del vocabulario, la identificación de la información relevante en el texto y el conocimiento de la estructura que este pueda tener.

b. Procesos y habilidades para relacionar el texto con experiencias previas, entre las que se encuentran la realización de inferencias y la lectura crítica.

c. Regulación, en la que se menciona a la elaboración de resúmenes, las clarificaciones, la formulación de preguntas y las predicciones.

Otro trabajo sobre habilidades lectoras que resultan necesarias para afirmar que el alumnado es capaz de entender aquello que lee es el de Pinzás (2012).

En esta investigación, se emplea este sistema informático para calcular el tiempo de lectura de un enunciado de un problema y usarlo como una medida adecuada para realizar una aproximación que nos permita cuantificar la habilidad lectora y la comprensión lectora del alumnado y la complejidad de los problemas.

En particular, se presenta una experimentación con la que estudiar la complejidad de los enunciados en problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) en la enseñanza de las matemáticas escolares. Para ello se utiliza una metodología en la que se definen los conceptos clave del enunciado y su relación con las dificultades que se pueden presentar en la resolución.

Los PAEV son enunciados en los que se describe una situación de la vida real en la que se pide determinar una cantidad desconocida a partir de otras conocidas y dado que son la primera actividad de resolución de problemas que aparece en el currículo escolar de matemáticas, se debe poner toda la atención en ella (Puig y Cerdán, 1989).

Es amplio el número de trabajos que tratan estos aspectos (Castro, Rico y Gil, 1992; Daroczy et al. ,2015), sin embargo, en este estudio se pretende que la complejidad del enunciado de un PAEV sea medida a través de la propia habilidad lectora que el alumnado muestra al leer el texto.

II. Material y métodos

A. *Caracterización de la muestra*

Se trata de un estudio cuantitativo descriptivo dónde han participado un total de 70 estudiantes españoles de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria de dos centros escolares, 26 chicas y 44 chicos entre 15 y 16 años. La selección de los centros se ha realizado a través de un muestreo no probabilístico intencional.

B. *Instrumento*

R&L es un sistema informático para realizar investigaciones sobre lectura, comprensión de textos y resolución de tareas asociadas a textos. Se trata de un sistema basado en tecnología web disponible para todos los sistemas operativos al que se puede acceder desde móviles, ordenadores y pantallas inteligentes empleando un navegador cualquiera. Es posible definir experimentos que incluyan imágenes en los textos sobre los que se pueden hacer preguntas. Su configuración incluye una serie de opciones como: el efecto de ocultar parcial o totalmente el texto para impedir una lectura directa como muestra la Figura 1, el tipo de preguntas con respuestas abiertas o de opción múltiple, o el número de intentos para realizar una tarea.

Figura 1. Texto del experimento diseñado en R&L donde distintos segmentos de las preguntas.

La herramienta permite ocultar partes del texto incluidas las respuestas de opción múltiple como se observa en la

Figura 2 y que solo puedan hacerse visibles al presionar sobre ellas, obteniéndose datos del momento en el que el estudiantado lee cada segmento del texto.

Figura 2. Ejemplo de un experimento en R&L donde tanto el enunciado de las preguntas como las opciones de respuesta se han ocultado.

Las interacciones del público participante en los experimentos, permite que el sistema registre cada una de las acciones realizadas: por ejemplo, el instante en que se descubre cada trozo del texto oculto, las transiciones entre enunciados y preguntas, etc. De esta manera, el equipo investigador puede conocer qué parte del texto estaba siendo consultada en la realización de las tareas, en qué momento de la lectura se ha leído un segmento del texto, cuánto tiempo ha permanecido en él, si se ha realizado una lectura en más de una ocasión y si se ha seguido un orden lógico de la lectura del texto, las preguntas y las opciones de respuesta, etc.

R&L incluye funcionalidades muy útiles como la posibilidad de convertir los datos registrados en un conjunto de variables previamente definidas (por ejemplo, el tiempo de lectura de un texto o el tiempo respondiendo a una pregunta).

El uso de R&L garantiza el anonimato de los datos recogidos ya que el alumnado solo proporciona los datos de género, fecha de nacimiento, curso, grupo y lengua materna y/o escolar y un código de centro. Más detalles sobre el R&L se pueden consultar el trabajo de López-Iñesta et al. (2018).

C. Diseño del Experimento

Se diseñan dos tareas ad-hoc que se clasifican según el enfoque semántico (Puig y Cerdán, 1989) como problemas de comparación multiplicativa. En este tipo de tareas hay una función escalar (*I*) que se usa para comparar dos cantidades extensivas (*E*) del mismo tipo de magnitud ($E \times I = E$, relación Schwartz (1981)).

Las tareas (T1 y T2) propuestas constan de tres proposiciones u oraciones y son:

T1. Tenemos treinta caramelos. Si dos tercios son de fresa, ¿cuántos caramelos son de fresa?

T2. Tengo media pizza. Si dos tercios son de barbacoa, ¿qué porción de pizza es de barbacoa?

En ambas tareas, se tiene que, la situación de la pregunta en el texto está al final del enunciado. En cuanto al tipo de oraciones que forman parte de los enunciados, se tienen dos proposiciones que constituyen la parte informativa del problema, mientras que la tercera proposición es parte interrogativa. Así, se tiene que la primera proposición de cada problema es una oración enunciativa, que incluye caracteres alfanuméricos, siendo los valores numéricos o números naturales o fracciones. La segunda proposición de cada problema introduce una oración subordinada y el sintagma "son de".

En estas tareas hay que prestar atención a la manera en la que se presentan los datos y la pregunta de cada tarea que incluyen los siguientes conceptos:

- Treinta caramelos que es un número natural y sobre el que actúa la fracción dos tercios como operador sobre un todo entero.

- Media pizza que es un número fraccionario y sobre el que actúa la fracción dos tercios como operador sobre un todo fraccionario.

- El tipo de pregunta o parte interrogativa en las tareas es distinto ya que en la T1 se interroga por un número natural, mientras que en la T2 se pregunta por una porción que es equivalente a una fracción.

Ambas tareas tienen una característica específica en el uso de la fracción, la fracción como operador (Kieren, 1980), que no es la común en los libros de texto. Existe una cantidad inicial (30 caramelos o media pizza como muestra la Figura 3) que se transforma a través de un operador (dos tercios de) para obtener una cantidad final (caramelos de fresa o porción de pizza). Esta transformación se asocia a la cantidad intensiva *I* (Schwartz, 1981) y a la operación multiplicación.

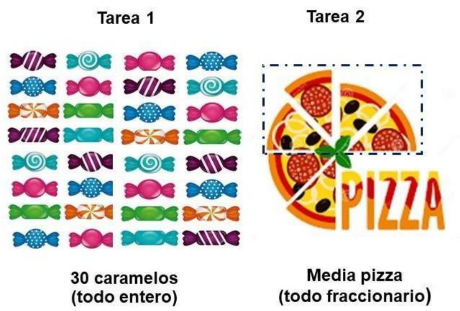


Figura 3. Ejemplo de conceptos que diferencian la complejidad de la Tarea 1 de la Tarea 2.

En definitiva, existe una dificultad en la introducción de los números fraccionarios frente a los naturales (Hart,1984; Gairín y Muñoz, 2005; Perera y Valdemoros, 2009). Esta dificultad aumenta por el hecho de tener que operar sobre el todo entero o fraccionario, además de hacer uso de la fracción como operador.

A la luz de estas consideraciones se plantean en el siguiente apartado una serie de hipótesis en las que se considera la complejidad que aporta cada uno de los conceptos presentes en las tareas.

D. Hipótesis respecto de las tareas diseñadas

Para validar, la manera presentada de calcular la complejidad de un enunciado PAEV a través de la habilidad lectora, es imprescindible la comparación con los trabajos precedentes al respecto de los conceptos matemáticos de los que aquí se hace uso. Así las hipótesis que determinarían aumento en la complejidad de los enunciados serían las que siguen:

H1. El cambio de números naturales a fraccionarios.

Según Perera y Valdemoros (2009), las dificultades comienzan cuando el alumnado se enfrenta al estudio de las fracciones, sin tener conocimientos previos y situaciones de la vida diaria suficientes que presenten problemas relacionados con los números racionales. Gairín y Muñoz (2005), en un estudio sobre libros de textos para la enseñanza de los racionales en educación secundaria en España, afirman que el concepto de número racional queda eclipsado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria.

H2. La introducción del sintagma “son de”.

Autores como Hart (1984) en su investigación ya determinan que el sintagma “dos tercios son de” que se asocia a la fracción como operador puede ser objeto de problemática. Sanz, Figueras y Gómez (2018) también observan las dificultades en alumnado de 15 a 16 años con este sintagma, cuando se presenta de forma literal en ejercicios de simple operatoria, sin un enunciado asociado.

H3. El todo fraccionario frente a un todo entero.

También se detecta el problema en la reformulación del todo: cuando no se presenta una unidad completa, sino fraccionaria de la completa inicial, operar sobre ese segundo todo construido añade problemas a la resolución (Sanz, Valenzuela y Figueras, 2019).

E. Procedimiento para cuantificar la complejidad de un PAEV

La complejidad del enunciado se deriva, en primer lugar, de la complejidad de las proposiciones que lo forman, siendo esta medida a través del tiempo de lectura medio por palabra empleado en cada una de las proposiciones denotado por Pij_t en la Ecuación 1). El tiempo de lectura medio de cada proposición (*j*) en la tarea (*i*) dependerá del tiempo empleado por cada discente al que se hace referencia con Pij_r y del número de discentes que han leído dicha proposición (*n*). Además, dado que el tamaño de cada proposición podría variar, el tiempo será calculado por palabra (k) que conforma cada proposición.

$$Pij_t = \frac{\frac{\sum_{r=1}^{n} Pij_r}{n}}{k} \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

La complejidad global del enunciado será medida como el sumatorio de tiempos medios por palabra de cada proposición involucrada en el enunciado (Ecuación 2).

$$Pi_t = \sum_{j=1}^{l} Pij_t \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

dónde *l* representa el número de proposiciones de la tarea.

III. Análisis y resultados

El rendimiento en las dos tareas descritas es bueno, se tiene que la tasa de acierto de la T1 (94.3%) es superior al de la T2 (62.9%). En la Tabla 1 y Tabla 2, se aplican las fórmulas de la Ecuación 1 y Ecuación 2 para calcular el tiempo medio de lectura por palabra empleado en cada proposición y el tiempo total de cada tarea. Para facilitar la comprensión de los resultados obtenidos, el tiempo se expresa en segundos/palabra (s/p).

Tabla 1: Análisis descriptivo de tiempos por palabra (s/p) por proposición y total de la tarea 1

Tareas	Tarea 1			
Tiempos	Tiempos por proposición			Tiempo total
	$P11_t$	$P12_t$	$P13_t$	$P1_t$
Media	5.39	4.72	3.47	4.42
Mediana	**5.12**	**2.78**	**1.73**	**3.67**
Desv. Típ.	3.63	5.68	5.96	3.23
Mínimo	0.37	0.51	0.04	0.88
Máximo	14.66	36.42	45.95	19.31

Tabla 2: Análisis descriptivo de tiempos por palabra (s/p) por proposición y total de la tarea 2

Tareas	Tarea 2			
Tiempos	Tiempos por proposición			Tiempo total
	$P21_t$	$P22_t$	$P23_t$	$P2_t$
Media	11.55	8.42	7.17	8.46
Mediana	**6.68**	**6.01**	**5.01**	**7.21**
Desv. Típ.	12.45	8.22	9.12	5.91
Mínimo	0.62	0.88	0.27	1.19
Máximo	66.38	49.88	70.65	33.47

La prueba de Kolmogorov-Smirnov confirma que los datos no siguen la distribución normal al obtener el p-valor < 0.05 y se considera la mediana como representante de los tiempos. Se descartan posibles diferencias en los resultados del alumnado debido a las desigualdades geográficas de los centros y económicas de las familias. Se descartan, además, diferencias significativas por género con la prueba de la mediana. Así, se tiene que la situación de partida es comparable, se procede al análisis de los resultados y la verificación de la metodología.

A. Complejidad Tarea 1 y Tarea 2.

Las Tablas 1 y 2 permiten determinar los tiempos, obteniéndose que:

- Cuando la proposición tiene caracteres numéricos naturales (P11t = 5.12 s/p).

- Cuando la proposición tiene caracteres numéricos racionales (P21t = 6.68 s/p).

- Cuando se introduce el sintagma son de y el todo es natural (P12t = 2.78 s/p).

- Cuando se introduce el sintagma son de y el todo es racional (P22t = 6.01 s/p).

Con ellos se responde a las hipótesis H1, H2 y H3 planteadas sobre el aumento de la complejidad de los enunciados en relación a:

H1. El cambio de números naturales a fraccionarios.

Entre P11t y P21t se tiene un aumento del tiempo por palabra, se pasa de 5.12 s/p a 6.68 s/p. Esto implica que el cambio de cantidad de natural a fraccionaria aumenta la complejidad. Para evaluar si dicho aumento es significativo, se realiza la prueba de rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas, se obtiene p-valor = 0.0001 < 0.05.

Se puede afirmar que las diferencias entre los tiempos por palabra son significativas, siendo mayor el tiempo en la proposición P21t.

H2. La introducción del sintagma "son de".

Se compara P21t (6.68 s/p) con P12t y P22t (2.78 s/p y 6.01 s/p, respectivamente). A la vista de los tiempos empleados por palabras en cada proposición se puede concluir que la introducción "son de" no implica un incremento ni al considerar naturales ni fracciones, aunque el tiempo de lectura empleado por palabra es superior en la segunda tarea, cuando el todo es un numero fraccionario. Las diferencias entre los tiempos por palabras son significativas para la T1 (p-valor = 0.004 < 0.05). Para la T2 el p-valor = 0.069 > 0.05 y no se puede afirmar que existan diferencias significativas en los tiempos de lectura.

H3. El todo fraccionario frente a un todo entero.

Al comparar P12t (2.78 s/p), donde el todo es una cantidad natural (treinta) y P22t (6.01 s/p) donde el todo es una parte (media) de un todo inicial, los tiempos se incrementan. Así pues, se entiende que dicha consideración del todo conlleva un aumento de la complejidad. Las diferencias son significativas, al obtener un p-valor = 0.0002 < 0.05.

Con este análisis, se puede determinar que los tiempos medios de lectura que sirven de aproximación al nivel de habilidad lectora, son menores en la T1 que en los de la T2 y, por lo tanto, se confirma una complejidad menor a la tarea. Así, al cuantificar globalmente la complejidad de ambos enunciados, se obtiene 3.67 s/p y 7.21 s/p, respectivamente.

IV. Discusión y conclusiones

En este estudio el uso del sistema informático R&L permite la cuantificación de variables como el tiempo de lectura de un enunciado con la que obtener una medida sobre la comprensión y la habilidad lectora del alumnado que nos facilite el estudio de la complejidad de los PAV.

El desglose del enunciado por proposiciones permite medir la dificultad de cada una de ellas en base al tiempo de lectura y los conceptos involucrados. Esto permite hacer una comparación por conceptos matemáticos dentro de la propia tarea, y no cuantificar la dificultad únicamente por la tasa de acierto (Ivars y Fernández, 2015).

Este trabajo abre toda una línea futura, en la que establecer el uso de entornos tecnológicos como R&L, y la metodología presente, como herramienta para poder realizar un estudio acerca de la complejidad de los problemas aritmético verbales desde la propia comprensión del enunciado, delimitando los conceptos matemáticos que implican un aumento de dicha complejidad.

En este sentido, los resultados marcan la complejidad del sintagma "son de..." que está relacionado con la operación multiplicación, a la vez que con el concepto "fracción de..." (Kieren, 1980) que se empieza a desarrollar en el currículum escolar en cuarto curso de Educación Primaria. En este caso, se incrementa la complejidad cuando dicho concepto se aplica sobre una fracción. Esto puede estar ligado al diseño de las tareas de los libros de texto actuales, donde se introduce el concepto sobre número natural a través de soporte gráfico y considerando el todo discreto (Sanz y López-Iñesta, 2020). Cuando en sexto curso de Primaria queda introducido sobre una fracción, se elimina la representación gráfica y el todo para a ser un continuo. Esto produce que se acabe enseñando el concepto matemático a través de una regla memorística, que asocia dicha expresión con la multiplicación de fracciones y conlleva a posibles errores en cursos posteriores, tal y como demuestran investigadores de Rational Number Project (http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/) o National Assessment of Educational Progress (https://nces.ed.gov/nationsreportcard/).

En cuanto a la medida de tiempo obtenida del entorno R&L, en trabajos futuros, se considerará la posibilidad de implementar otras medidas relacionadas con la habilidad y la comprensión lectora como la velocidad o la fluidez lectora y estudiar su relación con el desempeño en la resolución de PAV.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el soporte de los proyectos GV/2021/110, RTI2018-095820-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), EDU2017-84377-R y UV-SFPIE_PID-1859915.

Referencias

[1] López-Iñesta, E. y Sanz, M. T. (2021). Estudio de dos modelos de aprendizaje semipresencial en educación superior. *Latin-American Journal of Physics Education, 15*(1), 17. http://www.lajpe.org/mar21/15_1_17.pdf

[2] Romero, C., Ventura, S. y García, E. (2008). Data mining in course management systems: Moodle case study and tutorial. *Computers & Education, 51*(1), 368-384. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.05.016

[3] Long, P., Siemens, G., Conole, G. y Gašević, D. (2011). Message from the LAK 2011 general & program chairs. *Proceedings of the 1st International Conference on Learning Analytics and Knowledge (LAK11)*, Banff, AB, Canada, Feb 27-Mar 01, 2011. New York: ACM.

[4] Hernández-Lara, A. B., Perera-Lluna, A. y Serradell-López, E. (2019). Applying learning analytics to students' interaction in business simulation games. The usefulness of learning analytics to know what students really learn. *Computers in Human Behavior 92*, 600-612. https://doi.org/10.1016/j.chb.2018.03.001

[5] Wong, J., Baars, M., de Koning, B. B., van der Zee, T., Davis, D., Khalil, M., y Paas, F. (2019). Educational Theories and Learning Analytics: From Data to Knowledge. En *Utilizing Learning Analytics to Support Study Success* (pp. 3-25). Springer, Cham.

[6] Boonen, A. J. H., Van Wesel, F., Jolles, J. y Van Der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research, 68*(4), 15-26.

[7] Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. y Nurmi, J. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology, 28*(4), 409-426.

[8] Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. Princeton, NJ. [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México. 1965)]. https://doi.org/10.1515/9781400828678

[9] Santiago, Á. W., Castillo, M. C. y Morales, D. L. (2007). Estrategias y enseñanza-aprendizaje de la lectura. Revista Folios, (26), 27-38. https://tinyurl.com/y4cgy6hg

[10] Arroyo, R. (2009). *Desarrollo metacognitivo y sociocultural de la composición escrita: interculturalidad y tecnologías en la*

enseñanza de la escritura multilingüe. Universidad de Granada.

[11] Jiménez-Pérez, E. (2014). Comprensión lectora VS Competencia lectora: qué son y qué relación existe entre ellas. *Investigaciones sobre lectura,* (1), 65-74.

[12] Martín, A. y Núñez Cortés, J. A. (2011). *La enseñanza de la lectura en Europa: contextos, políticas y prácticas*, IFIIE-MEC, Madrid.

[13] Cuetos, F., Rodríguez, B., Ruano E. y Arribas, D. (2007). *Prolec-R. Evaluación de los procesos lectores –revisado*. Madrid: TEA.

[14] Ripoll-Salceda, J. C. (2011). *La concepción simple de la lectura en educación primaria: una revisión sistemática*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra.

[15] Navarro, J. M. (2008). *Estrategias de comprensión lectora y expresión escrita en los textos narrativos.* Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

[16] Pinzás, J. (2012). *Leer pensando: Introducción a la visión contemporánea de la lectura*. Fondo Editorial de la PUCP.

[17] Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

[18] Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 10*(3), 243-253.

[19] Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in psychology, 6*, 348.

[20] López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. (2018). Read&Learn: una herramienta de investigación para el aprendizaje asistido por ordenador. *Magister: Revista miscelánea de investigación, 30*(1), 21-28.

[21] Schwartz, J.L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication and division word problems. (Final report).* Cambridge: M.I.T., Division for Study and Research in Education.

[22] Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En Kieren, T. (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-149). New York: Eric/smeac.

[23] Hart, K. M. (1984). Ratio: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. London: Nfer-Nelson.

[24] Gairín Sallán, J. M., y Muñoz Escolano, J. M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigación en Educación Matemática IX*, 1-11.

[25] Perera, P. B. y Valdemoros, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática, 21*(1), 29-61.

[26] Sanz, M. T., Figueras, O. y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 25*, 257-279.

[27] Sanz, M. T., Valenzuela, C. y Figueras, O. (2019). "De lo que queda", hacia un sistema tutorial inteligente. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (p. 654). Valladolid: SEIEM.

[28] Ivars, P. y Fernández, C. (2015). Aprendiendo a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de las prácticas de enseñanza. El papel de las narrativas. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 45-54.

[29] Sanz, M.T. y López-Iñesta, E. (2020). *Un análisis de problemas de Matemáticas en Educación Primaria.* Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática Universidad Nacional Autónoma de México SUMEM.

Percepciones y creencias en el rendimiento académico de la Matemática en estudiantes de secundaria

Idelso Alamiro Lozano Malca
Universidad Privada del Norte
Cajamarca, Perú.
idelozanom@gmail.com

***Abstract*—The objective of this research is to analyse perceptions and beliefs about the teaching - learning process of mathematics, with the purpose to establish the relationship level with the academic performance of Secondary Education students of three public educational institutions of Cajamarca district during the year 2016. The research was carried out with a non-probabilistic sample for convenience, it was made by 92 fifth grade students of Secondary Education in Juan XXIII, Divino Maestro and San Ramón Public Institutions. The study belongs to the type of applied research, descriptive correlational level, cross-sectional and non-experimental design; It is part of the positivist paradigm, quantitative approach and research line of curriculum, didactics and interculturality. A validated questionnaire was used to collect the primary information about perceptions and beliefs, and for the information on the academic performance there were used the consolidated records of integral evaluation. The research main conclusion is that there is a positive correlational associative relationship between perceptions and beliefs and academic performance during the teaching - learning process of Mathematics.**

***keywords*— Perception, beliefs, academic performance, mathematics.**

***Resumen*— El trabajo de investigación tiene como objetivo, el análisis de las percepciones y creencias sobre el proceso enseñanza – aprendizaje de la Matemática, con el propósito de establecer el nivel de relación con el rendimiento académico de los estudiantes de Educación Secundaria de tres Instituciones Educativas Públicas del distrito de Cajamarca durante el año 2016. Se realizó con una muestra no probabilística por conveniencia, constituida por 92 estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria en las Instituciones Educativas Públicas Juan XXIII, Divino Maestro y San Ramón. El estudio corresponde al tipo de investigación aplicada, de nivel descriptivo – correlacional, de corte transversal y diseño no experimental; se inscribe en el paradigma positivista, enfoque cuantitativo y línea de investigación de currículo, didáctica e interculturalidad. Se utilizó un cuestionario validado para recoger la información primaria sobre las percepciones y creencias, y para la información sobre el rendimiento académico se utilizó las actas consolidadas de evaluación integral. La conclusión principal es que existe relación asociativa correlacional positiva entre las percepciones y creencias con el rendimiento académico durante el proceso enseñanza – aprendizaje de la Matemática.**

***Palabras clave*— Percepciones, Creencias, Rendimiento Académico, Matemática.**

I. INTRODUCCIÓN

Es de suma importancia atender al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, porque en la sociedad en que vivimos, está marcada por el avance científico y tecnológico, y la Matemática está insertada en los progresos de la humanidad. Uno de los objetivos de las instituciones educativas es formar estudiantes (futuros ciudadanos) con dominio de la Matemática, capaces de solucionar problemas en su vida cotidiana y profesional.

Las percepciones y las creencias son factores vinculados a los altos porcentajes de estudiantes con promedios bajos o desaprobados. En las actividades cotidianas – dentro y fuera del aula- se escuchan frases emitidas por los estudiantes: "la Matemática no es mi fuerte", "mi docente de Matemática es muy serio, antisocial", "las clases de Matemática son aburridas", "para qué aprender Matemática si todo lo hace la computadora", "la Matemática no me sirve en mi vida", "la Matemática sólo tiene una solución correcta", etc.; estas críticas y rechazos por un gran número de estudiantes no obedecen únicamente a aspectos relacionados con su naturaleza, sino que son el resultado de una serie de estereotipos que se crean a su alrededor y que se transmiten en el entorno familiar, escolar y social.

Desde el punto de vista de Fernández (2016) "el rol del docente es fundamental en la percepción que tienen los estudiantes hacia la Matemática; es de mucho interés, el género y el conocimiento matemático del docente, acompañado de las actitudes con las cuales imparte la asignatura y cómo se relaciona con los estudiantes. Si el docente logra transmitirle al estudiante confianza en sí mismo y elevar su autoestima, existen posibilidades de vencer el miedo y mejorar su rendimiento académico y "nadie parece hacer nada por cambiar las creencias negativas, se produce una especie de resignación, ante la idea de que la Matemática es un mal necesario; que son feas, difíciles, odiadas, pero hay que aceptarlas; al menos en tanto sean obligatorias; porque hay quienes piensan que una vez terminada la etapa de Educación Secundaria, nunca más volverán a tener contacto con la asignatura, e inclusive eligen su carrera universitaria en función del plan de estudios y los cursos de Matemática que éste contiene (pp.75-76) [9]. Lozano y Tejada (2017) postulan que el docente que enseña Matemática debe aprovechar el saber empírico y orientarlo hacia un nivel superior propio de la actividad científica para lograr las competencias curriculares previstas de pensar y actuar matemáticamente ante situaciones problemáticas de la realidad que vive el estudiante [13]. Por su parte, Sarabia e Iriarte (2011) revelan que los estudiantes de sexo femenino tienden a presentar menores percepciones y creencias de eficacia de su propia competencia Matemática en comparación con estudiantes de sexo masculino, las cuales afectan negativamente al rendimiento académico de la Matemática [16].

El objetivo de la investigación fue analizar las percepciones y creencias sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, con el propósito de establecer el nivel de relación con el rendimiento académico en los estudiantes de Secundaria de tres Instituciones Educativas Públicas del distrito de Cajamarca, año 2016. El análisis de las variables relacionales es importante y necesario para comprender y ser conscientes de ciertas actitudes cognitivas, afectivas y conductuales; fobias culturales; fracasos, etc. que tienen los estudiantes, su postura y representación acerca de la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de la Matemática, así como de la imagen del docente de Matemática. El estudio se fundamenta en la Didáctica de la Matemática, dirigida por la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática (TADM) de Chevallard (1992) [6] y la Teoría de la Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (TIDEM) de Artigue (1995) [1]. La importancia de la TADM radica en introducir cambios en la forma de hacer matemática, es decir, sustituir la pedagogía monumentalista y su eliminación sistemática de las preguntas por la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo; por otro lado, la relevancia de la TIDEM se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza de la Matemática; con el fin de revertir las percepciones y creencias negativas en positivas y así mejorar el rendimiento académico en el Área Curricular de Matemática.

II. MÉTODOS Y MATERIALES

El estudio se realizó con una muestra de 92 estudiantes de quinto grado de Secundaria. La muestra es no probabilística (por conveniencia), constituida por 28 estudiantes mujeres de la I.E. Juan XXIII, 33 estudiantes mixto de la I.E. Divino Maestro y 31 estudiantes varones de la I.E. San Ramón. El estudio pertenece al paradigma positivista, con enfoque cuantitativo y diseño no experimental. Es una investigación aplicada, por su profundidad y nivel es descriptiva-correlacional, por su alcance temporal es transversal o transeccional. En todo el proceso de investigación se usó la técnica del análisis documental y se orientó por los métodos generales: hipotético-deductivo, analítico-sintético y comparativo; y los métodos particulares: descriptivo y estadístico.

Para recoger la información sobre las percepciones y creencias, se utilizó un cuestionario de creación propia tomando como referentes los estudios de Sarabia e Iriarte (2011), Vila y Callejo (s/f), Lara (2010), Gómez (2000) y García (2011). La variable percepción está constituida por la dimensión de actitud con los indicadores cognitivo, afectivo y conductual. En la variable creencias hay 2 dimensiones, la primera es la disciplina matemática con los indicadores de naturaleza de la Matemática, enseñanza de la Matemática y aprendizaje de la Matemática; y la segunda es la imagen docente con el indicador de conocimiento y didáctica. El cuestionario se compone de 70 ítems con enunciados cerrados y categorizados por estimación, con escalamiento de tipo Likert, cada enunciado presenta 5 alternativas de respuesta.

TABLA I
BIPOLARIDAD DE LOS ÍTEMS

Indicador	N° de ítem y bipolaridad	
	Positiva	Negativa
Cognitivo	2, 6, 11, 31, 36, 41,	[illegible]
Afectivo	54, 57, 60, 63, 68,	42, 48, 51, 66, 70
Conductual	3, 7, 9, 18, 23, 29, 44	13, 33, 38
Naturaleza la Matemática	1, 15, 25, 40	5, 10, 20, 30, 35, 45
Enseñanza de la Matemática	28, 37, 43, 55	12, 17, 22, 32, 49, 52
Aprendizaje de la Matemática	27, 47, 53, 59, 62, 67, 69	50, 56, 65,
Conocimiento y didáctica	4, 8, 19, 34, 58, 61,	14, 24, 39, 64

Fuente: Elaboración propia.

La bipolaridad de los ítems se expresa en ideas positivas o negativas, agrado o desagrado, gusto o disgusto, aproximación o alejamiento, sentimiento favorable o desfavorable hacia la Matemática. Los ítems de bipolaridad positiva tienen puntajes en la escala de 5 puntos "en total acuerdo" hasta 1 punto "totalmente en desacuerdo" y los ítems de bipolaridad negativa tienen puntajes en la escala de 1 punto "en total acuerdo" hasta 5 puntos "totalmente en desacuerdo". El cuestionario fue validado por 3 docentes expertos y conocedores en Metodología de la Investigación, Didáctica de la Matemática y Psicología Educativa; y presenta un nivel de confiabilidad de 0,916 medido a través del coeficiente Alfa de Crombach.

Por último, para la recolección de la información sobre el rendimiento académico se usó las actas consolidadas de evaluación integral del nivel de Educación Secundaria de la Educación Básica Regular del año 2016.

III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Los promedios finales obtenidos en el Área Curricular de Matemática por los estudiantes considerados en la muestra dependen de múltiples factores, Erazo (2012) enfatiza que el rendimiento académico "no es un producto que sólo se centra en el estudiante o el docente o en su interacción, es el resultado de múltiples variables de tipo personal y social" (p.170) [8], Castejón (2014) sostiene que "el rendimiento académico está relacionado por diversos factores condicionantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como el factor estudiante (psicofisiológicos, semipermanentes, nivel de desarrollo, inicio de escolarización); el factor de contexto formal (currículum, docente, métodos de enseñanza, grupo-clase, escuela, sistema educativo); y el factor de contexto no formal (familiares y del hogar, sociales, culturales)" (p.18) [4].

La media aritmética de los promedios en las tres Instituciones Educativas es: I.E de mujeres Juan XXIII $\bar{x}= 11{,}21$; I.E. mixta Divino Maestro $\bar{x}= 13{,}12$; I.E. de varones San Ramón $\bar{x}= 15{,}07$. La media aritmética total de los promedios es $\bar{x}= 13{,}13$ de nota; significa que el aprendizaje de los estudiantes de quinto grado en el Área Curricular de Matemática evaluados en escala vigesimal se ubica en la categoría de "aprendizaje en proceso". También, se afirma que los estudiantes de quinto grado son promovidos de manera homogénea, a excepción de un estudiante desaprobado durante los tres trimestres, se justifica en el DCN (2009) en los términos "muchas veces se evalúa de manera homogénea a los estudiantes, no se prevé que cada uno va avanzando según su ritmo, estilo y sus formas particulares de aprender" (p.52) [7]. Sobre las componentes actitudinales (cognitivo, afectivo y conductual), Canales (2014) considera que "los estudiantes con rendimiento académico alto son los que tienen una perspectiva más dinámica de la Matemática, las principales diferencias significativas entre nivel alto y medio radican en la confianza y la competencia personal en Matemática, los de rendimiento académico bajo demuestran menos gusto por la Matemática. Respecto al género, se vislumbran diferencias significativas; los varones manifiestan más creencias positivas; como un valor de mayor confianza y de valoración por la Matemática, las mujeres destacan por la confianza en su competencia personal" (p.98) [3].

TABLA II
COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN Y CORRELACIÓN DE LOS INDICADORES

I.E.	Variable	Dimensión	Indicador	R^2	r
Juan XXIII	Percepciones	Actitud	Cognitivo	60,15	0,776
			Conductual	30,25	0,550
			Afectivo	54,70	0,739
	Creencias	Disciplina Matemática	Naturaleza Matemática	19,86	0,446
			Enseñanza Matemática	16,91	0,411
			Aprendizaje Matemática	22,21	0,471
		Imagen docente	Conocimiento y didáctica	38,54	0,621
Divino Maestro	Percepciones	Actitud	Cognitivo	36,56	0,605
			Conductual	44,33	0,666
			Afectivo	30,60	0,553
	Creencias	Disciplina Matemática	Naturaleza Matemática	12,91	0,359
			Enseñanza Matemática	52,20	0,722
			Aprendizaje Matemática	20,50	0,453
		Imagen docente	Conocimiento y didáctica	37,12	0,609
San Ramón	Percepciones	Actitud	Cognitivo	26,65	0,516
			Conductual	11,36	0,337
			Afectivo	20,35	0,451
	Creencias	Disciplina Matemática	Naturaleza Matemática	11,98	0,346
			Enseñanza Matemática	48,88	0,699

	Aprendizaje Matemática	20,73	0,455
Imagen docente	Conocimiento y didáctica	22,93	0,479

Fuente: Elaboración propia en base a los resultados de la encuesta y del análisis documental.

En la tabla II se lee que el indicador cognitivo (lo que piensa el estudiante) es el valor que los estudiantes atribuyen a la Matemática durante su proceso de enseñanza y aprendizaje. Las creencias sobre la naturaleza, la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; referidas a la visión de utilidad, habilidad, aplicabilidad e importancia de esta materia; la percepción de la misma como materia abstracta, mecánica, memorística y la visión sobre su aprendizaje. Dos I.E. priorizan a este indicador como un fuerte determinante del rendimiento académico: Juan XXIII con una correlación positiva considerable de r = 0,776 y Divino Maestro con una correlación positiva media de r = 0,605. Se confirma que en la TADM, el constructo cognitivo es el de relación personal con el objeto que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.), y en la TIDEM, que el factor cognitivo asocia las características cognitivas del estudiante al cual se dirige la enseñanza.

En el indicador afectivo (lo que siente el estudiante), se analizó las reacciones emocionales hacia las matemáticas y su aprendizaje, que abarca variables como el agrado, desagrado, perseverancia, satisfacción, curiosidad, seguridad, temor, rechazo hacia la disciplina por falta de interés y evaluaciones positivas o negativas. Dos I.E. mostraron altos índices de emoción y motivación hacia la Matemática: en Juan XXIII se obtuvo una correlación positiva considerable de r = 0,739 y en Divino Maestro se obtuvo una correlación positiva media de r = 0,553. Se establece que el componente afectivo determina el rendimiento académico; considerando que los factores que configuran el dominio afectivo son: creencias, emociones y actitudes, y sus interrelaciones; que tienen una fuerte repercusión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Gómez (1998) “el fracaso escolar en la Matemática, depende fuertemente, del rol que juegan los aspectos afectivos durante estos procesos” (p.171) [12].

En dos I.E. el indicador enseñanza de la Matemática tiene una correlación positiva considerable. En Divino Maestro existe un r = 0,722 y en San Ramón existe un r = 0,699. Enseñar Matemática tiene tres fines: a) por su carácter formativo de las matemáticas; b) por su utilidad práctica del conocimiento matemático; y c) por su utilización sistemática de las matemáticas para el resto de las disciplinas (Castro, 2001, p.123) [5]. Godino (2003) da a conocer que se debe identificar las dificultades que los estudiantes tienen en el estudio de la Matemática y reflexionar sobre los tipos de objetos que se ponen en la actividad Matemática: a) problemas y situaciones (cuestiones, ejercicios, etc.); b) lenguaje (términos, expresiones, gráficos, etc.); c) acciones (técnicas, algoritmos, etc.); d) conceptos (definiciones o reglas de uso); e) propiedades de los conceptos y acciones; f) argumentaciones (inductivas, deductivas, etc.). También, atribuye los procesos que se articulan en la actividad de enseñanza y aprendizaje: a) resolución de problemas (que implica exploración de posibles soluciones, modelización de la realidad, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas); b) representación (uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos); c) comunicación (diálogo y discusión entre compañeros y el docente); d) justificación (con distintos tipos de argumentaciones inductivas, deductivas, etc.); e) conexión (establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos); y f) institucionalización (fijación de reglas y convenios en el grupo de estudiantes, de acuerdo con el docente) [11]. Se establece en la TADM que, la enseñanza de la Matemática se relaciona mediante los conceptos, las proposiciones y las demostraciones matemáticas que justifican y explican las técnicas de enseñanza de la Matemática, y en la TIDEM que, la enseñanza de la Matemática se asocia con los procesos de enseñanza de la Matemática y los resultados (rendimiento académico); fundamentalmente en las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza, y el papel que conviene hacerle tomar a las “realizaciones didácticas” en clase, dentro de las metodologías de enseñanza.

Del conocimiento y la didáctica del docente del Área Curricular de Matemática, lo que percibe y cree el estudiante, están fuertemente marcados en dos I.E. con una correlación positiva media. En Juan XXIII con r = 0,621 y en Divino Maestro con r = 0,609. Pajares (1992) destaca que: a) l*as* creencias que poseen los docentes influyen en su percepción y juicio del estudiante, tales creencias afectan a lo que dicen y hacen en clase; b) las creencias juegan un papel en cómo los docentes aprenden a enseñar, en cómo interpretan la nueva información acerca de la enseñanza y el aprendizaje y cómo esta información es trasladada hacia las prácticas de clase; y c) identificar y comprender las creencias de los docentes y, por ende, de los que estudian para serlo, es fundamental para la mejora de la práctica de la enseñanza y los programas de formación inicial de los docentes [14]. Se fundamenta en la TADM que, el conocimiento y la didáctica están centrados en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de praxeología y la relación institucional al objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad Matemática (procesos de enseñanza y aprendizaje) y los objetos institucionales emergentes de tal actividad, y en la TIDEM que, el conocimiento y la didáctica están determinados por la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza y en el plano didáctico, la fuerza de la enseñanza se basa en algoritmos, el status inframatemático del cuadro gráfico en la enseñanza, y la resolución de problemas matemáticos.

Los datos confirman que en las tres Instituciones Educativas existen comportamientos distintos a la hora de encontrar los factores que determinan y correlacionan con el rendimiento académico. En la I.E. Juan XXIII es relevante la dimensión actitud con los indicadores cognitivo y afectivo; y la dimensión imagen docente cuestionado por las creencias que tienen los estudiantes sobre el conocimiento y la didáctica del docente de Matemática. En la I.E. Divino Maestro predomina la dimensión disciplina Matemática dando mayor énfasis al indicador enseñanza de la Matemática; le sigue la dimensión actitud – que por su condición parroquial– se prioriza el indicador conductual; y en la dimensión imagen docente, es el indicador conocimiento y la didáctica. En la I.E. San Ramón son menos claras las variables estudiadas, sin embargo, aparece la dimensión de la disciplina Matemática con cierta prioridad el indicador enseñanza de la Matemática y la dimensión actitud con el indicador cognitivo.

TABLA III
COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES POR CADA INSTITUCIÓN EDUCATIVA

I.E.	Variable	R^2	r
Juan XXIII	Percepciones	48,36	0,695
	Creencias	24,38	0,494
Divino Maestro	Percepciones	37,16	0,609
	Creencias	30,68	0,554
San Ramón	Percepciones	19,45	0,441
	Creencias	26,13	0,511

Fuente: Ibíd.

En la tabla III se observa que el coeficiente de determinación y correlación entre la variable percepciones y rendimiento académico en la I.E. Juan XXIII es (R^2 = 48,36%) y (r = 0,695); y la variable creencias con el rendimiento académico es (R^2 = 24,38%) y (r = 0,494). En la I.E. Divino Maestro, la variable percepciones y rendimiento académico es (R^2 = 37,16%) y (r = 0,609); y la variable creencias y rendimiento académico es (R^2 = 30,68%) y (r = 0,554). En la I.E. San Ramón, la variable percepciones y rendimiento académico es (R^2 = 19,45%) y (r = 0,441); y la variable creencias y rendimiento académico es (R^2 = 26,13%) y (r = 0,511). La diferencia de los coeficientes de determinacion y correlacion significa que – además – hay otros factores que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes en el Área Curricular de Matemática.

TABLA IV
COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN Y CORRELACIÓN POR VARIABLES

Variable	R^2	r
Percepciones	34,99	0,592
Creencias	27,06	0,520

Fuente: Ibíd.

En la tabla IV se observa que el rendimiento académico es explicado por la variación de la variable percepciones con un R^2 = 34,99%; y tiene un el nivel de asociación de r = 0,592 que significa la existencia de una relación asociativa correlacional positiva media. Se confirma que la variable percepción sí es un factor determinante y se relaciona de manera positiva con el rendimiento académico; y se compara con las ideas cualitativas de las percepciones y expectativas de Gairín (1990) “las actitudes del estudiante, respecto al docente vienen matizadas, al igual que lo son para el docente, por la percepción que tiene él y por las expectativas que le genera. La impresión que el estudiante tiene del docente depende del estado superior, de sus características y de su reputación” (p. 150) [10]. Good y Brophy (1984) citados por el mismo autor, señalan que “los estudiantes agobiados por las expectativas bajas y que reciben un trato inadecuado tienen, a veces, toda la razón al atribuir sus rendimientos académicos a factores externos. Si el maestro no piensa que mejorarán con mejor empeño y si no premia ese esfuerzo, hay pocas posibilidades de que capten la relación entre aplicación personal y el éxito en la tarea” (p.97).

También, se observa que el rendimiento académico es explicado por la variación de la variable creencias con un R^2 = 27,06%; y tiene un nivel de asociación de r = 0,520 que significa la existencia de una relación asociativa correlacional positiva media. Se confirma que la variable creencias sí es un factor determinante y se relaciona positivamente con el rendimiento académico; y se compara con las ideas cualitativas de: Callejo y Vila (2003) “las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplican las matemáticas. Las formas de aprender y utilizar las matemáticas configuran las creencias. Los cambios en las prácticas matemáticas pueden modificar las creencias de los docentes y estudiantes” (p.28) [2]. Las creencias se comparten en los distintos ámbitos de socialización: la escuela, la familia, los grupos sociales de iguales, entre los compañeros, etc. Pehkonen y Törner (1996) “las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los estudiantes aprenden y utilizan las matemáticas y, por tanto, pueden ser un obstáculo al aprendizaje de las matemáticas. Los estudiantes que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, que cuando aprenden enfatizan la memoria sobre la comprensión” (p.75) [15].

IV. CONCLUSIONES

Existe relación asociativa correlacional positiva entre las percepciones y las creencias con el rendimiento académico durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria de las tres Instituciones Educativas del distrito de Cajamarca, año 2016. El coeficiente de correlación entre la variable percepción y rendimiento académico es r = 0,592 y entre la variable creencia y rendimiento académico es r = 0,520.

El nivel de rendimiento académico de los estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria en el Área Curricular de Matemática se ubica en la categoría de aprendizaje en proceso, en escala vigesimal.

La relación de asociación correlacional entre las percepciones y creencias con el rendimiento académico sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática es positiva media. Se evidencia en los indicadores de correlación de las variables estudiadas, con coeficientes de correlación que oscilan desde r = 0,337 hasta r = 0,776; confirmando que las mayores concentraciones son en r = 0,50.

V. REFERENCIAS

[1] M. Artigue et al., *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* 1ª ed. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995.

[2] M. Callejo y A. Vila, *Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N° 2. Venezuela, 2003.

[3] M. D. Canales, *Un estudio comparativo de las creencias sobre el aprendizaje en matemática en alumnos de 5° a 8° año de educación básica y su relación con el rendimiento escolar (tesis de maestría).* Universidad del Bío-Bío. Chillán, Chile, 2014.

[4] J. Castejón, *Aprendizaje y rendimiento académico,* España: Club Universitario, 2014.

[5] E. Castro, *Didáctica de la matemática en la educación primaria*, Madrid, España: Síntesis, S. A., 2001.

[6] Y. Chevallard, “Conceptos básicos de didáctica: Perspectivas traídas por un enfoque antropológico”, *en Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, vol. 12, No. 1, pp. 73-112, 1992.

[7] DCN, *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Ministerio de Educación. Lima, Perú, 2009.

[8] O. Erazo, “El rendimiento académico, un fenómeno de múltiples relaciones y complejidades”, *en Revista Vanguardia Psicológica*, Vol. 2, No. 2, Universidad Manuela Beltrán. Bogotá, Colombia, 2012.

[9] S. Fernández, *Evidencias de fobia, miedo o rechazo hacia la matemática en estudiantes de décimo año del colegio El Carmen de Alajuela (tesis de pregrado).* Universidad Estatal a Distancia, 2016.

[10] J. Gairín, *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática.* Barcelona, España: Boixareu Universitaria, 1990.

[11] J. D. Godino et al., *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Matemáticas y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante. Universidad de Granada. España, 2003.

[12] I. Gómez, *Matemáticas y contexto: Enfoques y estrategias para el aula*. Madrid, España: Narcea, S.A. de Ediciones, 1998.

[13] I. Lozano y J. Tejada, “¿Qué debe aprender la escuela del uso de la Matemática en la vida cotidiana de los niños?”, *en ponencia presentada en el VIII CIBEM*. Madrid, España, 2017. http://www.cibem.org/index.php/es/programa/libro-de-actas

[14] M. F. Pajares, “Creencias de los profesores e investigación educativa”, *en Revisión de la investigación educativa*, vol. 62, pp. 307 – 332, 1992.

[15] E. Pehkonen y G. Törner, “Creencias matemáticas y diferentes aspectos de su significado”, *en Revisiones internacionales sobre la educación matemática.* Vol. 28, No. 4, pp. 101-108, 1996.

[16] A. Sarabia y C. Iriarte, *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* 1ª ed. España: EUNSA, 2011.

Alternativa didáctica para introducir el concepto de continuidad puntual en profesores del preuniversitario

Armando Morales*, Angie Damián** y Misael Estrada***
*Universidad Autónoma de Guerrero, armandomorales@uagro.mx** Universidad Autónoma de Guerrero, adamian@uagro.mx*** Universidad Autónoma de Guerrero, m. estrada08@outlook.es

***Abstract*— This paper describes a theoretical-didactic proposal for the assimilation of the concept of continuous function of pre-university teachers. The theoretical and methodological foundation lies in the contributions of the theoretical models aimed at the mathematical knowledge of the teacher, in the processes of assimilation of concepts and in the use of the GeoGebra software. As a result of the development and validation of the system of activities that make up the proposal, the attention to the mathematical content and the methodological treatment of the concept of punctual continuity is highlighted, with this proposal the professionalization of the teacher is contributed and a didactic tool different from the classic presentation for planning and developing your teaching activity on the concept of study.**

***keywords*— Continuous function, assimilation, didactic alternative, heuristic resource.**

Resumen— En este trabajo se describe una propuesta de corte teórico-didáctico para la asimilación del concepto de función continua de profesores del preuniversitario. El fundamento teórico y metodológico recae en los aportes de los modelos teóricos encaminados hacia el conocimiento matemático del profesor, en los procesos de asimilación de conceptos y en el uso del software GeoGebra. Como resultado de la elaboración y de la validación del sistema de actividades que conforman la propuesta, se destaca la atención al contenido matemático y al tratamiento metodológico del concepto de continuidad puntual, con esta propuesta se contribuye a la profesionalización del profesor y se le aporta una herramienta didáctica distinta a la presentación clásica para la planeación y desarrollo de su actividad de enseñanza sobre el concepto de estudio.

***Palabras clave*— Función continua, asimilación, alternativa didáctica, recurso heurístico.**

I. INTRODUCCIÓN

El tratamiento del concepto de continuidad está enmarcado dentro del Cá lculo Diferencial e Integral que se estudia en el preuniversitario y universitario (al menos en Mé xico), al igual que el concepto de limite, derivada, integral, entre otros; el de continuidad juega un papel importante para el desarrollo de otros tó picos del cá lculo, del aná lisis matemá tico y de á reas afines. En el preuniversitario este contenido se trabaja a nivel intuitivo y se aspira esencialmente en ejemplificar y ejercitar las siguientes definiciones:

D1. Una función f es continua en el punto c, si:

1. $\mathrm{f(x)}$ está definida en el punto $\mathrm{x = c}$,
2. $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{c}} \mathrm{f(x)}$ existe,
3. $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{c}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(c)}$.

D2. Una función f es continua en $\mathrm{x = c}$ de su dominio, si $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{c}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(c)}$.

[14] llevaron a cabo una investigación con estudiantes del preuniversitario provenientes de distintos subsistemas educativos de nivel medio superior (preuniversitario) del estado de Guerrero, México, en el que se exploraron sus nociones acerca del concepto de función continua en un punto, al respecto; se arrojaron las siguientes problemáticas: en ellos se identifica una concepción intuitiva global del concepto, dificultades para explicar desde la matemática el significado del concepto, dificultades para definir el concepto utilizando alguna de las definiciones D1 o D2.

Estas problemáticas en torno al concepto de función continua en un punto motivaron dos actividades fundamentales: en la primera se tuvo como objetivo la elaboración de una propuesta didáctica dirigida hacia los estudiantes para la asimilación del concepto de función continua en un punto [14], la segunda, se dirigió hacia la exploración de nociones sobre la función continua en un punto en profesores del preuniversitario. Por tanto, se localizaron a 15 profesores de tres escuelas del preuniversitario ofertadas por distintas instituciones (Universidad Autónoma de Guerrero, Colegio de Bachilleres, CECyTE-Guerrero, México). Al respecto, se distintas dificultades; algunas de coincidieron con las dificultades que presentaron estudiantes, con excepciones particulares.
Algunas investigaciones sobre la continuidad en el campo de la educación matemática ([18], [19], [10], [5], [9], [1], [11], [7], [6]) destacan que las dificultadas se relacionan con la presentación clásica de su tratamiento, se ha identificado que las concepciones de los estudiantes sobre la continuidad puntual dista de la definición formal, y tanto estudiantes, como profesores presentan dificultades en la determinación de la continuidad puntual y para formular la definición en términos del modelo ϵ- δ.
Finalmente, al indagar en los libros de texto clásicos de cálculo diferencial e integral ([16], [20], [21], [13], [17], [22], [12]) para identificar cómo presentan la definición de continuidad puntual y su tratamiento, se resalta que la mayoría de los textos utilizan la definición D1, esta identificación también fue corroborada en la investigación que realizaron [11], y en relación a la presentación del contenido; inician con una idea intuitiva de la concepción global del concepto de función continua, luego, se presentan gráficos de funciones discontinuas, se apoyan en ello para señalar las condiciones que se deben cumplir para que haya continuidad en un punto, se presenta la definición y posteriormente se estudian ejemplos. Como puede destacarse, en los textos referenciados no se plantea como objetivo reflexionar y analizar el significado de la definición de continuidad en un punto, o los problemas que motivaron la elaboración de esta definición, o sobre la evolución de la definición de este concepto.

Objetivo del trabajo

Con este referente, en este trabajo se planteó como objetivo: la elaboración y validación teórica de una propuesta de corte didáctico para la asimilación del concepto de función continua, en profesores del preuniversitario, a través del estudio de las funciones definidas a trozos y mediante el uso del software GeoGebra.

Se comparte la visión de que la enseñanza del cálculo representa un reto para los profesores, ya que trae aparejado múltiples procesos que exigen de una mayor abstracción, poder argumentativo y habilidades demostrativas, en este contexto nos planteamos la posibilidad de que a partir del diseño de secuencias didácticas con actividades claramente articuladas y auxiliándonos de medios tecnológicos, como es el caso del uso del software GeoGebra, se posibilite que en una primera etapa, sean los profesores quienes arriben a conceptualizaciones válidas en relación a la continuidad de funciones, es este caso particular a la continuidad puntual, para luego, potencializar la planeación de su enseñanza.

La propuesta didáctica, espera ser de apoyo al profesorado, en ella se plantea no sólo una secuencia de actividades progresivas conducentes a la asimilación de continuidad, sino que también propone al maestro la dialogación problémica, al conducir el proceso con interrogantes que motivan la reflexión y producción de argumentos, que al ser propios aseguran un aprendizaje significativo.

II. Fundamento teórico y metodológico

Concepciones y modelos teóricos orientados hacia el estudio del profesor

Actualmente se han proyectado distintos modelos teóricos encaminados hacia el estudio del conocimiento del profesor, uno de ellos, trata del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK) [4], este modelo contempla el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Uno de los subdominios del Conocimiento del Contenido Matemático lo compone el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Este subdominio destaca la importancia en que el profesor no sólo conozca resultados matemáticos establecidos, sino también las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas.

Por otra parte, dentro de los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido, se identifica el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática. En este subdominio se engloba el conocimiento de recursos, materiales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. Estos elementos que se describen en los dos subdominios del MTSK puntualizan la necesidad de explorar en el profesor su conocimiento y dominio sobre ellos, que son fundamentales para la planeación de la enseñanza y para desarrollo de actividades de aprendizaje.

Desde la visión propia de los autores de este trabajo, se concibe que en gran parte los subdominios que se identifican en el estudio del conocimiento del profesor, se ven influenciados por las concepciones que adquiere en el medio en donde se forma y en los escenarios en donde ejerce su actividad. En tal dirección, se asume el constructo teórico sobre concepciones del profesor elaborado por [8], en el que establecen que las concepciones del profesor consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o trasmitirlos a sus estudiantes.

Aquí se trata de romper con esas concepciones erróneas que viven en el profesor sobre la noción y definición de función continua en un punto, que influyen en parte, en el cúmulo de dificultades conceptuales que repercuten en su proceso de asimilación.

Asimilación de conceptos

Los conceptos son parte de la estructura matemática y juegan un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático y en la explicación de la realidad objetiva [3]. Gran parte de las dificultades para la comprensión de los contenidos matemáticos que se documentan en las investigaciones radica en la ausencia del tratamiento de los conceptos. En este trabajo se asume que la comprensión de los conceptos exige dos actividades fundamentales la formación y la asimilación (fijación). Bajo esta perspectiva, la presente investigación busca aportar recursos para incidir en la asimilación de conceptos, en particular, en la asimilación de la definición del concepto de función continua en un punto.

Los trabajos de investigación de [15] y [2] coinciden en relación con la concepción de asimilación de un contenido matemático y la conciben como las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones del concepto. Tomando como referente los modelos teóricos y didácticos del conocimiento matemático del profesor y de los aportes, en relación a los procesos de asimilación, en este trabajo se asume como constructo teórico que la asimilación de conceptos matemáticos es un proceso metodológico que cumple las siguientes etapas:

Aproximación al concepto. En esta etapa se reconocen los rasgos esenciales y las condiciones que entran en juego en la definición. De este modo, aquí cabe mostrar ejemplos del concepto que se quiere definir, conocer y utilizar adecuadamente la denominación del concepto, el de función continua en un punto, ya que hay otros conceptos como de continuidad en un intervalo, continuidad uniforme, entre otros. Formalización del concepto. En esta etapa se abarca lo anterior y se encamina a establecer las condiciones para definir el concepto y determinar la consistencia. Identificación del concepto. En esta fase se analizan distintas ejemplificaciones y se pretende que el profesor identifique en qué casos se cumplen las condiciones de la definición. Mostrar ejemplos y contraejemplos y fundamentar por qué no pertenecen a la extensión del concepto, mediante el análisis de su definición. Identificación y Aplicación del concepto. Se proponen ejemplificaciones en los que ponen a prueba la definición, tratar casos especiales y situaciones límite, conocer la relación con los demás conceptos.

En cada una de las etapas del proceso de asimilación los procedimientos heurísticos son una herramienta fundamental ya que constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientar y aportar elementos en los procesos de comprensión y determinación del concepto sobre la base de resolución de problemas [23]. Según el autor, los procedimientos heurísticos se clasifican en principios, reglas y estrategias las cuales interactúan durante los procesos de búsqueda, elaboración y aplicación de la vía de solución.

Software GeoGebra

Forma parte de las herramientas tecnológicas, es un software que favorece la actividad dinámico-visual y que posibilita el tratamiento de contenidos de la matemática en los distintos niveles educativos. A través del enfoque dinámico-visual se favorecen procesos de redescubrimiento de comportamientos numéricos, geométricos y algebraicos, entre otros. Permite la construcción y visualización dinámica de cantidades que varían ortogonalmente y que posibilitan a la vez el estudio de trayectorias (curvas continuas y discontinuas).

El uso de GeoGebra como una herramienta heurística permite hacer evolucionar los procesos que tienen generalización; esto es a través del redescubrimiento de patrones de comportamiento. El software por sí solo no arroja las soluciones a distintas situaciones, es a medida que el individuo manipula, ensaya o lleva a cabo acciones pre elaboradas o teóricamente válidas como redescubre, formula conjetura, plantea estrategias de solución y lleva a cabo la resolución de las actividades o problemas. En tal dirección, es que la representación dinámica-visual y el tratamiento de esta que favorece el software lo convierte en un recurso heurístico para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en este caso la definición de continuidad puntual.

Con lo antes dicho, en este trabajo se asume el software GeoGebra como un recurso heurístico mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje, la actividad dinámico-visual que favorece como la asociación de imágenes-ideas contribuye en la interiorización de los procesos de abstracción sobre los contenidos matemáticos a tratarse, en caso específico, para la asimilación de la definición de función continua en un punto.

III. ORIENTACIÓN METODOLÓGICA

Este trabajo es de corte teórico-didáctico, de corte teórico ya que su desarrollo queda a nivel validación, la cual se lleva a cabo mediante el criterio de expertos. Es de corte didáctico, ya que su elaboración se sustenta en el fundamento teórico y metodológico asumido en este trabajo y en su elaboración se preparan las condiciones para su repercusión en proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático de interés.

Propuesta didáctica y su validación

La propuesta está compuesta por 11 actividades, estas fueron validadas mediante el criterio de expertos. Siguiendo la metodología de desarrollo de la esta vía de validación, al final se consideraron 6 expertos de cuya información se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Información sobre los expertos que validaron la propuesta

Expertos	**Nivel de estudios**	**Especialidad**	**Años de experiencia en docencia e investigación**	**Nivel educativo en el que incide**
A	Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa	Didáctica del Cálculo	12	Preuniversitario y universitario
B	Doctorado en Matemática Educativa	Metodologías y tecnologías para la enseñanza de la matemática, didáctica del cálculo	41	Preuniversitario y universitario
C	Doctorado en Matemáticas	Análisis matemático y su enseñanza	5	Universitario
D	Doctorado en Matemáticas	Análisis matemático y su enseñanza	18	Preuniversitario y universitario
E	Doctorado en Matemáticas	Análisis matemático y su enseñanza	19	Preuniversitario y universitario
F	Doctorado en Ciencias con Especialidad en Educación Matemática	Didáctica del análisis matemático	32	Preuniversitario y universitario

Como puede observarse en el Tabla 1, algunos de los criterios fundamentales que se consideraron para la selección de los expertos es su formación profesional, años de experiencia en docencia e investigación, especialidad y el nivel educativo en el que inciden.

Cuestionario de validación

Se conformó de seis preguntas centrales que tuvieron como objetivo principal validar la propuesta.

1. Considera que la propuesta es adecuada para su implementación con profesores del preuniversitario?

2. En las actividades que se proponen se identifica el contenido matemático del concepto y definición de función continua en un punto?

3. La fundamentación teórica y metodológica de esta propuesta es adecuada?

3. Se identifican las etapas de asimilación en la propuesta de actividades?

4. Metodológicamente se identifica un orden en la propuesta de actividades?

5. La propuesta de actividades se asemeja a una presentación clásica como la que ofrecen los textos de cálculo? ¿Identifica alguna diferencia?

6. Qué mejoras desde el punto de vista matemático son esenciales?

Resultados de la validación

Los seis expertos consideraron que la propuesta contempla la información que responde a las preguntas del cuestionario. En líneas siguientes, sólo se ponen las sugerencias que plantearon algunos expertos, misma que se atendieron, a fin de mejorar la propuesta. En relación a la pregunta:

¿Se identifican las etapas de asimilación en la propuesta de actividades?

Respuesta del Experto A: Falta enriquecer la etapa de aplicación del concepto. Considero que hace falta, en esta etapa plantear actividades de representantes de los conceptos de función continua y función discontinua, de modo que los profesores logren la aplicación del concepto. Por ejemplo, se les puede proponer el estudio de la función de Dirichlet.

¿La propuesta de actividades se asemeja a una presentación clásica, como la que ofrecen los libros de texto de cálculo?

Respuesta del Experto E: Esta propuesta es distinta al planteamiento clásico en un curso a nivel preuniversitario. El uso de una herramienta como GeoGebra posibilita la comprensión de la noción de continuidad en un punto.

¿Qué mejoras desde el punto de vista matemático son esenciales?

Respuesta del Experto E: Que las gráficas de las funciones de las actividades 4,5 y 6 no se le muestren al profesor, sino que él las construya o las seleccione de unas tres o cuatro opciones. En la actividad 6 se debe precisar el punto de análisis de la continuidad en cada caso, o si siempre se analiza en $x = 2$, hacerlo explícito.

En la actividad 1 y 2 se requiere de una redacción más explícita [Esta sugerencia también fue dada por los expertos Experto B y Experto F].

La actividad 9 podría complementarse con la pregunta: ¿Las condiciones (i) y (ii) son suficientes para tener continuidad puntual? Argumente y ejemplifique su respuesta. (Diálogo en línea entre profesor y expertos, 2021).

IV. ALTERNATIVA DIDÁCTICA

Actividad 1. ¿Qué entiendes por continuo o continuidad? Representa tu idea de continuo mediante un dibujo. Si es un gráfico tu representación, ¿qué distingue el que sea continuo?

Actividad 2.

2.1 A partir de la relación $p = Da^2 + d$, donde D y d son magnitudes constantes y p, a son variables (ligados ortogonalmente), bosquejar la gráfica cartesiana que representa dicha relación y describir los efectos de los parámetros D y d.

2.2. Dado un segmento $\overline{AB}$ y C un punto de él de tal manera que $a = \overline{AC}$ Hágase que el punto C tenga coordenadas $(a, 0)$. Constrúyase el segmento $\overline{CT}$ perpendicular a $\overline{AB}$ en el punto C de tal manera que T tiene coordenadas (a, p), con $p = 2a^2 + 1$. Supóngase que a recorre el intervalo $[0,7]$. Describa el comportamiento de la trayectoria del punto T.

2.3 Analizar el comportamiento de relaciones covariacionales involucrando una de tipo racional, en este caso; el punto $\boldsymbol{T}$ (que describe la trayectoria) tiene como coordenadas el par $(\boldsymbol{a}, \mathbf{1}/\boldsymbol{a})$; aquí se considera que $\boldsymbol{a}$ recorre el intervalo $[-7,7]$, luego, se pide estudiar la relación dada por el par $(\boldsymbol{a}, \mathbf{1}/\boldsymbol{a}^2)$, con $\boldsymbol{a} \in [-7,7]$. En cada una de las situaciones planteadas se pide argumentar sobre las cuestiones formuladas antes.

Actividad 3. Se propone analizar relaciones covariacionales con longitudes de segmentos que favorecen un lugar geométrico (que trata de la gráfica de una función definida por trozos), es decir, dentro de las actividades con GeoGebra que se le promueven al profesor para que analice y describa el sentido de continuidad puntual; destacan las siguientes: Dado un segmento $\overline{AB}$ con puntos extremos $A(-5{,}0)$ y $B(5{,}0)$, se trazan los subsegmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ con puntos extremos $A(-5{,}0)$ y $O(0{,}0)$, y $O(0{,}0)$ y $B(5{,}0)$. Se definen dos deslizadores; a que recorre el segmento $\overline{AO}$ y b que recorre el segmento $\overline{OB}$ Con estos datos se pide al profesor analizar el comportamiento de las relaciones $R_1 = 2a + 1$ y $R_2 = (b)^2 + 1$ graficadas en el mismo plano y argumentar sobre el sentido de continuidad en el dominio de definición y en particular, en el punto $(0{,}1)$. De manera análoga, se propone analizar el comportamiento de las relaciones $R_1 = 2a$ y $R_2 = (b)^2 + 1$, y se pide argumentar acerca del sentido de continuidad en el punto $(0{,}1)$.

Actividad 4. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}, & x > 1 \end{cases}$. La gráfica de la función anterior se muestra a continuación.

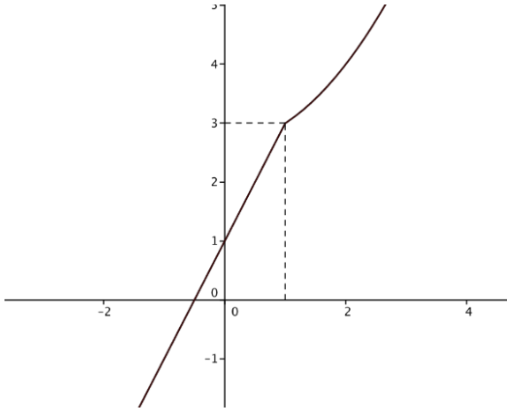


Fig. 1: Representación gráfica de la función $f(x)$
Fuente: Elaboración propia

4.1 Si considera los valores de $x \leq 1$, y cada vez más próximos a 1. ¿Cómo es el comportamiento de la expresión $2x + 1$? Argumente su respuesta.

4.2 Si considera los valores de $x > 1$, y cada vez más cercanos a 1. ¿Cómo se comporta la expresión $\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}$? Argumente su respuesta.

4.3 Resolver los siguientes límites y comparar las soluciones: $\lim_{x \to 1^-} (2x + 1)$, $\lim_{x \to 1^+} (\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3})$.

4.4 ¿Qué se puede decir acerca del límite de una función, cuando los límites laterales existen como números reales pero son distintos?

4.5 Si una función dada $f(x)$ no está definida en $x = a$, entonces, ¿puede existir el $\lim_{x \to a} f(x)$? Argumente su respuesta.

4.6 ¿Cuál puede ser una condición para garantizar la existencia del límite de una función en un punto?

Actividad 5. Analizar las siguientes gráficas que corresponden a las funciones dadas y realizar las actividades que se indican en cada caso.

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

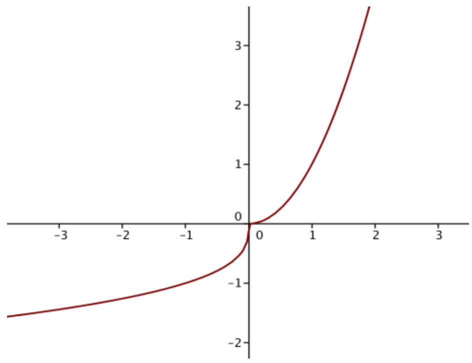


Fig. 2: Representación gráfica de la función $f(x)$

5.1 ¿Es posible recorrer la gráfica sin despegar el lápiz del papel? Argumente su respuesta.

5.2 ¿La función dada está definida en $= 0$? ¿Cuál es el valor de la función en dicho punto?

5.3 Determinar los límites por la izquierda y derecha de cero de la función dada.

5.4 ¿Qué puede decirse del límite de la función en $x = 0$ y el valor de la función en dicho punto? Argumente su respuesta.

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

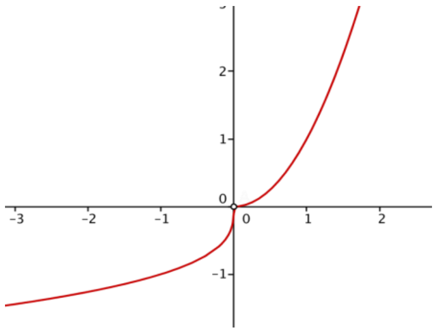


Fig. 3: Representación gráfica de la función $f(x)$ no definida en el origen

5.5. ¿Es posible recorrer la gráfica sin despegar el lápiz del papel? Argumente su respuesta.

5.6 ¿La función dada está definida en $= 0$? ¿Cuál es el valor de la función en dicho punto?

5.7 Determinar los límites por la izquierda y derecha de cero de la función dada.

5.8 ¿Qué puede decirse del límite de la función en $x = 0$ y el valor de la función en dicho punto? Argumente su respuesta.

Actividad 6. A continuación se muestran distintas gráficas de funciones dadas, se pide analizar dichas gráficas e indicar en qué casos hay continuidad en el punto $x = 2$ y en qué casos no hay continuidad. Argumente su respuesta.

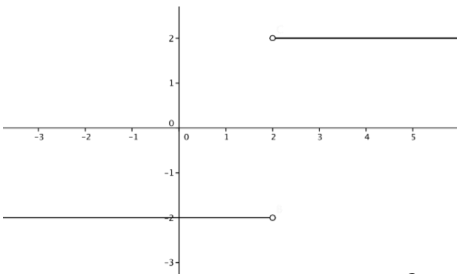


Fig. 4: Gráfica de la función $f_1(x) = \begin{cases} 2, x > 2 \\ -2, x < 2 \end{cases}$

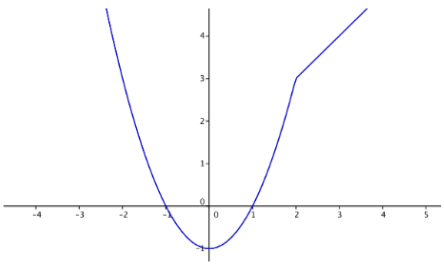


Fig. 5: Gráfica de la función $f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \leq 2 \\ x + 1, x > 2 \end{cases}$

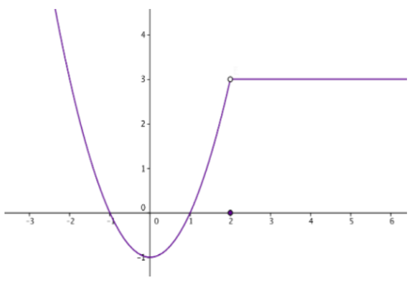


Fig. 6: Gráfica de la función $f_3(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x < 2 \\ 0, x = 2 \\ 3, x > 3 \end{cases}$

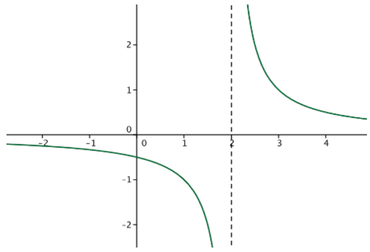


Fig. 7: Gráfica de la función $f_4(x) = \frac{1}{x-2}$

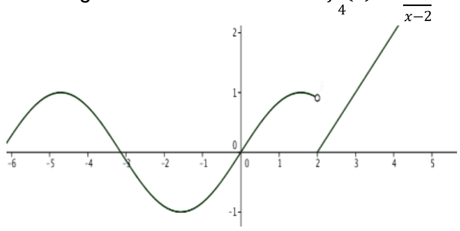


Fig. 8: Gráfica de la función $f_5(x) = \begin{cases} \sin x, x < 2 \\ x - 2, x \geq 2 \end{cases}$

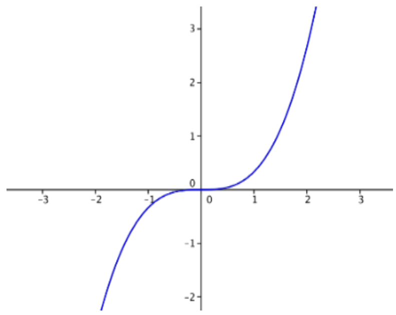


Fig. 9: Gráfica de la función $f_6(x) = \frac{1}{3}x^3$

Actividad 7. ¿Qué condiciones cumplen las funciones que usted determinó como continuas en el punto $x = 2$?

Actividad 8. Establezca una definición de continuidad de una función en un punto.

Actividad 9. Proponga una función a trozos que cumpla cualquiera de las siguientes condiciones:

i)

a) Esté definida en $x = a$.

b) Existan los límites laterales como números reales por la derecha y por la izquierda de punto indicado, y que éstos sean iguales.

ii) ii)

a) Esté definida en $x = a$.

b) Que exista sólo un límite lateral.

c) Que el valor de ese límite lateral que existe sea igual al valor de la función en $x = a$.

¿Las condiciones (i) y (ii) son suficientes para tener continuidad puntual?

Actividad 10. Argumente acerca de la relación entre las definiciones que a continuación se te presentan:

D1. Una función f es continua en el punto c, si:

1. $f(x)$ está definida en el punto $x = c$,
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

D2. Una función f es continua en $x = c$ de su dominio, si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Actividad 11. Se presentan siete formulaciones de definición de función continua en un punto, y se pide que, mediante el estudio de funciones particulares definidas a trozos que usted proponga, determine lo siguiente: La función es discontinua en el punto de estudio, pero cumple la

formulación de la definición dada. La función dada es continua en el punto de estudio, pero en algunos del dominio de estudio, la fórmula dada no se cumple.
Estas dos identificaciones ayudan a refutar la formulación. Evidentemente, una de las formulaciones es la que describe correctamente la definición.

Una función $f: D \longrightarrow R$ con dominio en los reales $D \subset R$ es continua en el punto x_0 si:

i. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

ii. $(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

iii. $(\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

iv. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta)$.

v. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

vi. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

vii. $(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

V. DESCRIPCIÓN

Enseguida se describe el objetivo de cada una de las actividades, tomando en cuenta que estas actividades se elaboraron considerando el contenido matemático del concepto de continuidad puntual que se imparte en el preuniversitario, la fundamentación teórica que sustenta esta realización, principalmente las fases que se establecieron como fundamentales para favorecer el proceso de asimilación; mismas que se ven reflejadas en las actividades específicas.

Es importante resaltar que en este trabajo no se obtienen resultados como producto de llevar a cabo esta elaboración a la actividad en el aula, sin embargo, los comentarios que se hacen en la descripción están fundamentados en los resultados de validación (por criterio de expertos) al cual se sometió este planteamiento. Por lo tanto, desde la visión de los autores y en coincidencia con las investigaciones de corte teórico-didáctica encontradas en la literatura propia del campo de la educación matemática, esta forma de presentación del trabajo es de aceptación.

La actividad 1 tiene como propósito identificar qué noción de continuidad prevalece o tiene el actor (profesor), esta pregunta no se restringió al campo de las matemáticas, ya que se desea saber cómo concibe la noción de continuidad dentro y fuera de ella. Particularmente interesa identificar si predomina la idea intuitiva de continuidad global y cómo explican la idea de continuidad local.

La actividad 2 tiene el propósito de estudiar a través del GeoGebra el comportamiento de dos magnitudes ligadas ortogonalmente, a partir de aquí, interesa identificar cómo es el comportamiento de la trayectoria generada al llevar a cabo la variación. Así, a través de estudio de la relación $p = Da^2 + d$ (donde D y d son magnitudes constantes) entre dos variables p, a (lidas ortogonalmente). Mediante esta actividad se responde las siguintes cuestiones: la variación de los segmentos ligados ortogonalmente, la idea de continuidad global y local en el análisis del comportamiento de la trayectoria. Con esta actividad, se provoca en el actor el conflicto cognitivo de cómo caracterizar la idea de continuidad local, a través de la idea clásica de continuidad global. De manera análoga, se promueve después el estudio de relaciones, cuyas trayectorias, presentan interrupciones en sus gráficas y se promueven los planteamientos antes hechos.

La actividad 3 tiene el propósito de que a través del estudio de magnitudes que variam, ligadas ortogonalmente generan trayectorias a trozos (funciones a trozos), y se pide argumentar sobre las cuestiones planteadas en (Actividad 2), aprovechando el enfoque dinámico de las situaciones.

La actividad 4 y 5 tiene el propósito de favorecer el paso de la vía intuitiva de la continuidad (la de recorrer un pedazo de curva sin levantar el lápiz como concepción global de la continuidad) a la discusión sobre los elementos y condiciones matemáticas que posibilitan la continuidad puntual. A partir de aquí diferenciar la continuidad en un punto y la continuidad de tipo global. Además de que se motiva al actor hacia la búsqueda de los significados: la función está definida en el punto, no lo está, existen o no los límites laterales, existen y son distintos, la relación de existencia de límite y que su valor coincida con el de la función cuando la variable tiende al punto indicado, entre otras.

En la actividad 6 se presentan distintas gráficas asociadas a funciones a trozos en las que se pide identificar la continuidad puntual. Esta actividad, prepara al actor a visualizar que a través del análisis de las funciones dadas a trozos se significa el sentido y definición de la continuidad o discontinuidad en un punto, en cada caso que se realiza, se retroalimenta el recurso visual mediante el ambiente dinámico que posibilita el software.

En la actividad 7 se les pide a los actores establecer qué condiciones se cumplen para afirmar que hay continuidad en el punto indicado. Aquí se trata, de que el profesor reconozca que sólo la existencia del límite, o sólo la definición de la función en el punto de estudio no son suficientes para establecer la continuidad, de hecho, es a partir de aquí que se pueden generar los tipos de discontinuidad y los casos en los que se puede evitar. Por tanto, se está en condiciones de dar la definición de continuidad en un punto (Actividad 8), las definiciones que se aspira se produzcan son las siguientes:

D1. Una función f es continua en el punto c, si:

1. $f(x)$ está definida en el punto $x = c$,
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

D2. Una función f es continua en $x = c$ de su dominio, si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

D3. Una función f es continua en x_0 que está en el dominio de la función, si

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La actividad 9 tiene el propósito de que el profesor ponga a prueba las definiciones dadas. En los análisis que lleve a cabo, se identificarán los niveles de asimilación de dicho concepto.

La actividad 10 tiene el propósito de que el actor establezca cuáles son las relaciones de las definiciones dadas en la (Actividad 8), con ello, se identifica si el actor reconoce la definición del concepto en su presentación estándar y en su definición mediante el modelo $\varepsilon - \delta$.

La actividad 11 tiene como propósito que el profesor analice la estructura de la definición de función continua en un punto dada mediante el modelo $(\varepsilon - \delta)$. Esencialmente identificar el papel de los cuantificadores universal y existencial, los símbolos ε y δ y el orden lógico que cumplen, así como, el orden de la implicación y el significado de las desigualdades que la componen. Con este propósito se presentan al profesor siete formulaciones de definición de función continua en un punto, y se pide que, mediante el estudio de funciones particulares definidas a trozos, determine lo siguiente: La función es discontinua en el punto de estudio, pero cumple la formulación de la definición dada o, la función dada es continua en el punto de estudio, pero en algunos del dominio de estudio, la fórmula dada no se cumple.

Después de que el profesor lleva acabo la identificación de la formulación correcta, se pide analice la función y visualice la consistencia de la definición en un ambiente dinámico que se favorece mediante el uso de GeoGebra. En la siguiente figura se visualiza la definición de continuidad de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto $x_0 = 2$, se consideran valores de ε en el intervalo $[0.1, 0.9]$, y para cada valor de ese intervalo se determina el valor de δ, en este caso, bajo la definición de continuidad puntual, se determina que $\delta = \frac{s}{7}$

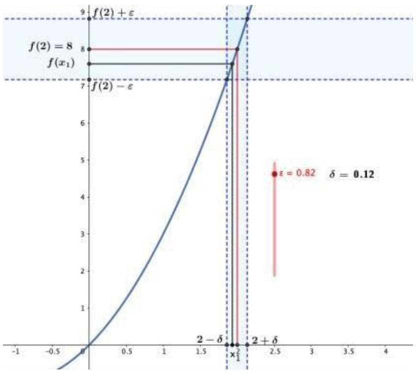


Fig. 10: Representación de la definición de continuidad en un punto, en un caso particular

VI. CONCLUSIÓN GENERAL

Desde la visión de los autores se considera que esta propuesta parte de la necesidad de establecer las condiciones y dar paso a la formulación de la definición y no presentar la definición del concepto como un producto acabado.

El acercamiento a través de las funciones definidas a trozos permite identificar los conceptos asociados como: límite, dominio, gráfica, entre otros y determinar las condiciones para garantizar la continuidad puntual. El sistema de actividades favorece la formulación y discusión de la definición del concepto, lo que permite llevar a cabo un análisis lógico de la estructura matemática del concepto que se define. Esta propuesta rompe con el esquema clásico de presentación del contenido identificado en los libros de texto propuestos en el nivel preuniversitario.

Producto de la validación de la propuesta, se concluye que la presentación a través de las funciones definidas a trozos y mediante el enfoque dinámico que favorece el software GeoGebra se contribuye con una herramienta didáctica al profesor de preuniversitario, que lo ponen en condiciones óptimas para su actividad de enseñanza mediante esta elaboración.

El referente teórico y metodológico que fundamentó el trabajo, obligó en primer lugar la identificación específica del contenido matemático entorno al concepto de continuidad puntual, en segundo lugar, la consideración y preparación del conocimiento didáctico del contenido; en este último, jugó un papel importante el sistema de etapas para la asimilación que asumió: aproximación al concepto, formalización del concepto, identificación y aplicación del concepto.

El uso del software GeoGebra como herramienta didáctica en la actividad práctica de las actividades de la propuesta, de manera específica; para el estudio de las actividades 1, 2, y 3 de la propuesta, da cuenta de su papel como recurso heurístico, asumimos, que en estas actividades se aportan elementos para el estudio de lo dinámico a lo estático del concepto de continuidad puntual. El estudio de la funciones definidas a trozos para el estudio de la continuidad en un punto, fue un factor de esta presentación que rompe con el esquema clásico de tratamiento del cálculo.

RECOMENDACIONES

Este trabajo está dirigido esencialmente hacia el profesor, y pretende ser una propuesta que lo obligue a orientar su práctica de enseñanza considerando dos aspectos fundamentales: el dominio del contenido matemático y el conocimiento didáctico para su tratamiento en la actividad de aprendizaje. Derivado de esto, los autores hacen las siguientes recomendaciones, considerando el contenido y la orientación metodológica:

- Analizar cuidadosamente el referente teórico y metodológico que se asume aquí, bajo el cual se ha elaborado el sistema de actividades en esta propuesta, luego, revisar la descripción y los objetivos de cada actividad. Finalmente, hacer adaptaciones de acuerdo a la naturaleza de los estudiantes, organizar, elaborar e implementar las actividades.
- Es recomendable experimentar la propuesta con estudiantes, y contrastar los resultados con lo proyectado desde el plano teórico por los expertos que validaron la propuesta, a fin de mejorar aspectos de esta propuesta.

CONFLICTOS DE INTERÉS

No hay conflictos de interés por los autores del trabajo de investigación.

REFERENCIAS

[1] E. Aparicio - Landa y R. Cantoral, “The social construction of mathematical continuity: A socioepistemological approach”, *Başkent University Journal of Education,* vol. 1(1), pp. 123-135, 2014.

[2] E. Arteaga, A. Díaz, F. García y J. L. Del Sol, “Alternativas metodológicas para la formación y fijación de conceptos geométricos en la geometría plana”, *Quaderns digitals: Revista de nuevas tecnologías y sociedad*, vol. 1 (60), pp. 1-25, 2009.

[3] S. Ballester, *Metodología de la enseñanza de la matemática I*, Cuba: Editorial Pueblo y Educación, 1992.

[4] J. Carrillo, A. Aguilar, L. Contreras, N. Climent, E. Carmona, D. Escudero - Ávila, E. Flores - Medrano, P. Flores, J. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz - Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco y D. Zakaryan, *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas,* Huelva, España: Publicaciones, 2014.

[5] M. Delgado, “Un problema con la concepción de continuidad de una función”, *El cálculo y su enseñanza,* vol. 4, pp. 27-44, 2013.

[6] L. Dikovic, “Understanding and visualization of the uniform continuity of functions”, *Advances in Social Science, Education and Research (ASSEHR),* vol. 68, pp. 1-9, 2017.

[7] P. Duška y P. Eleksandar, “The use of visual approach in teaching and learning the epsilon – delta definition of continuity”, *Europan Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 3(3), pp. 201 – 218.

[8] L. García, C. Azcárate y M. Moreno, “Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas”, *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 9(1), pp. 85-116, 2006.

[9] N. Gatica, A. Maz - Machado, G. May, C. Cosci, G. Echeverría y J. Renaudo, “Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de ciencias económicas”, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. (22), pp. 121 - 131, 2010.

[10] J. L. Hernández y R. A. Torres, *La noción de función continua de Leonardo Euler*, Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, 2014.

[11] G. Jayakody y R. Zazkis, “Continuous problem of function continuity”, *For the Learning of Mathematics*, vol. 35(1), pp. 8-14, 2015.

[12] R. Larson y B. H. Edwards, *Cálculo*, México: Mc Graw Hill, 2015.

[13] L. Leithold, *El Cálculo*, EEUU: Oxford University Press, 1998.

[14] A. Morales y A. Damián, "Didactic strategy to introduce the concept of punctual contuinity with pre-university students", *international Journal of Research in Education Methodology*, vol. 11(1), pp. 7-21, 2020.

[15] A. Morales, J. E. Marmolejo y E. Locia, "El software GeoGebra: Un recurso en la resolución de problemas geométricos", *Premisa*, vol. 16(63), pp. 20-28, 2014.

[16] N. Piskunov, *Cálculo Diferencial e Integral*, México: Limusa, 2004.

[17] E. J. Purcell, D. Verberg y S. E. Rigdon, *Cálculo diferencial e integral*, México: Pearson Educación, 2007.

[18] M. Sierra, M. T. González y C. López, "Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 3(1), pp. 71-85,2000.

[19] M. Sierra, M. T. González y C. López, "El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX", *Educación matemática*, vol. 15(1), pp. 21-49, 2003.

[20] M. Spivak, *Cálculus infinitesimal*, México: Reverté, S. A., 2003.

[21] J. Stewart, *Cálculo de una sola variable*, México: Editorial Internacional Thomson Editores, 2013.

[22] E. W. Swokwoski, *Cálculo con geometría analítica*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.

[23] P. Torres, "La instrucción heurística en la formación de profesores de matemáticas". En C. Dolores, M. García, J. A. Hernández y L. Sosa (Eds.). *Matemática educativa: la formación de profesores,* México: Díaz de Santos, pp. 205-221, 2013.

LA COLABORACIÓN REMOTA CON EL USO DE GEOGEBRA Y TRACKER EN EL CÁLCULO DEL VOLUMEN DEL LIQUIDO EN UNA BOTELLA

Nombre R. Pantoja-González[1], Nombre K. Puga[1] y Nombre V. Rentería[1]
[1]*Tecnológico Nacional de México- Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán,*
rafael.pg@cdguzman.tecnm.mx, karla.pn @cdguzman.tecnm.mx, victor.rp@cdguzman.tecnm.mx

***Abstract*— In this time of pandemic caused by the SARS-COV 2 virus, we set ourselves the task of looking for an alternative to continue and promote collaborative work among students who access the school in the virtual mode. The activities that were generated to promote collaborative work were the approximation of the volume of a liquid contained in a bottle applying the concept of the integral, this with the support of the Tracker program, which was used to find the coordinates involved in the model and represent the contour of the bottle and then used the GeoGebra program to calculate and approximate the volume. The mathematical model of the bottle with GeoGebra was useful to mathematize the concept of the integral in context.**

***keywords*— Collaborative work, solid revolution, modeling, digital photography.**

Resumen **En esta época de pandemia causada por el virus SARS-COV 2, nos dimos a la tarea de buscar una alternativa para continuar y promover el trabajo colaborativo entre estudiantes que acceden a la escuela en la modalidad virtual. Las actividades que se generaron para fomentar el trabajo colaborativo fueron la aproximación del volumen de un líquido contenido en una botella aplicando el concepto de la integral, esto con apoyo del programa Tracker, el que se utilizó para encontrar las coordenadas involucradas en el modelo y que representan del contorno de la botella y posterior a ello se utilizó el programa GeoGebra para calcular y aproximar el volumen. El modelo matemático de la botella con GeoGebra fue útil para matematizar el concepto de la integral en un contexto.**

***Palabras clave*— Trabajo Colaborativo, solido de revolución, modelado, fotografía digital.**

INTRODUCCIÓN

En estos tiempos, donde el aislamiento social ha sido una medida de prevención sanitaria, las instituciones educativas se han visto afectadas debido a la forma tan inesperada en la que aparece tal situación. Esto ha provocado en los docentes replantear sus estrategias didácticas e incorporar nuevos recursos que permitan extender el aula hasta los hogares de la población estudiantil. En estos planteamientos, ha sido necesario conservar algunos aspectos áulicos necesarios para la promoción de aprendizajes como lo es el trabajo colaborativo. La interacción que se genera con los alumnos en el aula es muy especial ya que en ella integra varias vertientes, entre las cuales sobresalen las emisiones verbales del docente y que dicha interacción provoca el razonamiento interpersonal en los alumnos y el docente observa cómo aparecen y son variadas las participaciones de los alumnos al proponerles una actividad cognitiva [6].

Esta interacción se vio empobrecida con la nueva modalidad en línea [6], ya que en el aula virtual que surge de súbito, los profesores han centrado su atención principalmente en cubrir los contenidos del programa de estudio, asignando una serie de actividades para que los estudiantes las realicen de manera independiente. En estos escenarios no se observa la interacción entre los estudiantes, la manera en cómo socializan su conocimiento, por lo que se torna necesario generar espacios virtuales en donde se promueva el trabajo colaborativo entre los estudiantes.

En el Tecnológico Nacional de México (TecNM) en el documento rector del Plan de Desarrollo Institucional (PDI), vigente 2013-2018, establece, como premisa básica, la incorporación al aula de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) para la modelación y aprendizaje de las matemáticas. Además, promueve el interés del profesor para generar estrategias de enseñanza alternativas, que incentiven y motiven a la población estudiantil a aprender matemáticas [1].

Atendiendo los planteamientos del TecNM, se diseña una alternativa didáctica para que estudiantes, mediante las TIC, fortalezcan el trabajo colaborativo con sus compañeros. La propuesta se fundamenta mediante la teoría ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autorreflexión), en la cual se enfatiza que la autorreflexión y el debate científico entre los alumnos favorece a la apropiación de los conocimientos esperados [4].

EL TRABAJO COLABORATIVO Y LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Para propiciar el trabajo colaborativo con los estudiantes, se diseñaron actividades previas, en donde se incorporan el uso de software libre como Tracker y GeoGebra, además se requiere de una fotografía digital en donde se captura una forma de un objeto cotidiano con la finalidad de que el estudiante pueda trasponer conocimientos así promover aprendizajes significativos. Se diseña un ambiente digital el cual consiste en una plataforma virtual para el alojamiento de las secuencias didácticas y entrega de evidencias. A continuación, se describen algunos de ellos.

Antes de las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica, se les pidió a los alumnos organizaran los grupos de trabajo colaborativos, esta actividad la realizaron los alumnos en los grupos síncronos de WhatsApp por afinidad.

Las secuencias didácticas que se plantearon a los estudiantes consistieron en tres sesiones, en la primera se planteó el uso y familiarización con los softwares libres Tracker y GeoGebra con una actividad de aproximar el peso de una fruta, se destaca que el docente instruye como manipular los softwares. En la segunda sesión de trabajo, se propone a los alumnos buscar la aproximación de un líquido contenido en una copa donde el docente solo funge como acompañante. Y en la tercera sesión se les proporcionó la fotografía de la secuencia didáctica final como experimentación. que el título de cada sección ya incluye la numeración automática y el espacio hacia el último párrafo de la sección anterior. Por lo tanto, para iniciar una nueva sección se recomienda comenzar copiando y pegando el título desde otra sección en este mismo documento. De forma similar, también se puede observar que el formato para los párrafos ya incluye una pequeña indentación automática en la primera línea y no existe un espacio extra para la separación entre párrafos.

La fotografía Digital

La fotografía digital se incorpora como medio para vincular una situación en contexto con la matemática, ya que el objetivo que se persigue con las actividades es mostrar escenarios en donde la matemática escolar tenga lugar en un contexto cotidiano [5].

Esta fotografía debe contar con requerimientos específicos para poder ser considerada como parte de la secuencia didáctica. En la Fig. 1, se muestra un ejemplo de cómo se debe enfocar la cámara digital con el objeto que se pretende analizar, que tanto la cámara como el objeto que se analizará deben enfocarse con la mayor claridad y nitidez posible. También incluir en la fotografía digital una medida de referencia, es este caso por practicidad se utilizó el borrador de pizarrón que se marcó con medidas en centímetros en su costado. La imagen de la botella con líquido, posteriormente se analizó en Tracker y GeoGebra.

Una parte indispensable de la imagen es la medida de referencia, es importante que sea visible y que contenga una escala clara y medible, ya que, sin esta, no sería posible aproxima el cálculo real con el análisis computacional y matemático.

Fig. 1: Consideraciones básicas para la fotografía digital y su secuencia didáctica.

La teoría ACODESA.

La teoría ACODESA [4] plantea que el aprendizaje significativo de los estudiantes se puede mejorar si entre ellos se generan y discuten propuestas que promueva la auto reflexión con el debate en grupo colaborativo en el aula y en pares. Esta auto reflexión se promueve en el momento de realizar los reportes de la actividad propuesta en la secuencia didáctica, esta interacción se generó a distancia.

La secuencia didáctica se alojó en la página electrónica de Classroom, recurso que se propuso como puente entre el docente y el grupo colaborativo.

Los alumnos accedieron a la actividad propuesta y trabajaron, en todo momento, en modo remoto como se muestra la figura 2. Como evidencia de trabajo de los estudiantes, fue necesario solicitarles la elaboración de un reporte en donde se priorizan las conclusiones y resultados individuales de cada miembro del equipo colaborativo.

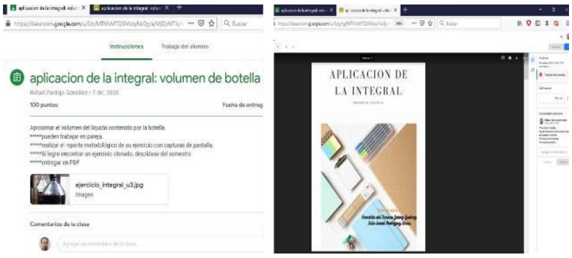


Fig. 2: Plataforma digital Classroom y entrega de reporte de actividad.

Las representaciones semióticas de Duval.

La secuencia didáctica que se diseñó para la propuesta se sustentó en la Teoría de los registros de representación Semióticas de Raymond Duval [2].

Esta secuencia consta de registros que el alumno debe modificar o construir para que su aprendizaje sea significativo. Estos saberes fueron representados y observados en los materiales como se muestra en la Fig. 3 y Fig. 4. El registro visual que se relaciona con la fotografía del objeto es en este caso la botella con el líquido a cierto nivel y que previamente ha sido medido.

Con el programa Tracker, se generaron e identificaron los acercamientos gráficos, este registro surge cuando se buscan las coordenadas x,y del contorno de la botella, se genera una gráfica que representa, en lenguaje máquina, la botella.

El registro analítico y numérico se observó cuando se usó el programa GeoGebra para aproximar la función que representa el contorno de la botella. Los comandos digitales con las que cuenta GeoGebra permitieron a los estudiantes encontrar un modelo matemático de la botella y su modelo tridimensional.

Las representaciones verbal y escrita se observaron en el trabajo colaborativo de manera remota, con la metodología ACODESA, con discusión de resultados que se obtuvieron y con la elaboración del reporte final que se alojó para su revisión en la plataforma Classroom.

Fig. 3: Las representaciones semióticas de Duval

Fig. 4: Conversión y tratamiento de Duval

GeoGebra es un programa libre que ha adquirido popularidad en los últimos años por su versatilidad, fácil manejo y herramientas útiles e intuitivas que ayudan a los estudiantes y profesores dentro y fuera del aula.

Las herramientas de GeoGebra que se utilizaron en la secuencia didáctica se incorporan con la finalidad de encontrar el modelo matemático del contorno del objeto que se analizó, el modelado tridimensional del mismo objeto y la simplificación de operaciones para calcular su volumen con una integral.

El programa Tracker, también de libre licencia se utilizó para encontrar las coordenadas del contorno de los objetos que se analizaron. En un programa sencillo e intuitivo como interfaz humano-computadora. Dicha interfaz permite hacer la graduación de medidas lo más cercano a la forma real del objeto, ya que, con la herramienta de vara de calibración, establece la escala del objeto y la transforma a lenguaje máquina.

METODOLOGÍA

El primer acercamiento para la puesta en marcha de la secuencia didáctica fue capturar las fotografías digitales con los requerimientos necesarios para la experimentación, uso de los programas computacionales y culminar en las sesiones programadas de trabajo con y entre los estudiantes.

La duración de la secuencia didáctica fue de tres sesiones, en las cuales se debían formar grupos de trabajo entre dos y tres integrantes, seleccionados por afinidad. Cabe destacar que las secuencias se validaron por un grupo de docentes del área de ciencias básicas quienes evaluaron su parte técnica y didáctica, la claridad de las instrucciones.

Una vez validadas y aprobadas, inició la primera sesión de la secuencia de trabajo, donde se presentó una situación problema seleccionada [4], [5] de la vida cotidiana, con la finalidad de sensibilizarlos en el uso de los programas de cómputo y que conocieran los pormenores de su uso y de las herramientas que ofrecen. También se compartió con los estudiantes un manual básico de uso de los programas de cómputo GeoGebra y Tracker, Además, se les grabaron sesiones y se alojaron en Classroom sobre los pasos a seguir de otros objetos analizados anteriormente. Todo esto con la finalidad de que el uso de los programas no fueran un obstáculo en la realización de las actividades.

En la segunda sesión, con el objetivo de seguir reafirmando y familiarizarse el uso de las herramientas y comandos básicos de Tracker y GeoGebra, se les solicitó a los estudiantes realizar la aproximación del volumen y la modelación de una papaya, como se muestra en la Fig. 5. Hay que destacar que las sesiones fueron grabadas para realimentación y alojada en la red para posterior análisis de los estudiantes.

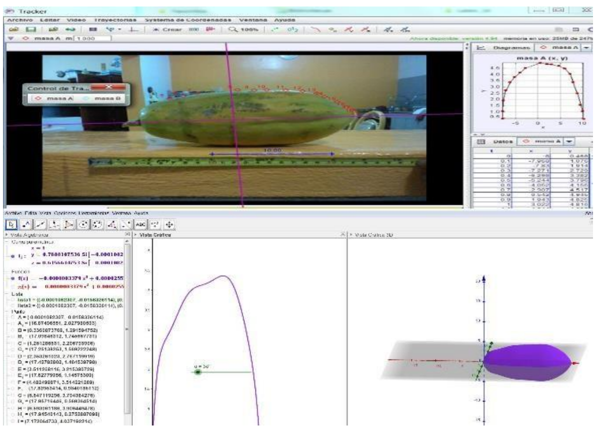


Fig. 5: secuencia inicial del modelado, volumen y peso de una fruta

En la tercera y última sesión de trabajo a distancia y en grupo colaborativo, se comenzaron a revisar y dar solución a las preguntas que surgían, tanto generales como puntuales. Posteriormente se compartió la secuencia didáctica final con la fotografía de la botella la cual fue llenada con cierta cantidad de líquido medido previamente por los docentes, se solicitó a los estudiantes trabajar colaborativamente de manera remota y enviar sus reportes a la plataforma Classroom.

Una vez que se concluyó con el tiempo de entrega de la secuencia final, se les solicitó a los estudiantes que redactaran el reporte correspondiente, se solicitó que hicieran énfasis en su metodología de trabajo colaborativo, que en sus resultados, tanto personales como de grupo, incorporaran sus experiencias en el uso y aplicación de los programas Tracker y GeoGebra.

RESULTADOS OBTENIDOS

Las conclusiones individuales de los grupos colaborativos fueron muy variadas, ya que la mayoría de los alumnos presentaron evidencias de haber entendido y comprendido para qué es útil la integral y sus aplicaciones en contextos externos al aula de clases, aunado a eso se dan cuenta que se puede aplicar un programa de cómputo a situaciones de la vida cotidiana, modelar su contexto y matematizarlo.

También hay evidencia en la aplicación de la propuesta de que los estudiantes plantearon más preguntas, cuestionamientos respecto a la posibilidad de trasladar a otros contextos un análisis similar.

Se destaca que para algunos estudiantes no fue agradable dejar el lápiz y papel para realizar sus actividades, ya que manifiestan que, por diferentes motivos, no utilizan la computadora. Al indagar un poco más en esa situación, se observa que son estudiantes de escasos recursos, que viven en comunidades aisladas y que se hace un esfuerzo enorme por conectarse a las clases en línea.

Se observó que los alumnos tuvieron broncas al buscar trabajar en equipos colaborativos, estos grupos de reciente ingreso al sistema TecNM, no se conocen físicamente, por lo que es más difícil la interacción entre pares. Una forma de sortear este obstáculo fue habilitar un grupo de comunicación síncrona en donde se contó con una interacción más fluida y eficaz que solo en clase.

También nos percatamos que existen alumnos que, por vivir en comunidades alejadas, a pesar de que se mantiene la comunicación electrónica prefieren trabajar en soledad, por cuenta propia y no seguir un guion establecido, ver tabla 1.

TABLA I

TRANSCRIPCIONES DE CONCLUSIONES INDIVIDUALES E IMÁGENES QUE SE DIERON EN LA SECUENCIA DIDÁCTICA POR LOS ALUMNOS

Mi conclusión seria que las herramientas tecnológicas facilitan el desarrollo para sacar el columen de los solidos de revolución de una figura en 3Dya que, te da muchas herramientas fáciles de usar como los son los programas de computadora Tracker y geogebra, el tema es muy interesante y para mi	El cálculo integral tiene un amplio alcance en nuestra vida diaria, con los sólidos de revolución nos dimos un claro ejemplo que no todo es teoría, sino que también se puede aplicar a la vida diaria y con ayuda de algunos software podemos hacer muchas cosas que yo antes no tenía idea.

Como conclusión puedo obtener que es impresionante como la tecnología cada vez se adapta mas a las necesidades, como con estos programas realizamos algo de la vida cotidiana al transportarlos ahí y de una manera mas sencilla. Aparte me gusta mucho el tema, el aprender cosas nuevas, me interese mucho por dicha actividad y me dejo un gran aprendizaje, creo que es muy dinámica y aporta mucho para los conocimientos adquiridos.

Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía idea que se podía sacar el volumen o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual rompe todas mis creencias que solamente era teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro dia a día

En este trabajo tuvimos algunas complicaciones ya que en la hora de trabajar con geogebra no nos dejaba pegar las columnas de (x,y).Asimimo las versiones que manejada eran muy actualizadas; se nos trababan las computadoras.

Tuvimos que realizar muchas veces el trabajo ya que eran muchas las dudas que teníamos

En este examen, puedo decir que fue un poco más rápido nuestro procedimiento, creo que memorizamos bien los pasos, y no sé si estemos bien, pero fue una actividad muy dinámica, no me gusta escribir mucho en cuaderno, aprendí algunas funciones de los software que utilizamos, creo que aunque no seamos arquitectos, necesitaremos en alguna ocasión programar algo como esto, no lo sé igual y a lo mejor hasta nos toca hacer programas para arquitectos, nunca está de más aprender algo nuevo.

- Los resultados obtenidos en esta práctica son distintos a cualquier otra, varian desde las coordenadas obtenidas en Tracker, que por supuesto no todos las colocamos en los mismos puntos, ni usamos la misma cantidad de puntos.
- Tuve dificultad con la obtención de ellas, ya que al graficarlos en Geogebra me dí cuenta que no estaba el Punto A y el Punto Z2(último punto), cerca de sus respectivos ejes. Me regresé a mover mis puntos y hacer zoom de 800% para asegurarme que estuviera el Punto A, lo más cerca posible al eje Y, y el Punto Z2, lo más cerca el eje X.
- Después de copiar y pegar datos me percaté de què mis datos estaban fuera de contexto, eran demasiado grandes. Una vez más me regresé a Tracker para asegurarme de que la vara de calibración tenía los datos correctos, y no era asi, se habian cambiado y debía restablecerlos a 3cm nuevamente.

Que podemos concluir con esto, que esperaban mucho de nosotros dándonos recursos bastante limitados, resolver problemas de cálculo para mí no es difícil siempre y cuando tenga el tiempo y la practica suficiente, pero resolver esos mismos problemas usando un software que más que ayudar ralentizaba los procedimientos, estoy de acuerdo que si hubiéramos tenido más tiempo de practica no sería problema, pero no solo tuvimos una clase sino que además no fue explicada de la manera adecuada, el documento que se nos dio le hacía falta bastante información, en conclusión, prefiero volver a el papel y el lápiz.

Creo que el uso de las tecnologías para el aprendizaje resulta verdaderamente eficiente, ya que a los alumnos nos resulta más atractivo y menos aburrido aprender de esta forma que de la forma convencional y si más maestros utilizaran estas técnicas algunas materias que nos resultan un poco tediosas y complicadas, se nos harían más dinámicas.

CONCLUSIONES

Se observó que en la parte en donde los alumnos debían de seleccionar a su pareja para trabajo colaborativo, al estar en trabajo en línea se dificultó porque muchos de los alumnos, por estar en semestres iniciales no se conocen o no se ubican, a diferencia como si estuvieran normalmente presenciales. Es por lo que el ejercicio de buscar pareja colaborativa fue un reto para los alumnos y el valor de la afinidad se vio disminuido por múltiples factores.

Con la aplicación de estas herramientas digitales, se logró trasladar los saberes del aula en contextos reales, aplicados a objetos cotidianos que cercanos al estudiante, como son los cuerpos tridimensionales, recipientes, frutas, balones, entre otros y de este modo fortalecer su proceso de aprendizaje. También, se debe destacar que es menester del docente buscar alternativas de enseñanza para propiciar el interés por el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Con la propuesta tuvieron lugar sentimientos como frustración, interés, alegría y emoción al trabajar y hacer matemáticas con objetos que se encuentran a su alrededor, con el uso de la computadora y con el Tracker y GeoGebra. Esto en parte se debe a que, durante el desarrollo de la propuesta, se presentaron problemas técnicos ajenos a los participantes, problemas como la instalación de los programas de cómputo, conexión a internet, algún detalle con los comandos de los programas, calibración del programa Tracker entre otros.

Con la propuesta se evidencia que los estudiantes presentan debilidades en algunos conocimientos previos como el teorema fundamental del cálculo, identificar la gráfica asociada a un modelo matemático, establecimiento de los límites de integración, entre otros.

REFERENCIAS

Arrieta, J., Díaz L (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología a modeling perspective from socioepistemology. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) 18 (1): 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002 (May 18, 2018).

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es.

Hitt, F., González-Martín, A. (2015).Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. Educational studies in mathematics 88:201–219. DOI 10.1007/s10649-014-9578-7. Springer Science Business Media Dordrecht: USA.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. Journal of Education and Human Development, Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978.

Velasco Castro, A. (2007). Un sistema para el análisis de la interacción en el aula. Revista Iberoamericana De Educación, 42(3), 1-12. https://doi.org/10.35362/rie4232421-367, 1996.

O uso do jogo digital no processo de alfabetização matemática do aluno autista

Lorena R. Silva*, Elisabeth C. de Faria **
*Universidade Federal de Goiás- BRASIL, *lrosa@ufg.br** Universidade Federal de Goiás-BRASIL , *beth@ufg.br* **

Abstract— **This work addresses the master's research that discusses issues related to inclusive education of autistic students in learning the first mathematical concepts and their literacy process with the contribution of a digital game. The theoreticalfoundation is anchored in aspects related to learning, inclusion and mathematical literacy from the studies of Schimidt, Orrú, Vigotski, Mantoan, Luria and Lorenzato. Its starting point is the survey of mathematical literacy possibilities for autistic students in regular schools. According to Lorenzato, it is up to the teacher to promote opportunities for students to experience and discover. To carry out the research, the digital game is currently under construction, which will serve as a resource for the mediation of the mathematics teacher to work with geometric concepts in the student's literacy phase. This game aims to help not only theautistic student, but its construction is based on requirements that meet the specificities of these students, for Luria the mental development of children is built in mediations, influenced by the social environment. It will be a participatory research following the observation instruments that for Ludke and André need to be controlled and systematic and interview with limits and requirements. The work whose guiding question is: What learning is manifested by the autistic student in the mathematical literacy processwith the interaction of a digital game mediated by the teacher? As a result, it is expected that the use of the game will be a bridge for the construction of cognitive knowledge and meaning for the autistic student, supported by interaction and mediation which, according to Vygotski, can include various learning situations, breaking the traditionalism, interactions between teacher and student, overcoming the barriers imposed by society and consequently the school, breaking the reductionist model of the autistic student'spotential.**

***Resumo*— Este trabalho aborda a pesquisa de mestrado que discute questões relacionadas à educação inclusiva de aluno autista na aprendizagem das primeiras conceituações matemáticas e seu processo de alfabetização com a contribuição de um jogo digital. A fundamentação teórica está ancorada nos aspectos relacionados à aprendizagem, inclusão e alfabetização matemática. Possui como ponto de partida o levantamento das possibilidades de alfabetização matemática do aluno autista em escola regular de ensino. cabe ao professor promover oportunidades de experiências e descobertas aos estudantes. Para a realização da pesquisa, atualmente, encontra-se em fase de construção do jogo digital que servirá como um recurso para a mediação do professor de matemáticano trabalho com os conceitos geométricos na fase de alfabetização do aluno. Este jogo pretende auxiliar não apenas o aluno autista, mas a sua construção parte de requisitos que atendem às especificidades destes estudantes. , o desenvolvimento mental das crianças é construído nas mediações, influenciado pelo meio social. Esta será uma pesquisa participante, seguindo os instrumentos de observação que necessita ser controlada, sistemática e entrevista com limites e exigências. O trabalho tem como pergunta norteadora: Que aprendizagens são manifestadas pelo aluno autista no processo de alfabetização matemática com a interação de um jogo digital mediado pelo professor? Como resultado, espera-se que o uso do jogo seja uma ponte para a construção do conhecimento cognitivo e com significado para o aluno autista, apoiado na interação e mediação que, podem incluir várias situações de aprendizagens quebrando o tradicionalismo, transpondo as barreiras impostas pela sociedade e, consequentemente, pela escola, de modoa romper com o modelo reducionista das potencialidades do aluno autista.**

Palavras-chave_Alfabetização matemática. Educação inclusiva. Jogo digital. Mediação pedagógica.

I. INTRODUÇÃO

A Temática da Educação matemática inclusiva tem se apresentado, cada vez mais, em pesquisas tanto em revistas quanto em congressos e seminários de educação. Isso ocorre devido ao grande número de matrículas de alunos com diversas necessidades especiais no Brasil, como cegos, surdos, autistas, deficiência intelectual, entre outras variações. Este trabalho trata da investigação doprocesso de alfabetização matemática do aluno autista comjogo digital no processo de mediação do professor.

Ao se delimitar uma definição para educação inclusiva pode-se incorrer no risco de limitar seu conceito, mas é necessário entender que a premissa se dá pelo direito de todos terem acesso à escola, não somente a inserção, mas no sentido de se garantir meios para que o ensino seja, de fato, concretizado, não constando apenas em registros em lei. Essas garantias são como uma rede conectada a fim de que o produto final seja uma educação de qualidade e que realize a quebra de paradigmas. Segundo os autores [1], a relevância de dar continuidade na formação na área da matemática se dá para conceituar e dirimir dúvidas e novas reflexões diante de uma disciplina de grande abrangência na sociedade.

É fundamental a formação de professores, que deve começar pela graduação. As grades curriculares precisam ter bases inclusivas. Nesse sentido, no Brasil, foi instituídaa Lei 10.436 de 24 de abril de 2002, que dispõe, em seu artigo 4º, que a rede federal, estadual e municipal deve se encarregar de incluir o ensino de libras no magistério, no curso de fonoaudiologia e cursos de educação especial [2]. Essas reformas na lei são importantes para a mudança da educação desde que não estejam expressas apenas no papel. Diante dessa realidade, deve-se pensar em todas as necessidades especiais e propor conhecimento nos cursos superiores é o início de uma grande transformação da educação ensino superior.

Na alfabetização matemática [3], é necessário que o professor ofereça diferentes vivências com diversas estratégias para que o aluno possa construir seu próprio aprendizado. É nesse momento que destacamos a relevância do jogo digital para inclusão do aluno autista na aula de matemática. Nesse sentido, a pergunta norteadora é: Que aprendizagens são manifestadas pelo aluno autista no processo de alfabetização matemática com a interação de um jogo digital mediado pelo professor?

O jogo aqui é compreendido não como mediador, mas como ferramenta utilizada na mediação professor/aluno, a fim de que os conceitos possam ser trabalhados de modo desafiador e construtor de novos significados.

Refletindo a respeito da expressão Homo Ludens [4], destaca-se a importância do ato de jogar na constituição dos sujeitos. Nesse sentido, entende-se que o jogo será de grande relevância para oportunizar novas vivências do aluno com TEA. Por meio do jogo, se pode trabalhar a percepção, a atenção e a memória. Assim, compreende-se [5] que estes são fatores que influenciam no processamento de informações e na tomada de decisão e na ação.

O autismo é um dos temas bem desafiadores, pois o número de crianças que estão nascendo com autismo tem aumentado. Nesse sentido, estima-se [5] que uma em cada 160 crianças nascem com o transtorno do espectro autista (TEA) e essas estimativas aumentam globalmente.

As especulações a respeito das motivações do espectro não são concretas, podendo ser de ordem genética e ambiental, o que descarta os rumores de que vacinas, como caxumba e rubéola, seriam as causadoras [5]. Diante dessa realidade, é necessário que o professor, e aqui especificamente do professor de matemática, busque conhecimento e seja sempre apoiado por toda gestão escolar para, então, propor aulas que sejam inclusivas.

II. Objetivos

O objetivo geral do trabalho é analisar o processo de construção das primeiras conceituações matemáticas com a utilização do jogo digital na alfabetização matemática do aluno autista. Para isso, pretende-se:

Verificar como o aluno autista desenvolve os processos mentais na construção das percepções matemáticas, analisar como o aluno associa as ideias matemáticas do jogo digital com outras situações de ensino.

Verificar a receptividade do jogo digital pelo aluno autista, observar se o aluno associa as atividades do jogo a alguma experiência do cotidiano.

III. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A educação escolar inclusiva é mal compreendida pelo fato de não conseguir envolver todos os alunos em uma educação de qualidade e significativa [6]. Não basta estar presente, é necessário estar presente em todas as ações e acontecimentos escolares, ser sujeito ativo de sua aprendizagem.

É preciso estabelecer ideias e propostas de atividades, ações para aprendizagem significativa e transformadora.Em relação ao jogo digital como ferramenta, é relevante destacar que ele deve ser utilizado por meio da mediação do professor, que é papel da escola inclusiva.

Segundo o Manual de Diagnostico e Estatístico de transtornos Mentais DSM-V [7],os indivíduos com transtorno autista, transtorno de Asperger ou transtorno global de desenvolvimento recebem o diagnóstico de transtornos de espectro autista - TEA. O manual ainda dispõe que o TEA engloba transtorno como autismo infantil, autismo de Kanner, atípico e desintegrativo da infância [7]. Essas conceituações são frutos de grandes estudos, cujo precursor é Léo Kanner que, na década de 1940, realizou um estudo com 11 crianças que mantinham características semelhantes no processo de desenvolvimento, ao qual intitulou "Disturbios austísticos do contato afetivo", com presença de movimentos estereotipados. Kanner relatou, em seu estudo, a dificuldade em se relacionar e manter algum tipo de comunicação e atividades ritualizadas com esses indivíduos [8]. As dificuldades de comunicação e interação social em crianças autistas podem ser identificadas como impróprias para idade, pouco contato visual, nunca participam de atividades em grupos, como brincadeiras, jogos, bem como a falta de empatia e a dificuldade de entender emoções [9].

Muitas vezes, se usa o termo "Cegueira mental" para designar o fato de ter dificuldade de entender as ideias de outras pessoas; geralmente a criança tem dificuldades em apontar coisas para os outros, usar gestos para estabelecer comunicação, usar gestos faciais para determinar emoções, manter a calma quando se sente frustrada, obter a noção de que alguém pode ajudá-la quando necessário [9].

Em crianças com TEA, podem-se desenvolver múltiplas sensibilidades e interesses sensoriais, lembrando que cada criança é única com nível de desenvolvimento diferente; a dificuldade em imaginar pode levar a se manter em atividades concretas não definidas, elas podem se concentrar em tato, sensação, bem como sensibilidades em texturas desde as partes do corpo ou objetos, como pele, cabelos e degustação de alimentos. Outro fator importante é em relação aos sons, como músicas altas, sons de animais, como latidos fortes, podem levar ao nervosismo excessivo [9]. Todos esses elementos precisamestar na construção de conhecimentos pelos professores porque é a partir deles que poderão reformular o currículo e adaptar atividades para o aprendizado inclusivo. A escola precisa estar preparada, é fundamental que os estudantes tenham um nível básico de conhecimento como mostra a Fig. 2 o índice de crescimento das estatísticas de nascimento de crianças autistas é de 1 em 54, vê-se o aumento desde 2004, essas crianças estarão em sala de aula e a escola deve atender as suas necessidades[10].

Fig. 1: Quantidade de casos por nascimentos. Centers for Disease Control and Prevention (CDC).

Fig. 2: Dificuldades do autista, imagens canva

A. Entendendo o desenvolvimento da imaginação, percepção e memoria para aprendizagem matemática

A psicologia moderna difere os níveis de imaginação, podendo ser criativa ou reprodutiva, se desenvolvendo por meio de experiências vivenciadas e por meio de processos verbais. Segundo psicólogos, as crianças em idade pré-escolar vive de fantasia e sua imaginação é fruto da memoria imediata, resultado de uma natureza reprodutiva e a imaginação, de fato, aparecerá em estágios futuros. Já a percepção, a começar pelo visual, segundo estudos da psicologia, se desenvolvem com métodos mais simples da ciencia natural, posteriormente essa teoria ganhou novos significados, sendo um processo bem mais complexo que envolve grandes processos de orientação, tomadas de decisões dentre outros [11].O autor cita sobre as cores, e pontua que o olho humano pode distinguir até dois ou três milhoes de matizes diferentes, mas que clasifica apenas vinte e cinco cores. A percepção é uma atividade cognitiva que depende de práticas humanas históricamente estabelecidas [12].

A memoria natural se constitui como expressão da retenção de experiências vividas, se parecendo bastante com a percepção. Até o ato simples de atar nós pode mudar a estrutura psicológica da memoria [12]. De acordo com o autor, conforme a criança se desenvolve, as atividades que evocam, bem como a sua função, mudam noprocesso das funções psicológicas.

Entender esses conceitos é necessário para, então, pensar sobre como reconstruir um currículo e planejar as aulas pensando em uma sala heterogênea, tão mista nas singularidades, sempre pensando em todos os alunos e nas fases em que estão. Entender esse processo muda todo o planejamento e seus resultados. O aluno autista não terá a mesma concepção de memória, de imaginação e oprofessor precisa entender esses detalhes no planejamento e na execução das atividades. Decorre daí os questionamentos: como posso falar de inclusão se não sei nada sobre ela? Como planejar as aulas de matemática para o ensino fundamental I, se não tenho o mínimo de conhecimento? Nesse cenário, o aluno estará na sala de aula, matriculado na escola, mas excluído por nossas práticas, pelos nossos conhecimentos. É preciso conhecer suas limitações e focar em suas potencialidades, utilizando outros instrumentos. Saber sobre o aluno autista é o primeiro passo para propor inovações e avanços.

C. Educação Matemática Inclusiva

Para uma aprendizagem de qualidade e cheia de sentidos e significações, é necessário que as crianças tenham acesso a várias experiências, por meio de diversificadas atividades, podendo ser atividade experimental, com materiais diversificados e ricos de conceituações. Essas orientações se dão pelo fato de a criança aprender em decorrência das ações sobre o meio em que vive, sendo apresentadas gradualmente e repetidas vezes de formas diversificadas [13]. Para o autor, é necessária a exploração matemática na organização do trabalho do professor.

As bases das primeiras conceituações matemáticas precisam ser bem trabalhadas, de modo a conhecer os processos mentais básicos, porque esses conhecimentos serão uma base muito forte para as construções de novas conceituações matemáticas [13]. Um dos grandes impasses das aprendizagens matemáticas é o aluno já iniciar em aprendizagens mais avançadas sem estar minimamente trabalhadas os conceitos elementares; esse processo é necessário principalmente com as crianças autistas, pois elas precisam de um planejamento conectado e de progressão do ensino.

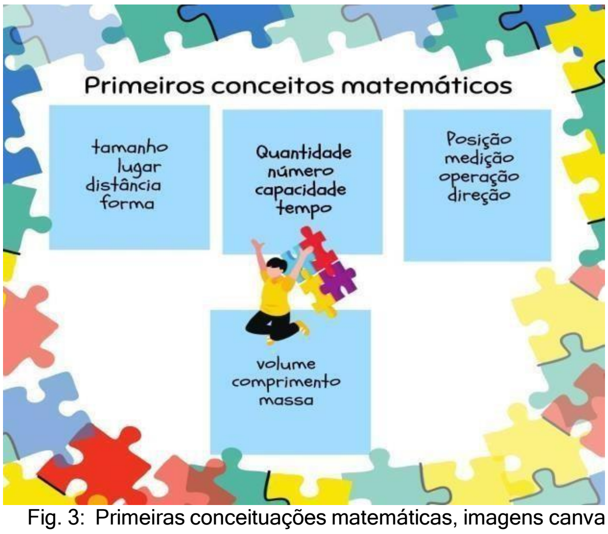


Fig. 3: Primeiras conceituações matemáticas, imagens canva

Para atender aos alunos autistas de acordo com suas necessidades ou qualquer outro aluno com necessidades especiais, o professor de matemática precisa se especializar, ter muitas leituras de materiais e experiências, mas, sobretudo, no seu processo de formação, ele necessita de atividades que aproximem a teoria da prática [1].

Outro fator importante é sempre contextualizar as conceituações, propor atividades que tenham sentido para o aluno, sempre reconectando redes que já foram instaladas; quando se trabalha com eixos de interesses do aluno a chance de estabelecer novas pontes é bem maior.

As crianças autistas aprendem com atividades que tragam significado, de acordo com seu eixo de interesse. Então, o professor não poderá ficar preso a formas pré-determinadas, pois essas crianças precisam articular saberes; por exemplo, há crianças que são fascinadas por dinossauros, então, o professor de matemática poderá utilizar esse grande interesse para trabalhar as conceituações e esse será seu ponto de partida.

É respeitando suas limitações e respeitando suas potencialidades que a inclusão pode ocorrer de modo a considerar esse sujeito como único e quebrar paradigmas de um ensino reducionista [8].

Propor materiais e organizar ambientes não é o bastante para que o aprendizado aconteça, é a forma que o professor conduz sua aula, que media as atividades que faz toda diferença. Os materiais e objetos por si não produzem grandes reflexões. É nos momentos de reflexão e de produção de ideias que se constroem aprendizados significativos [8].

B. O jogo digital no ensino da matemática

Estes conceitos trabalhados devem ser apresentados diversas vezes, utilizando diversas formas para apreender o mesmo conceito.[3] A proposta da atividade de acordo com o trabalho de mestrado, e aqui nos referindo especificamente ao jogo "O mundo azul da matemática" como produto educacional do mestrado, com as conceituações das formas geométricas, deve estar de acordo com suas potencialidades e sempre em avanço de progressão. Nesse sentido, é preciso pensar a matemática inclusiva e abarcar todos os elementos de acordo com a faixa etária, o nível de desenvolvimento e seus processos mentais, sempre focando nos desafios que a atividade do jogo proporcionará na promoção da aprendizagem.

O jogo aqui se trata não como mediador, mas, como ferramenta utilizada na mediação professor/aluno, a fim de que os conceitos possam ser trabalhados de modo desafiador e construtor de novos significados, a respeito da expressão Homo Ludens sobre a importância do jogar na constituição dos sujeitos, nesse sentido será de grande relevância para novas vivências do aluno TEA [14].

O jogo nesta proposta de ensino e aprendizagem voltada para educação matemática inclusiva, visa despertar o aluno autista por meio dos desafios estabelecidos para que ele possa estruturar mentalmente novas possibilidades de resolução de problemas e estratégias de respostas diferentes.

As ações do jogo, com elementos que trazem situações cotidianas, podem dirigir seu comportamento pelo significado que este pode proporcionar a este aluno. Os jogos matemáticos trabalham as seguintes habilidades envolvendo, lógica, concentração, memória, raciocínio, percepção de formas e faz parte da existência humanacomo atividade e intrinsicamente ligado a educação[15].

METODOLOGIA

A pesquisa referida neste trabalho têm abordagem qualitativa [16],e natureza participante aplicada. Nesse sentido, tem como instrumento a coleta de dados a aplicação do jogo. Atualmente, a pesquisa se encontra em fase de coleta de dados com aplicação de questionário e jogo.

As respostas do jogo e vivência será registrado em um caderno de campo. A pesquisa tem caráter participante, onde o observador que se relaciona com os elementoshumanos e o fenômeno a ser estudado tem acesso aos hábitos, atitudes e situações do cotidiano dos envueltos[17].

IV-CONCLUSÃO

Para que um aprendizado de qualidade, inclusivo e inovador ocorra, é necessário, primeiramente, o abrir de uma nova mente. E, a partir de então, com essa tomada de decisão de ser um professor inclusivo, que se interessa por cada sujeito e suas peculiaridades, o docente irá buscar novos conhecimentos, novas metodologias de ensino.

A formação do professor é fator primordial porque é a partir desses conhecimentos que ele buscará novas formas de trabalho, conhecendo o aluno autista e buscando encontrar seu eixo de interesse o que lhe traz sentido para planejar e reformular o currículo para atender a essas necessidades, remanejando os conceitos e conteúdos de acordo com sua realidade. As atividades e ações da escola precisam fazer sentido para este aluno.

Essas ações necessitam estar aliadas a mediações, demonstradas pelas comunicações verbais ou não [8]. A escola inclusiva é a escola para todos e de todos, porque até a forma de se dirigir às crianças pode trazer em seu bojo expressões excludentes se referindo "tenho 7 crianças da inclusão, crianças especiais, crianças com laudo", todos exemplos das variadas formas de a escola reforçar o preconceito e destacar suas limitações ao invés de ressaltar suas possibilidades e conquistas.

A escola não pode ser reprodutora da exclusão, ela deve ser a mola propulsora de uma sociedade justa e igualitária, e é dentro da própria escola que esse paradigma deve ser quebrado. As ações excludentes podem ser veladas ou explícitas; quando se faz comparações, fixamos modelos classificando com elementos que não as completam, reforçando as relações de poder que a escola exerce.

O professor de matemática inclusiva é o professor que se preocupa com todos os processos do ensino e aprendizado, desde conhecer os seus alunos, suas singularidades para, então, planejar suas aulas, propor materiais adequados. Além disso, é preciso pensar na mediação nasconfrontações pertinentes e delimitar novas redescobertas em suas práticas.

Eu sonho que um dia poderemos crescer em uma sociedade amadurecida onde ninguém seria "normal ou anormal", mas apenas seres humanos, aceitando qualquer outro ser humano, pronto para crescerem juntos.

Murkhopadhyay, 2003

REFERÊNCIAIS BIBLIOGRÁFICOS

[1] M. Ana Lúcia, M. Maria Cristina Souza de Alburquerque, M. Geraldo Eustáquio, *Desafios da Educação Matemática Inclusiva – Práticas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

[2] Brasil. *Lei 10.436 de 24 de abril de 2002*, art.2º. Língua Brasileira de sinais, Presidência da República. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/. Acessado em 10 de Outubro de 2021.

[3] L. Sergio, Educação Infantil e Percepção Matemática. 3ª edição. Campinas: Editora Autores Associados, ,2018.

[4] C.R.L.S.(2019). O desenvolvimento de Aplicativos Para Crianças com Autismo: processo de concepção, criação e avaliação- dissertação (mestrado) Universidade do Rio de Janeiro, Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira.

[5] Organização Pan Americana de Saúde e OrganizaçãoMundial de Saúde. *Transtorno do espectro Autista*. Disponível em https://www.paho.org/. Acessado em 10 de Outubro de 2021.

[6] M. Maria Teresa. E. *Inclusão Escolar - O que é? Por quê*?_ São Paulo: Editora Summus. 2015. CDD-302.

[7] DSM-V, Manual Diagnostico e Estatístico de Transtornos Mentais- American Psychiatric Association, Porto Alegre, Artmed, 2014.

[8] O. Siívia E. Aprendizes com autismo: aprendizagem por eixo de interesse em espaços não excludentes. 1ºimpressão,. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2016

[9] W. Chris. W. Barry. Convivendo com autismo e Síndrome de Asperger - Estratégias Práticas para Pais e Profissionais- Ilustrações de Oliver Young. São Paulo: M. Books do Brasil editora, 2008

[10] Center for Desease Control and Prevention- https://www.cdc.gov/ acessado em 10 de Outubro de 2021.

[11] L. Alexander, R. *Desenvolvimento Cognitivo: seus fundamentos culturais e sociais.* Tradução FernandoLimongeli Gurgueira. São Paulo: Editora Ícone.,2008.

[12] V. Levi.S; A Formação Social da Mente, tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira, 2007.

[13] L. Sergio, Educação Infantil e Percepção Matemática. 3ª edição. Campinas: Editora Autores Associados, ,2018.

[14] C..R.L.S.(2019). O desenvolvimento de Aplicativos Para Crianças com Autismo: processo de concepção, criação e avaliação- dissertação (mestrado) Universidade do Rio de Janeiro, Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira.

[15] M.J. E; FOSSA.J.A**.** Razões Sócio-histórico- filosófico - científicas para usar os jogos no contexto ensinoaprendizagem de matemática. Anais do VIII ENEM - Comunicação Científica GT 7 - Formação de Professores queEnsinam Matemática VIII Encontro nacional de educação matemática

[16] M. Ludki . A.Marli, E.D.A. , Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas Abordagens Qualitativas São Paulo: EPU, 1986

[17] RICHARDSON, Roberto Jarry e colaboradores; Pesquisa Social: Métodos e Técnicas, 3ª edição, editora Atlas- São Paulo- 2015.