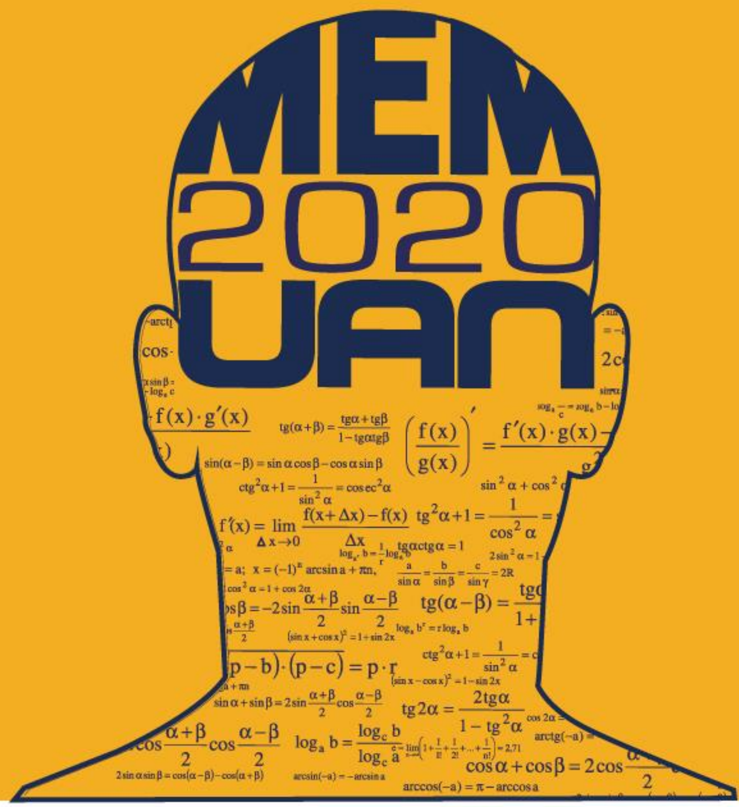
ACTA
SIMPOSIO DE MATEMATICAS Y EDUCACION MATEMATICA

ISSN ONLINE: 2346-3724



Vigilado por el Ministerio de Educación Nacional.

Volumen 7 - No. 2

Año 2020

Organiza:

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO

Oficina de los programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática
Teléfono: (+57) 320 420 60 97
E-mail: mem@uan.edu.co - director.doctoradoem@uan.edu.co
Sede Federmán Calle 58ª No 37 - 94
Bogotá D.C. - Colombia

Patrocinan:

Universidad Pedagógica Nacional, Universidad del Rosario, Konrad Lorenz, Pontificia Universidad Javeriana, La Salle, Universidad Surcolombiana, Universidad La Gran Colombia, Universidad del Quindío, Unillanos, Uptc, Universidad Autónoma de Colombia, Universidad Central, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Militar Nueva Granada

Auspicia:

Magisterio Editorial, CASIO, Statur, Gobernación de Cundinamarca, McGraw Hill

X Simposio de Matemática y Educación Matemática y el
IX Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador
Volumen 7, No. 1 - MEM2020
ISSN: 2346-3724

Gladys A. Villamarín T - Universidad Autónoma de Colombia

Fabián Sánchez Salazar - Universidad Central de Colombia

Mauricio Bogoya – Universidad Nacional de Colombia

Carlos A. Diez Fonnegra - Universidad Konrad Lorenz

Jesús Fernando Novoa Ramírez - Universidad Javeriana

Mauricio Penagos – Universidad Surcolombiana

Publio Suarez Sotomonte - Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja

Dilber Albeiro Baquiro – Universidad de la Amazonía

Diana Contento – Universidad de Cundinamarca

Ángela Cristina Zapata – Universidad de La Salle

Rafael Alberto Méndez – Universidad del Rosario

Secretario Científico:

Diana Carolina Pérez Duarte: Universidad Antonio Nariño

Miembros

Gerardo Chacón Guerrero

Rafael Ignacio Escamilla Forero

Lorena Ruiz Serna

Iván Useche Cifuentes

Diana Pérez Duarte

Comité Científico

Mary Falk de Losada- Universidad Antonio Nariño, Colombia

Mauro García Pupo -Universidad Antonio Nariño, Colombia

Juan E. Nápoles Valdés- Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

Mabel Rodríguez - Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

Ricardo Abreu Blaya - Universidad de Holguín, Cuba

Miguel Cruz Ramírez - Universidad de Holguín, Cuba
Osvaldo Jesús Rojas Velázquez - Universidad Antonio Nariño, Colombia
Gerardo Chacón - Universidad Antonio Nariño, Colombia
Rafael Sánchez Lamoneda - Universidad Antonio Nariño, Colombia
Marcel Pochulu - Universidad Nacional de Villa María, Argentina
José María Sigarreta Almira - Universidad Autónoma de Guerrero, México
Leonor Camargo - Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
Miguel Ángel Borges - Universidad Antonio Nariño, Colombia

PRESENTACIÓN

El X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática y el IX Congreso Internacional de Matemáticas asistidas por Computador, MEM 2020, organizado por la Universidad Antonio Nariño los días 21 y 22 de febrero de 2020 convocó a numerosos y destacados docentes e investigadores provenientes de diversas latitudes. Dos días de intensa actividad permitieron compartir valiosas experiencias, estudios y resultados que dan cuenta de la expansión de la Educación Matemática como disciplina científica.

En un primer volumen de las Actas de MEM 2020 se presentan resúmenes de conferencias, cursos y comunicaciones presentadas en el evento. En este número recogemos artículos escritos por nuestros estudiantes de los programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática con la intención de que tengan oportunidad para iniciarse en la escritura de artículos de investigación científica. Además, la publicación está abierta en extenso, previa solicitud de los autores y correspondiente arbitraje, de las contribuciones presentadas por asistentes al evento.

Gerardo Chacón

Editor en jefe

Bogotá, Colombia. Agosto de 2020.

Contenido

ARTÍCULOS COMPLETOS

PLATÓN, EDUCADOR MATEMÁTICO

Mary Falk de Losada
Doctorado en Educación Matemática
Universidad Antonio Nariño
Bogotá, Colombia

Si bien es claro que la tecnología ha cambiado todo en nuestras vidas, y ha tenido y sigue teniendo un impacto importante en el aprendizaje de la matemática, y, por otra parte, que la educación matemática en los últimos cuarenta o cincuenta años se ha establecido como una disciplina independiente con vibrante actividad investigativa y avances teóricos notables, es interesante ver lo actuales que son las reflexiones acerca de la educación matemática de un gran pensador que vivió hace casi 2500 años.

Además de ser el filósofo que introdujo una gran cantidad de las preguntas que la tradición intelectual occidental ha seguido explorando, Platón fue el fundador de la Academia alrededor del 387 a.C., en los jardines de Academos, escuela que fue "dedicada a investigar y profundizar en el conocimiento. En ella se desarrolló casi todo el matemático de la época. ["https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas" \o "Matemáticas"] También se enseñó medicina, retórica y astronomía. Sin embargo, su inclinación por los estudios matemáticos llevó a Platón a poner en el frontispicio de la Academia la siguiente inscripción: «Ἀγεωμέτρητος μηδείς εἰσίτω» ('Aquí no entra nadie que no sepa geometría')".

Las contribuciones de Platón a lo que hoy se llama educación matemática son variadas y en ellas podemos reconocer muchas que siguen teniendo actualidad. En lo que sigue haremos un tour de sus contribuciones que se encuentran dispersas en sus diálogos.

LA DIDÁCTICA

En su diálogo Leyes, Platón habla de la educación matemática en Egipto como un ejemplo de lo que debería hacerse también en Grecia, consideraciones cuyos ecos siguen oyéndose en el mundo contemporáneo cuando se observen los resultados de los exámenes PISA o TIMSS y se admira los sistemas educativos de Finlandia o Singapur.

Platón nos dice que los niños en las escuelas egipcias aprenden distribuciones y combinatoria, usando conjuntos de copas de oro, plata y cobre, o sea, manipulativos. Que se incorporan las aplicaciones elementales de la aritmética en los juegos de los niños, o sea, se practica la lúdica. Que progresan a ejercicios en la medición de longitudes, superficies y contenidos cúbicos, o sea, hacen laboratorios de matemáticas. Platón subraya que los griegos (helenos) son ignorantes de lo que aprenden los egipcios. En resumen, en esto se revela el Platón didacta.

¿OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS?

Platón también se dedica a identificar errores en el pensamiento matemático. En el mismo diálogo Leyes combina la identificación de errores, la didáctica y el currículo diciendo que uno de los errores frecuentes es considerar que todas las cosas son conmensurables, abogando porque se aprenda a distinguir entre lo conmensurable y lo no conmensurable, diciendo que hay cosas que los jóvenes deben aprender jugando y que éstas deben colocarse entre los estudios requeridos.

DISEÑADOR DE CURRÍCULOS

Platón es también diseñador de currículos. En los diálogos República y Leyes, discute el currículo apropiado para formar al filósofo (y a los gobernantes, recomendando que sean filósofos los que gobiernan). Nos dice que el estudio de la matemática conduce naturalmente a "despertar el pensamiento". Además, afirma que "las cualidades de número aparentemente conducen a la aprehensión de la verdad" y recomienda que un filósofo debe aprenderlas "porque debe ascender por encima de la región del devenir y dominar esencias o no podrá nunca volverse un verdadero pensador".

Promueve la contemplación de la naturaleza de número, por medio del pensamiento puro para la conversión del alma a (la búsqueda de) la esencia y la verdad. En la matemática se habla de "unidades que sólo se pueden concebir por medio del pensamiento puro y las cuales no pueden ser tratadas de ninguna otra manera." Nos recuerda de aquellos que defienden el currículo de matemáticas diciendo que la matemática constituye una forma de pensar y por ende deben ser aprehendida para desarrollar el pensamiento de quien las estudia.

Platón como diseñador de currículos recomienda además el estudio de la geometría, la geometría de sólidos, la astronomía y la música en La República.

En Leyes, Platón aboga por la búsqueda de verdades necesarias como fin del aprendizaje, diciendo que se debe empezar por estudiar aritmética y astronomía, y pregunta por cuáles ciencias se deben estudiar, por separado o mixtas, diciendo que con la guía de las ciencias nobles se debe estudiar todo lo demás.

MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

Platón considera la diferencia entre la matemática pura y la aplicada en el Filebo diciendo que hay dos aritméticas, uno para el filósofo y otro para el hombre cotidiano. Nos dice que para el filósofo cada unidad es igual a cada otra unidad en sus instancias infinitas, pero que cotidianamente se habla de dos ejércitos o de dos vacas y en el Político habla de quienes equivocadamente asumen que ciertas cosas son iguales y las tratan como si fueran unidades aritméticas.

En el diálogo Filebo se indaga acerca de si una clase de conocimiento es más pura que otra, diciendo que la matemática pura es inmensamente superior en cuanto a exactitud y veracidad, que hay dos artes de enumerar y dos artes de medir haciendo clara referencia a la matemática pura y la aplicada, y a las medidas exactas y las aproximaciones. Platón luego opta por privilegiar la búsqueda de la matemática pura, que se dedica a la verdad más plena para poder poseer en mayor medida la razón y la inteligencia en su pureza.

En el diálogo República comenta al respecto a su interlocutor, sin embargo, "Me siento entretenido … por el miedo aparente que sientes de que las multitudes supongan que tú estés proponiendo estudios inútiles", claramente mostrando que él también ha lidiado con quienes preguntan ¿para qué sirve la matemática?

En el Filebo Sócrates está discutiendo qué se puede considerar que es el bien, dando como posibilidad la actividad más pura posible de pensamiento, teniendo en cuenta que el bien no puede residir en el cuerpo sino en el alma. Primero divide el conocimiento en dos partes, en conocimiento técnico y conocimiento que concierne educación y cultura. Considerando el conocimiento técnico, Sócrates separa lo que concierne numerar, medir y pesar como los componentes más importantes, advirtiendo que fuera de ellos es negligible el conocimiento involucrado. Habla de que lo que queda para las artes después de estos tres componentes son aciertos apenas suertudos, devengados de la práctica, mencionando específicamente la música.

Así se divide el conocimiento técnico en dos partes, el que es semejante al conocimiento de la música construido desde la práctica y el que es semejante a la arquitectura y la carpintería que requiere instrumentos afinados y un mayor grado de exactitud. Procede a hablar del arte de numerar, distinguiendo a la vez dos categorías, el arte de numerar del hombre común y el del filósofo. Aquí se encuentra la referencia anterior que hemos hecho a que el primero habla de dos vacas o dos ejércitos, mientras que para el filósofo todas las unidades deben ser idénticas. Prosigue a establecer que el conocimiento del filósofo es superior en precisión y que la cognición de lo que existe en realidad, sin nunca variar, es la forma más pura del conocimiento.

CIENCIA COGNITIVA Y EPISTEMOLOGÍA

Platón se dedica además al análisis de la ciencia cognitiva como es común en educadores matemáticos (por ejemplo, los que pertenecen al grupo de estudio PME (Psychology and Mathematics Education)). En el Teeteto, considera la cuestión de si el conocimiento se adquiere por medio de la percepción, produciendo una serie de argumentos pertinentes. Pregunta: ¿Con cuál órgano se realiza la facultad que nos dice qué es común en todas las cosas?, ¿qué se entiende por "existe" o "no existe", por similitud y diferencia, y por identificar una unidad y los números en general?

Responde, por medio del diálogo, que la misma mente es su propio instrumento para contemplar estos términos que se aplican a todas las cosas. Platón argumenta que la mente contempla algunas cosas por su propia instrumentalidad y contempla otras cosas por medio de las facultades corporales o sentidos. Establece que todas las impresiones que penetran la mente por medio del cuerpo son cosas percibidas desde el nacimiento, pero que las reflexiones acerca de ellas, que existen, que son o no útiles, que son semejantes o diferentes, sólo vienen, si es que vienen, por medio de un proceso largo y complejo de educación. Platón es claro en afirmar que el conocimiento no reside en las impresiones, sino en nuestras reflexiones acerca de ellas, y es sólo en estas reflexiones que es posible comprender lo que es universal y necesario, la existencia (el ser) y la verdad.

APRENDIZAJE

En el Teeteto, Platón, en boca de Sócrates, insiste en diferenciar entre las percepciones que entran por los sentidos y la materia de conocimiento que se obtiene reflexionando sobre las percepciones. Se llega a concluir que es la misma mente en sí el instrumento para contemplar los términos comunes que se aplican a todas las cosas, o sea, las generalizaciones.

Y más adelante en el mismo diálogo se considera la aritmética como el procurar buscar pedazos de conocimiento acerca de todos los números, pares o impares. Es la ciencia en la cual un hombre tiene bajo control pedazos de conocimiento acerca de los números y los puede entregar a otra persona. Cuando los entrega, lo llamamos "enseñar" y cuando el otro los recibe lo llamamos "aprender", y cuando éste los posee lo llamamos "conocer".

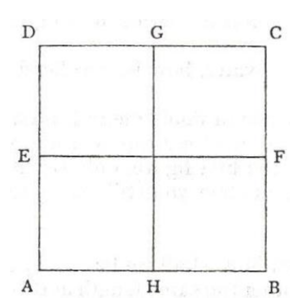
Pero, insiste Sócrates, hay dos formas de conocer, porque si por mucho tiempo alguien ha poseído algún conocimiento, algo que ha aprendido y sabe, es de todas maneras posible llegar a conocer las mismas cosas nuevamente, recuperándolas porque no las tenía presente en la mente. Aquí Sócrates busca desacreditar un sofisma que intenta establecer que el aprendizaje es imposible, porque si uno ya sabe algo no hay nada que aprender y si uno no conoce algo es imposible que sepa que lo debe buscar.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

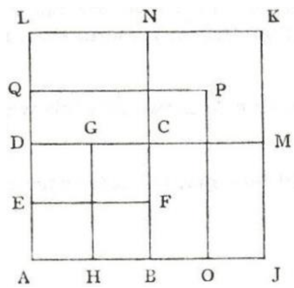
Como cognitivista Platón aborda también la cuestión: ¿qué es aprender?, revelando en el Menón (así como en el Fedón) su tesis que aprender es recordar. El asunto se dirige a tratar de explicar cómo es que una persona puede producir una idea novedosa o genial al pensar un problema si no se le ha enseñado previamente esa idea que se ha mostrado capaz de formular. Plato busca que otros acepten su explicación acerca de cómo es posible el aprendizaje en un episodio en que las acciones de Sócrates ilustran el famoso método socrático, pero además puede verse como un ejemplo de la matemática que involucre la resolución de problemas no rutinarios o retadores.

En el Menón la condición del pupilo de ser un esclavo tiene la intención de mostrarnos que no tiene conocimiento matemático previo, y que para él todo es nuevo. El problema planteado por Sócrates es dibujar un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado.

El esclavo comienza sugiriendo que se duplique la longitud del lado del cuadrado, y Sócrates, dibujando en la arena o el polvo, le muestra que el cuadrado que resulta tiene cuatro veces el área del cuadrado original.

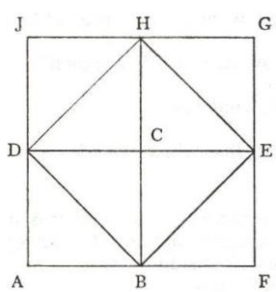


La segunda sugerencia que hace el esclavo es extender los lados del cuadrado dado por una distancia igual a un medio de la longitud de un lado dado. Sócrates responde con el siguiente diagrama.



Mostrando diagramáticamente (demostración sin palabras) que el cuadrado resultante tiene dos y un cuarto veces el área del cuadrado original. En cada instancia Sócrates, por medio de preguntas dirigidas al esclavo y contestadas por éste y basándose en diagramas o demostraciones sin palabras, lleva a que concluya que su conjetura es falsa. Adicionalmente Sócrates comenta que el esclavo ya ha aprendido algo, puesto que no formula otra conjetura rápidamente, o sea, antes pensaba que sabía la solución, pero ahora se ha dado cuenta que no sabe. Sócrates lo ha lleva a un estado de perplejidad, y afirma que ahora el esclavo descubrirá la solución porque se ha comprometido con un proceso de búsqueda de la verdad.

Sócrates vuelve al cuadrado que tiene área cuatro veces el área del cuadrado original y dibuja las diagonales que se muestran en el siguiente diagrama preguntando: "Ahora no es cierto que esta línea que va de esquina a esquina corta cada uno de estos cuadrados por la mitad?"



Prosigue Sócrates preguntando acerca del número de mitades en la figura BEHD (respuesta del esclavo: 4), y el número de mitades en el cuadrado original ABCD (respuesta: 2), y luego preguntando por la relación entre 4 y 2. Sócrates hace énfasis en que el esclavo había dicho que no sabía cómo resolver el problema, pero que, presentando el dibujo y haciendo las preguntas apropiadas, fue capaz de responder todo correctamente, y darse cuenta que se había resuelto el problema propuesto de duplicar un cuadrado dado.

Como se dijo, Platón ofrece el episodio como una muestra de que "aprender es recordar" (Sócrates hizo que el esclavo recordara algo que había visto en una existencia anterior y por ello pudo responder correctamente a las preguntas que le formularon.) Pero, nosotros lo podemos interpretar como un ejemplo claro de aprendizaje por descubrimiento guiado, repleto de varios otros componentes de interés para quienes promueven el aprendizaje por resolución de problemas.

LA DEFINICIÓN

Para Platón, la definición matemática es vista como un paradigma para la definición de intangibles en general. Dirigiéndose a la definición matemática, en el diálogo Teeteto Platón habla acerca de la demostración de que las raíces de los números primos hasta 17 sean inconmensurables con la unidad, o sea, irracionales, y hace que uno de sus personajes afirme: "La idea se nos ocurrió, viendo que estas raíces cuadradas son infinitas en número, que debíamos llegar a un solo término colectivo para designarlos todos." ¡Qué interesante ver ligada la definición a la noción de infinitas ejemplificaciones que se desprende no de la experiencia sino de la reflexión acerca de la experiencia! Por otra parte, extendiendo un poco lo que se ha señalado anteriormente en nuestro modesto escrito, en el mismo diálogo Teeteto afirma uno de sus personajes que: "A mí me parece que la mente en sí es su propio instrumento para contemplar esos términos comunes (existencia y no existencia, semejanza y no semejanza, mismidad y diferencia, unidad y números en general, paridad e imparidad, …")

LA HIPÓTESIS Y LA AXIOMÁTICA

En los diálogos Menón y Republica Platón aborda también el lugar que debe tener el razonamiento por hipótesis – o axiomática – dentro de unas consideraciones que pueden llamarse semióticas. Conversando acerca de que, en matemáticas, los argumentos proceden por hipótesis, Platón esclarece qué entiende por hipótesis. Es mirar una cosa como si fuera conocida y luego tomar las hipótesis como si fueran suposiciones absolutas, aceptadas por todos porque son obvias para todos, argumentando acerca del cuadrado o la diagonal en sí, y no acerca de los dibujos que se han hecho de ellos. "Lo que realmente ven es la realidad detrás de la imagen haciendo uso sólo de ideas puras, moviéndose de idea en idea, y terminando en ideas."

EL CONOCIMIENTO ES PODER

En Gorgias, Sócrates emprende una discusión acerca del mayor bien posible. Gorgias, un profesor de retórica, cede la palabra a uno de sus pupilos, quien sostiene que el saber persuadir es el verdadero poder. Llama la atención porque en la modernidad es ampliamente aceptado, siguiendo a Bacon, que el conocimiento es poder. El propósito de Sócrates es oponerse a la posición que defiende el pupilo de Gorgias, estableciendo que la razón humana es un don prácticamente sagrado que se tiene para buscar y llegar a la verdad y el bien, y que el uso de esa facultad para persuadir sin comprometerse con la búsqueda de la verdad es la perversión intelectual más atroz que puede haber.

LA TECNOLOGÍA

Por último, en el Fedro, hay un excelente pasaje en el que Sócrates denuncia los peligros de enseñar a la gente a leer y escribir. El rey Thamus de Egipto, ante los consejos del sabio Theuth, habla en contra de tal enseñanza diciendo: "Si los hombres aprenden esto, sembrará el olvido en sus almas porque cesarán de ejercer la memoria, llamando las cosas de la memoria no desde adentro de sí mismos, sino de marcas externas. Lo que usted ha descubierto no es una receta para la memoria sino para el recordatorio. Y no es la verdadera sabiduría que usted ofrece a sus discípulos, sino sólo su semblanza, porque al decirles muchas cosas, sin enseñarles, hará que parezcan conocer mucho, cuando en gran parte no saben nada, y como hombres estarán no llenos de sabiduría sino de creerse los sabios, y serán un gran peso para sus colegas."

Sócrates prosigue diciendo "…con las palabras escritas parece como si te hablan como si fueran inteligentes, pero tú les preguntas cualquier cosa acerca de lo que dicen, con el deseo de recibir instrucción, y ellas siguen diciéndote exactamente la misma cosa para siempre. Y una vez se ponga algo por escrito, la composición, sea cual sea, anda por allí, cayendo en manos de quienes no tienen nada que ver con ella; no sabe cómo dirigirse a las personas apropiadas, y no dirigirse a las que no lo son. Y cuando es tratada mal e injustamente abusada, siempre requiere que su progenitor venga a su rescate, siendo incapaz de defenderse o ayudarse a sí misma."

La palabra escrita no puede hacer más que recordar a la persona que sabe aquello con el cual el escrito se concierne. Pero, prosigue Sócrates, hay otro tipo de discurso mejor y más efectivo "…que es el acompañante del conocimiento, que está escrito en el alma de quien aprende, que puede defenderse a sí mismo, y que sabe con quién hablar y a quién no decir nada."

Platón defiende la importancia del diálogo, el intercambio, entre él que enseña y él que aprende, como el medio más propicio para aprender. Hace recordar a quienes en el siglo XXI resisten o critican la tecnología de la calculadora (los alumnos no sabrán hacer operaciones, no se darán cuenta cuando por oprimir una tecla errada se obtiene un resultado incorrecto) o del software, o del aprendizaje adaptativo cuando el alumno se sienta solo frente al computador (no tendrán interacción con el profesor o con sus compañeros, no sabrán trabajar en equipo, no tendrán un "role model" a quien respetar y tratar de seguir).

CONCLUSIÓN

En este corto recorrido hemos mostrado que los educadores matemáticos seguimos discutiendo, analizando y haciendo propuestas acerca de situaciones, ideas y soluciones milenarias…. Hay grandes diferencias en las circunstancias, pero no cabe duda que Platón es un educador matemático que puede seguir compartiendo análisis y reflexiones con los expertos en educación matemática del siglo XXI.

REFERENCIAS

Hamilton, Edith & Huntingdon Cairns (Eds.). Plato: The Collected Dialogues including the Letters, Bollingen Series LXXI, Princeton University Press, Décimasegunda impresión, 1985. Traducción ad hoc.

https://es.wikipedia.org/wiki/Academia_de_Atenas

ECUACIONES DIOFÁNTICAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

Alfonso Romero Huertas
Universidad Antonio Nariño, alromero53@uan.edu.co

***Abstract*— This paper aims to strengthen the skills of eleventh grade students in solving problems with the use of diophantine equations, therefore, will initially provide a description of the subject through history and its importance in the development of mathematical thinking, also account will be taken of the contributions of some referents in problem solving mainly George Pólya and Alan Schoenfeld, fundamental authors in the analysis and discussion of the results of the research**

***Keywords*— Diophantine equations, problem solving, heuristics, Euclid's algorithm, Bezout's identity.**

Resumen— El presente trabajo tiene como objetivo fortalecer las habilidades de los estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas con el uso de ecuaciones diofánticas, por lo tanto, se brindará inicialmente una descripción de la temática a través de la historia y su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático; igualmente se dará cuenta de los aportes de algunos referentes en la resolución de problemas principalmente George Pólya y Alan Schoenfeld, autores fundamentales en el análisis y discusión de los resultados producto de la investigación.

Palabras claves— Ecuaciones diofánticas, resolución de problemas, heurísticas, algoritmo de Euclides, identidad de Bezout.

I. INTRODUCCIÓN

Es difícil apartar el recuerdo de la niñez, los primeros contactos con las matemáticas, las operaciones básicas y los problemas de aplicación como en algunos contextos se mencionaba, la dificultad, el dolor de cabeza para muchos y el disfrute para otros. Según (Arcavi y Friedlander, 2007), la resolución de problemas ha sido considerada desde siempre como el foco en las matemáticas.

Su desarrollo teórico se da en el siglo XX con autores como Pólya, Lakatos, Schoenfeld, de Guzman en otros; con su obra “How to solve it” a mediados del siglo XX Pólya representa uno de los más importantes referentes en este campo, él se centra en cuatro pasos para resolver un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Unas cuatro décadas más adelante Schoenfeld en quien se fundamenta este documento, un matemático norteamericano, publica su libro “Mathematical Problem Solving”, basado en los trabajos realizados con estudiantes y profesores en los que les proponía problemas a resolver siguiendo las ideas de Pólya.

Igualmente, el planteamiento y resolución de ecuaciones algebraicas es un tema que se desarrolla en secundaria desde los primeros grados, a su vez, permite el estudio de los diversos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales), en forma contextualizada mediante situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, las ecuaciones diofánticas que corresponden a la temática que trataremos aquí, son desconocidas en la educación secundaria, por lo menos en Colombia no se incluyen dentro de los lineamientos curriculares, e igualmente no se tienen antecedentes de la implementación por iniciativa propia en alguna institución educativa.

Este tipo de ecuaciones lleva su nombre en honor a Diofanto, matemático griego del año 275 a.C. que las estudió extensivamente y dio soluciones a algunas de ellas. Su vida se desconoce por completo; sin embargo, ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado "La Aritmética" en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones de primero y segundo grado como sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del Álgebra y a las ecuaciones de primer grado se les llama también "ecuaciones diofánticas". (Albedea, 2011)

Las ecuaciones diofánticas constituyen una potente herramienta en la resolución de problemas que involucran los números enteros positivos, el estudio de los mismos corresponde a una de las ramas más antiguas de las matemáticas, ya que los enteros positivos se han usado durante mucho tiempo, más que cualquier otro sistema numérico, el interés se debe principalmente en que las ecuaciones diofánticas están en relación directa con la naturaleza de las incógnitas. Por ejemplo, si lo que se plantea en una ecuación hace referencia al volumen de un líquido, a la masa de un cuerpo, es decir variables continuas, no importará en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, está claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras (variables discretas), ya que carecería de sentido dividir a una persona en trozos.

Igualmente, “no todas las ecuaciones diofánticas tienen un método (algoritmo) que permita resolverlas de manera sistemática” (Gracián, 2013, p. 1). De hecho, la mayoría no lo tienen. La búsqueda de un método de resolución para ecuaciones concretas ha sido, durante mucho tiempo, objeto de estudio por matemáticos de la talla como Euler o Lagrange, y más recientemente de Minkowski o Chevalley.

Sin embargo, se considera que estas ecuaciones encierran procesos de resolución de problemas que rescatan valiosos recursos tanto pedagógicos como conceptuales, además de ofrecer una rica información histórica de la misma. Al echar un vistazo en la historia, encontramos escenarios en que los algoritmos de resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones han ocupado a muchos matemáticos a lo largo del tiempo. Por ejemplo, se conoce la existencia de problemas resueltos por procedimientos algebraicos que datan del año 3000 a.C.

De acuerdo con Barrantes et al. (2007), el estudio de las ecuaciones diofánticas permite reforzar conocimientos adquiridos en cursos y niveles anteriores, además de brindarle al docente ideas para motivar a sus estudiantes en el estudio de la resolución de ecuaciones y, por qué no, incrementar el interés por la matemática.

Por lo anterior se ha propuesto a estudiantes de grado undécimo algunos problemas los cuales pueden ser solucionados mediante ecuaciones diofánticas, se analizaron los resultados y heurísticas que los estudiantes utilizan en el intento o solución de las mismas. Al respecto, los procedimientos que presentan los estudiantes recibieron retroalimentación a la luz de la definición, algoritmo y características de las ecuaciones diofánticas como una forma de complementar la actividad inicialmente propuesta.

La investigación tiene como objetivo fortalecer las habilidades de los estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas que requieren un planteamiento con dos variables. El uso de las ecuaciones diofánticas como hipótesis inicial, efectivamente resultó como la herramienta que facilitó el desarrollo de las actividades propuestas y por ende alcanzar los objetivos planteados.

Como se mencionó anteriormente, este trabajo tiene como referencia principalmente los aportes de Schoenfeld, en cuanto al análisis del aporte de los estudiantes en la solución de los problemas planteados; es de interés este autor, en cuanto la mayoría de sus obras está dedicada al trabajo con estudiantes y docentes, actores principales en el contexto educativo en el cual se desarrolló la presente investigación.

Específicamente, en esta investigación se presenta los resultados de la experiencia en resolución de problemas mediante ecuaciones lineales diofánticas, en una población de estudiantes de grado undécimo, para el análisis se tendrá en cuenta además de las heurísticas empleadas por los estudiantes, otros factores tales como: recursos, control y creencias, los cuales según Schoenfeld son igualmente relevantes a la hora de emprender la resolución de un problema.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Teniendo en cuenta los resultados de los estudiantes en el desarrollo de cada problema planteado, inicialmente se realizó un análisis de los recursos que ellos utilizaron, según Schoenfeld estos se refieren a los conocimientos previos que poseen los individuos, luego es entonces de esta manera como se identifica el juego de algoritmos que el estudiante aplica en sus primeros intentos de solución, acompañados de métodos de solución de sistemas de ecuaciones (reducción, igualación y sustitución principalmente), fue posible igualmente evidenciar el uso de los gráficos y organización de los datos en tablas, articulando las condiciones indicadas y deduciendo otras, en la mayoría de los casos procedimientos defectuosos que no les permitió avanzar en una dirección favorable de solución.

Si bien es cierto que la mayoría de los estudiantes no lograron en primer lugar una solución a los problemas planteados solamente con los conocimientos previos, si lograron entender los problemas; según Pólya (2004) el entendimiento es un asunto que determina el control sobre el problema, el sujeto deberá tener claro de lo que trata el problema antes de resolverlo, este aspecto es común a la primera fase del método de Pólya, “comprender el problema”, ya que resulta fundamental la interpretación de la situación problemática para su resolución.

Teniendo en cuenta lo anterior, donde se evidencia además que el hecho de comprender el problema no asegura una solución acertada, si permite identificar conocimientos previos, habilidades y competencias en contexto ya sea como fortalezas o dificultades, específicamente en la investigación en el grupo de estudiantes se ha evidenciado el uso algorítmico referente a las operaciones básicas en primer momento, el cual pocas veces es efectivo en etapa donde corresponde más la ejecución de estrategias de abordaje del problema; se evidencia como procedimiento seguido la búsqueda de alguna estrategia que además de que les apoyó en la comprensión, les generó caminos hacia la resolución, es aquí entonces donde aparece la representación pictórica principalmente en el problema de las canicas de Emilio y la particularización sistemática en los problemas que hacen referencia a la fecha de nacimiento de Claudia y las compras de Jorge Luis. (ver anexo 01: Ejercicios Propuestos).

Al considerar los estudiantes varias formas de abordar los problemas, para luego seleccionar una específica sería una acción que involucra al control de manera directa ya que el estudiante debe optar por el modo de resolución que más le convenga en cada situación. Lo cual y de acuerdo a Schoenfeld el control hace referencia a cómo un estudiante controla su trabajo, y descubre si en algún momento de la resolución del problema seleccionó erróneamente los procedimientos y herramientas necesarias; es decir, la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer, con qué cuenta, por lo tanto, conocerse en cuanto a la forma de reaccionar ante esas situaciones.

Por otra parte, en intervención directa del investigador, se comparte las características de las ecuaciones diofánticas al grupo de estudiantes, así como la identidad de Bezout y el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de dos números; trabajo que se realiza ejemplificando   y simultáneamente desarrollo uno de los problemas propuestos inicialmente.

III. RESULTADOS

En esta sección se da un reporte de la ejecución del proyecto, es decir, del trabajo en los problemas por parte de los estudiantes.

Problema 1: Claudia toma el día de su nacimiento y lo multiplica por 7 y el mes por 5, suma los resultados y obtiene 58. ¿cuál es la fecha de su cumpleaños?

Frente a este problema, los cuatro estudiantes a quienes se les presentó, intentaron en primer lugar a través de la experimentación, es decir asignando valores particulares para el día y el mes y siguiendo las condiciones del problema, método que les resulta demasiado dispendioso y no logran la solución esperada; sin embargo, uno de los estudiantes insiste y reemplaza sólo una de las incógnitas, luego despeja para averiguar la otra (ver la imagen 01)

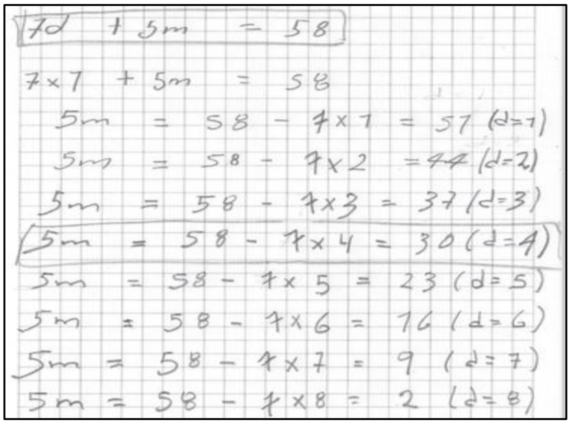


Imagen 01: Trabajo de un estudiante en el problema 1

Como podemos observar en la imagen que corresponde al trabajo del estudiante, existe un planteo de la situación que atiende efectivamente a las condiciones del problema, el procedimiento consiste en ir particularizando para el día (d) y despejando el término que contiene el mes (m); al establecer esta organización el estudiante se da cuenta que la solución la obtiene cuando a la derecha tiene como resultado un múltiplo de 5. En este caso m = 6 y d = 4. Similar procedimiento utiliza este estudiante para el problema 2: (Jorge Luis ingresa a una librería para comprar cuadernos de USD$ 2 y bolsos de USD$ 5; él dispone de USD$ 78 para realizar dicha compra. Indique el número de formas en que Jorge Luis puede realizar esta compra, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo), como es posible evidenciar en la siguiente imagen. (Imagen 02)

Imagen 02: Trabajo de un estudiante en el problema 2

Frente a este problema el estudiante tiene en cuenta sólo a los múltiplos que le favorecen, esto indica que acude a la estrategia y hallazgo en el problema anterior, es decir simplifica la particularización.

Respecto al problema número 3: Emilio tiene una bolsa llena de canicas, las quiere organizar en dos rectángulos de 2 y 3 filas. Durante cuatro días lo ha hecho, obteniendo en cada caso un número diferente de canicas en cada rectángulo. Calcula el menor número de canicas que puede tener Emilio.

El estudiante de quien se comparte los problemas 1 y 2, no desarrolla este problema, él argumenta que con los datos que ofrece el mismo, no es posible solucionarlo. Por su parte otro estudiante utilizando como recurso la representación pictórica, aborda este problema como se muestra en la siguiente imagen. (Imagen 03)

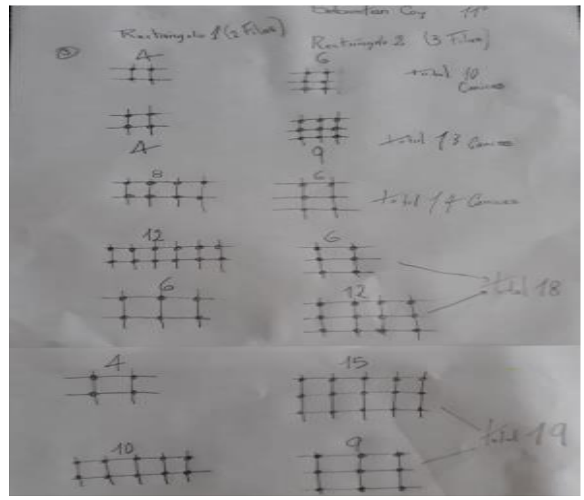


Imagen 03: Trabajo de un estudiante en el problema 3

El estudiante experimenta partiendo de 10 canicas, mínimo número que le permite construir los dos rectángulos de 2 y 3 filas, prácticamente va incrementando una canica hasta completar 28, número mínimo que le permite encontrar las cuatro formas posibles de distribuirlas en los dos rectángulos, por lo tanto, encuentra la solución del problema (ver imagen 04)

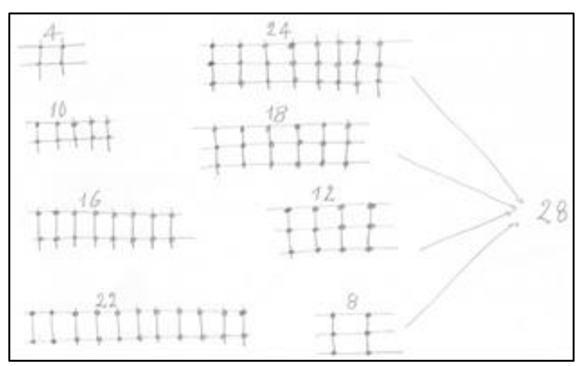


Imagen 04: Trabajo de un estudiante en el problema 3, parte final donde presenta la solución.

Frente a los resultados obtenidos teniendo en cuenta la nueva temática (resolución de problemas mediante ecuaciones diofánticas), los estudiantes asimilaron y con facilidad aplicaron el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de dos números, así como la identidad de Bezout, reconociendo la importancia de la temática como una herramienta que facilita la solución de problemas del contexto, recuerdan algunos estudiantes habersen encontrado con este tipo de problemas en olimpiadas de matemáticas que organiza anualmente el departamento.

IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Desde el planteamiento inicial se ha pretendido fortalecer la resolución de problemas en la educación básica secundaria y media, para ello se trabajó con estudiantes del grado undécimo, quienes han demostrado disposición y actitud positiva frente a los problemas propuestos, tanto que han permito analizar sus estrategias de abordaje. Al respecto, fue posible evidenciar un planteamiento formal de cada uno de los problemas mediante ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, demostrando un nivel significativo de conocimientos previos, o recursos según Schoenfeld, relacionados con la resolución de problemas que involucran ecuaciones; igualmente se evidenció la puesta en práctica de diferentes heurísticas, acudiendo a la representación pictórica como recurso ante la dificultad que presentaron algunos estudiantes al pretender plantear un sistema de ecuaciones, estas estrategias les ha permitido para algunos encontrar la solución y para otros un acercamiento, motivación y expectativa frente a la nueva temática que se ha presentado, como son las ecuaciones diofánticas.

El trabajo ya inmerso en la temática ecuaciones diofánticas permitió evidenciar la actitud e interés hacia las matemáticas por parte de los estudiantes, desde sus argumentos, los planteamientos y su evolución con el trascurrir de los procesos en cada problema, tales como el reconocimiento de las características de una ecuación diofántica, el algoritmo de Euclides para hallar el m,c.d. de dos números, la entidad de Bezout y su aplicación en la solución de este tipo de ecuaciones.

Los estudiantes manifestaban lo llamativo y diferente a lo que ellos esperaban, ya que estaban acostumbrados al planteamiento de la ecuación que modela la situación o al desarrollo de un sistema de ecuaciones por alguno de los métodos (gráfico, reducción, eliminación, sustitución o determinantes), según ellos en la solución de problemas indiferentes del contexto en algunas ocasiones.

Los resultados y su respectivo análisis permiten proyectar la incorporación en los planes de estudio de la educación básica secundaria y media las ecuaciones diofánticas, como una herramienta la cual puede aprovechar el estudiante en determinado momento en la solución de problemas o planteamiento de los mismos.

REFERENCIAS

[1] Albendea, P. (2011). La historia del álgebra en las aulas de secundaria.http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1883/Albendea%20Herrera,%20Paula.pdf?sequence=1 Consultado 17/11/2019

[2] Arcavi, A., & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. ZDM, 39(5-6), 355-364.

[3] Barrantes, H.; Díaz P.; Murillo, M.; y Soto, A. (2007). Introducción a la Teoría de Números. San José: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia.

[4] Blanco Nieto, L. J., Cárdenas Lizarazo, J. A., & Caballero Carrasco, A. (2015). La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria.

[5] Gracián, E. (2013). Ecuaciones diofánticas y el teorema de Fermat. http://www.enriquegracian.com/articulos/ecuaciones-diofanticas-y-el-teorema-de-fermat. Consultado 15/11/2019

[6] Jiménez, R., Gordillo, E., & Rubiano, G. (2004). Teoría de números para principiantes. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[7] Polya, G. (2004). How to solve it: A new aspect of mathematical method (No. 246). Princeton university press

[8] Schoenfeld, A. H. (2014). Mathematical problem solving. Elsevier.

[9] Torres, A. M. O. Estudio y discusión sobre problemas de Olimpíada. Ecuaciones Diofánticas.

ACERCAMIENTOS A LA TEORÍA DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SHOENFELD A PARTIR DE UNA ACTIVIDAD PRÁCTICA DE AULA

Angela María Sánchez Ossa
Universidad Antonio Nariño, angelasanchezossa@gmail.com

***Abstract*—. This article gathers the reflections that arose from the reading of Alan Shoenfeld´s proposals regarding the solution of mathematical problems, and the application of two instruments to the students of the Mathematical Problems Solution course of the Antonio Nariño University headquarters, in semester B- 2019. The first instrument is an exploratory questionnaire about what students understand by problem, and the differences between problem and exercise. The second instrument is a work guide with number theory exercises, of which, in groups, students had to solve four in a previously established analysis rubric. The analysis of the information was carried out in the light of the theory of problem solving proposed by the American mathematician Alan Henry Schoenfeld. This more than an article of theoretical tension, what it intends is to put in tension the teaching practice to develop problem solving skills in first semester university students and expose the possibilities available to improve the processes of apprehension of mathematical content.**

***keywords*— Number theory, matehematical problems, belief, heuristics**

Resumen— Este artículo recoge las reflexiones que surgieron a partir de la lectura de las propuestas de Alan Shoenfeld con respecto a la solución de problemas matemáticos, y la aplicación de dos instrumentos a los estudiantes del curso de solución de Problemas Matemáticos de la universidad Antonio Nariño sede Neiva, en el semestre B – 2019. El primer instrumento es un cuestionario exploratorio sobre lo que entienden los estudiantes por problema y las diferencias entre problema y ejercicio. El segundo instrumento es una guía de trabajo con ejercicios de teoría de números, de los cuales, por grupos, los estudiantes debían resolver cuatro en una rúbrica de análisis previamente establecida. El análisis de la información se realizó a la luz de la teoría de la Resolución de Problemas propuesta por el matemático norteamericano Alan Henry Schoenfeld. Este más que un artículo de tensión teórica, lo que pretende es poner en tensión la práctica docente para desarrollar habilidades de resolución de problemas en estudiantes universitarios de primer semestre y exponer las posibilidades de las que se dispone para mejorar los procesos de aprehensión del contenido matemático.

Palabras clave— Teoría de números, problemas matemáticos, creencias, heurísticas.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas matemáticos constituye un componente muy importante en la formación de los futuros profesionales del país, principalmente los de disciplinas como la ingeniería. De otro lado, a manera didáctica en el proceso de enseñanza – aprendizaje, el trabajo en el aula a través de la resolución de problemas requiere una amplia reflexión.

II. EL MICRO COSMOS MATEMÁTICO DE ALAN SHOENFELD

Uno de los exponentes principales de la teoría de la resolución de problemas en matemáticas, es el norteamericano Alan H. Shoenfeld, quien motivado por los escritos de Géorge Pólya ha dedicado años a la investigación sobre este tema.

Para Shoenfeld la resolución de problemas es trascendental en la medida que permite consolidar el conocimiento matemático y facilita su aprendizaje.

En 1985 Shoenfeld publicó el libro denominado Mathematical Problem Solving donde propone que además de las heurísticas, para que los estudiantes puedan resolver problemas matemáticos debe tenerse en cuenta otras categorías como los recursos, el control y su sistema de creencias.

A. LOS RECURSOS

Son las herramientas de las que el estudiante dispone para resolver problemas. Es indispensable hacer un inventario de esos recursos para conocer cómo el estudiante accede, organiza y almacena la información matemática, así como las habilidades con las que cuenta para abordar la situación problema.

Esta categoría es muy importante debido a que los estudiantes pueden tener un recurso mal elaborado, por ejemplo un concepto matemático cualquiera, y aplicarlo. El inventario de recursos permite entender porque lo que para el profesor puede parecer fácil, para el estudiante no lo es.

Un inventario de recursos adecuado, le permite al profesor enfatizar en lo fundamental, precisar y corregir recursos erróneos y ampliar ese inventario con el que cuenta el estudiante.

B. LAS HEURÍSTICAS

Shoenfeld se basó en las heurísticas propuestas por Polya en su libro "How to solve it", que se fundamentan en la experiencia y en la observación.

Algunos caminos heurísticos propuestos por Polya son:

• Dibujar esquemas para entender el problema.

• Mediante el razonamiento a la inversa.

• Revisando ejemplos concretos similares.

A diferencia de Polya, Shoenfeld considera que existen heurísticas que no se pueden aplicar a todo tipo de problema. Es decir, se deben buscar las estrategias para resolver cada problema en particular.

C. CONTROL

También se conoce como estrategia metacognitiva y conlleva la evaluación constante sobre las decisiones que se toman para la resolución del problema.

El estudiante debe ser capaz de evaluar si la estrategia o el camino que tomó para resolver el problema es el adecuado. De igual forma, debe ser capaz de emprender nuevas rutas cuando el método escogido no lleva a la solución. Algunas acciones que involucran el control son [1]:

• El entendimiento o claridad del problema que se pretende resolver.

• Hacer un diseño. Es decir, establecer las posibles estrategias o rutas para la solución y empezar con alguna de ellas.

• Monitorear el proceso para decidir cuándo se debe abandonar uno que no conlleve a la resolución del problema.

• Revisar el proceso de resolución.

El docente debe ayudar al estudiante a evaluar el proceso permanentemente, tomando videos, resolviendo ejemplos modelo e incluso empleando las errores para que con los estudiantes se decida el momento oportuno para abandonar la estrategia.

El trabajo en grupo también es una buena estrategia para llevar a cabo el control, debido a que posibilita que varios estudiantes discutan las estrategias.

Finalmente la propuesta de Shoenfeld es que los docentes consideren la adopción de un micro cosmos matemático en su proceso de aula, que facilite un ambiente adecuado para la resolución de problemas matemáticos y por supuesto para la aprehensión de las matemáticas.

D. LAS CREENCIAS

Las creencias afectan notablemente la percepción y el comportamiento tanto del estudiante como del profesor a la hora de enfrentarse a un problema. "…condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática" [1] ya que facilitan la predisposición para el uso de algunas heurísticas y el abordaje de los contenidos matemáticos.

Un claro ejemplo sobre la importancia del sistema de creencias, de acuerdo con Shoenfeld, tiene que ver con el uso del lenguaje formal y la argumentación en matemáticas por parte del estudiante, que es generalmente usada para explicar una respuesta evidente y dada, o para argumentar el proceso que el profesor ha explicado. Por otro lado, las creencias de los maestros son influenciadas por la forma en que aprendieron matemáticas, y juega un papel muy importante en el proceso de enseñanza.

Algunas creencias por parte de los estudiantes que ha identificado Shoenfeld en sus investigaciones son [1]:

• Los problemas matemáticos tienen una sola respuesta y usualmente una sola ruta para la solución.

• Las matemáticas que se aprenden en el colegio no son tan aplicables en la vida real.

• La estrategia para solucionar un problema matemático es la dada por el profesor.

• Los estudiantes común y corriente no pueden entender la matemática, solo memorizarla y aplicarla.

III. ACTIVIDAD PRÁCTICA DE AULA

Se presentan a continuación los hallazgos y conclusiones de dos actividades exploratorias realizadas con 14 estudiantes del curso de solución de problemas matemáticos, de primer semestre de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño sede Neiva.

La primera actividad fue aplicada al comenzar el semestre, consultando a los estudiantes lo que entendían por "problema matemático" y la diferencia con "ejercicio matemático". Esta actividad se realizó con el propósito de indagar en las creencias de los estudiantes como posibilidad para organizar las actividades de aula en un marco de entendimiento mutuo.

Uno de los estudiantes respondió "un problema matemático es cuando uno analiza y busca un método para solucionarlo, mientras que un ejercicio matemático es cuando uno ya tiene la metodología o la fórmula para poder llegar al resultado". Se evidencia que para el estudiante la diferencia fundamental tiene que ver con las herramientas con las que ya se cuenta, es decir, para el estudiante, si ya tiene la fórmula e intuye la solución, entonces se trata de un ejercicio.

Varios estudiantes coincidieron que "en los problemas toca leer con mucha atención, mientras en los ejercicios con un vistazo sabes que resolver, y sólo se necesitan unas reglas". Una diferencia sustancial y manifiesta por la mayoría de los estudiantes tiene que ver con la necesidad de leer de manera cuidadosa y repetitiva un enunciado cuando se trata de un problema.

Llama también la atención que los estudiantes relacionan problema con enunciado y ejercicio con incógnita. En ninguna respuesta se evidencia la relación problema – incógnita.

A la pregunta sobre la diferencia entre problema y ejercicio, un estudiante respondió "…que los problemas matemáticos son más de práctica y los ejercicios matemáticos son de memorizar más". Esto coincide con algunas de las creencias identificadas por Shoenfeld, donde la memoria es un recurso no sólo útil, sino casi que se vuelve el único recurso para que algunos estudiantes puedan trabajar en matemáticas.

Uno de los estudiantes manifestó que la única diferencia es el nombre.

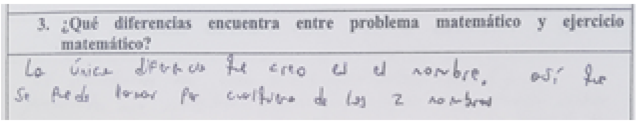

3. ¿Qué diferencias encuentra entre problema matemático y ejercicio matemático?

Fig. 1: *Aparte de la respuesta de uno de los estudiantes.*

En las preguntas individuales por problema y ejercicio, el estudiante los relaciona con "una operación matemática que da lugar a un resultado".

Llama la atención que sólo un estudiante relaciona el término problema con "…una situación real". No está del todo claro si los demás estudiantes relacionan o no la matemática con situaciones de la vida real. Este estudiante además relaciona el término ejercicio con "…una operación propuesta".

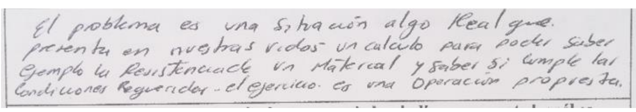

El problema es una situación algo Real que
presenta en nuestras vidas un calculo para poder saber
ejemplo la Resistencia de un Material y saber si cumple las
Condiciones Requeridas. el ejercicio. es una Operación propuesta.

Fig. 2: Aparte de la respuesta de uno de los estudiantes.

Shoenfeld en sus investigaciones también ha encontrado que muchos estudiantes piensan que las matemáticas que le han enseñado en el colegio no tiene nada que ver con la vida real, por lo cual resulta interesante y tal vez hasta coincidente, que sólo un estudiante haya relacionado el término "problema matemático" con "problema de la vida real".

Con respeto a los enunciados, los estudiantes los relacionan más con problemas que con ejercicios, y de acuerdo con su extensión, más complejo puede parecer el ejercicio para el estudiante. Al respecto se encontró respuestas como las siguientes:

"Un problema es cuando hay una incógnita o pregunta implícita en el enunciado y se debe leer más de una vez para poder entender"

"El problema es un escrito en el cual tenemos que analizar y sacar conclusiones para poder sacar un resultado de ello"

"…un problema matemático cuenta con un enunciado y puede darle varias soluciones a aquel problema…"

En el cuarto punto del instrumento aplicado a los estudiantes, se puso seis enunciados matemáticos tomados de diversas fuentes. Los estudiantes debían poner al frente si para ellos tal enunciado constituía un problema o un enunciado.

Se encontró que al enunciado "d) encuentre todos los números de 7 dígitos finalizados en 2019 tales que al eliminar los 4 últimos dígitos, el número obtenido es divisor del número original" [5], la totalidad de los estudiantes lo relacionaron con un problema matemático, mientras que el enunciado " e) encuentre cuántos divisores tiene mil" [5] siete estudiantes los relacionaron con un problema y siete con un ejercicio matemático.

Por supuesto que debe entenderse aquí, como ya se había dicho, que lo que es un ejercicio para una persona, puede constituir un problema matemático para otra, dependiendo de los recursos y habilidades con que cuenta, entre otros aspectos, sin embargo, mediante la observación y escucha del trabajo de aula, puede evidenciarse que en el relacionamiento también interviene la extensión del enunciado.

Una última respuesta relevante para comentar, es la del estudiante que refirió que "un problema matemático es aquel al que hay que buscarle una solución, no importa de qué forma, importa que su respuesta sea válida". Con esta respuesta se evidencia que el estudiante está abierto a la posibilidad de buscar estrategias para resolver el problema y no considera que exista una única ruta. Agrega también en su respuesta "…mientras el ejercicio ya tiene su fórmula y si no se aplica, todo es erróneo". Identifica como clave para diferenciar problema de ejercicio, la posibilidad de búsqueda de estrategias.

Esto último puede relacionarse con una de las creencias comunes encontradas por Shoenfeld, de que los estudiantes consideran que sólo existe una forma para resolver problemas en matemáticas y que usualmente es la que el docente indica.

Una segunda actividad realizada con el ánimo de ahondar en los recursos y las heurísticas de los estudiantes del mismo curso, se desarrolló al finalizar el semestre, donde se entregó a los estudiantes una guía de trabajo con seis problemas de teoría de números, de los cuales debían desarrollar cuatro. Los estudiantes debían explicar los motivos que los llevó a escoger los cuatro problemas a desarrollar y dejar plasmadas todas las estrategias que habían seguido para la solución de los mismos.

Uno de los problemas planteados fue el siguiente: el producto de dos enteros consecutivos ¿puede terminar en ocho? [6]. Todos los grupos que tenían este problema lo seleccionaron. Era el enunciado más corto de los planteados.

Las razones que los estudiantes dieron para seleccionarlo, son las siguientes:

"…porque hemos abarcado varios conceptos de criterios de divisibilidad"

"Porque sólo va a tener como resultados números enteros, y no números racionales, decimales"

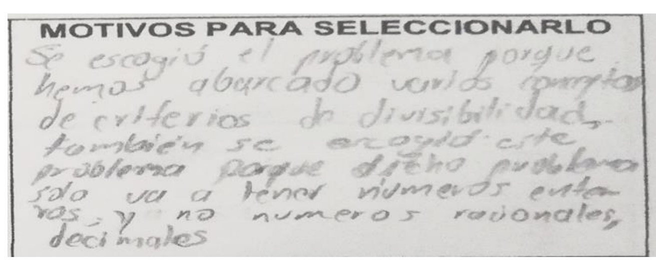

MOTIVOS PARA SELECCIONARLO
Se escogió el problema porque
hemos abarcado varios conceptos
de criterios de divisibilidad,
también se escogió este
problema porque dicho problema
sólo va a tener números ente-
ros, y no numeros racionales,
decimales

Fig. 3: Aparte de la respuesta de un grupo de estudiantes sobre un problema.

"Porque es interesante y se evidenció que es un juego de números. …se puede desarrollar de forma manual ensayo – error"

Casi todos los grupos consideraron que era el más fácil de resolver porque tenían bases sobre criterios de divisibilidad, es decir, intuyeron que podían usar un recurso que ya habían manejado. También concluyeron que no existen los dos números consecutivos requeridos, pero no dieron mayor detalle en las respuestas. La principal estrategia usada fue la de experimentación o ensayo y error.

Uno de los problemas que también fue seleccionado por casi todos los grupos fue el siguiente:

Juan, Mario y Pedro entrenan dando vueltas en bicicleta a una pista circular. Juan tarda 8 minutos en dar una vuelta, Mario tarda 9 minutos y Pedro tarda 12 minutos. Si los tres parten del mismo punto a las 6:00am, ¿a qué hora volverán a encontrarse? [6].

Este problema es comúnmente trabajado en los colegios. Las estrategias que en primer lugar usaron los estudiantes, fue ensayo y error:

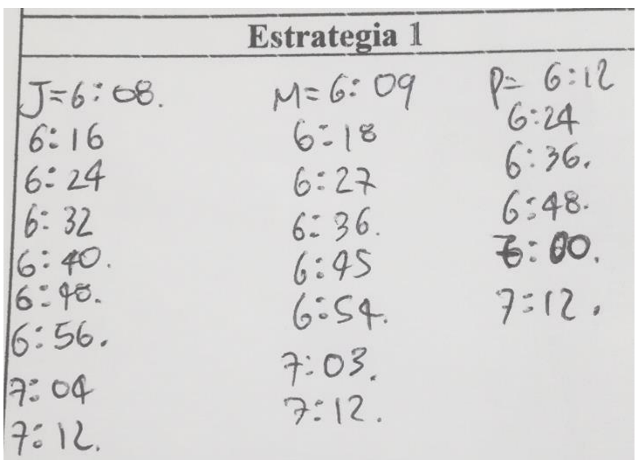


Fig. 4: Aparte de la respuesta de un grupo de estudiantes sobre un problema.

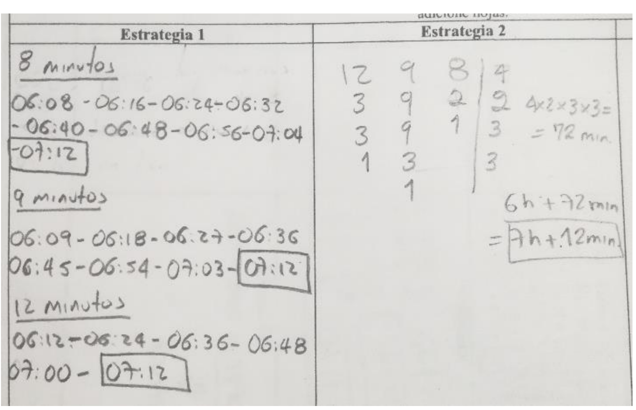


Fig. 5: Aparte de la respuesta de un grupo de estudiantes sobre un problema.

Los estudiantes fácilmente llegaron a la respuesta de que se volverían a encontrar a las 7:12am, sin embargo nuevamente el principal recurso heurístico fue el ensayo y error. Sólo un grupo, tal como se muestra en la figura 5, empleó como segundo recurso la descomposición en factores primos.

Algunos de los problemas resultaron interesantes para los estudiantes, pero coincidían con que había términos que no manejaba, como por ejemplo el concepto de “resto”, que pese a ser abordado desde el nivel primeria de educación, es con frecuencia olvidado en su noción formal. Un ejemplo de esto es el siguiente problema:

“Un entero positivo al ser dividido entre 4 deja resto 1 y al ser dividido entre 5 deja resto 3. ¿Qué resto deja al ser dividido entre 20?” [6]

A la pregunta sobre ¿qué conceptos previos consideran que requieren para la solución del problema?, varios grupos escribieron que requerían aclaración sobre el concepto del término “resto”

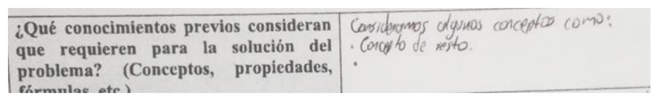


Fig. 6: Aparte de la respuesta de un grupo de estudiantes sobre los conocimientos previos requeridos para abordar el problema.

Los estudiantes en general lo intuían como un problema fácil de resolver, pero no tenían completamente claro el problema. Una vez estudiado el término “resto”, algunos de las estrategias empleadas por los estudiantes para la solución, fueron las siguientes:

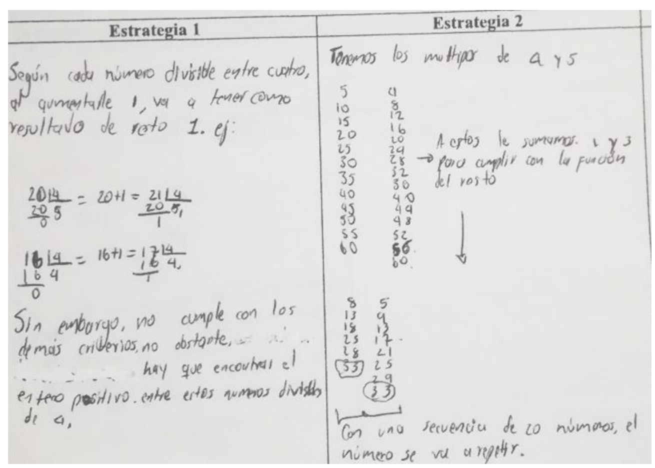


Fig. 7: Estrategias empleadas por un grupo de trabajo para la solución de un problema.

La respuesta más común dada por los estudiantes finalmente es la siguiente:

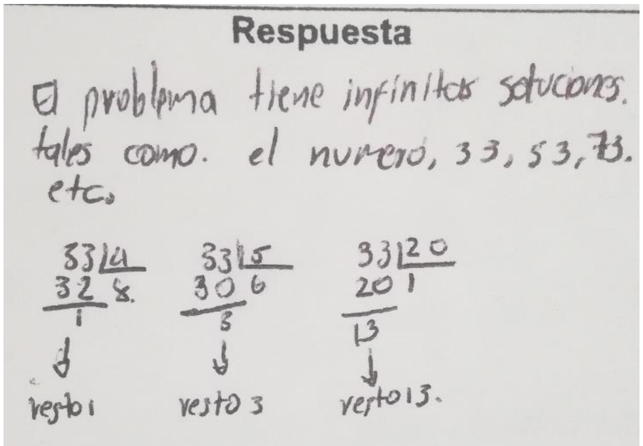


Fig. 8: Aparte de la respuesta de un grupo de estudiantes sobre el problema que involucra el resto.

Aunque los estudiantes emprenden distintos métodos heurísticos para encontrar la solución al problema, se puede evidencia que en ninguno de ellos se emplea lenguaje abstracto. También se puede evidenciar poca argumentación en las respuestas, lo que coincide con lo ya planteado, acerca de que una creencia común en los estudiantes es que la argumentación se útil cuando se trata de explicar una respuesta que es evidente o una solución dada por el profesor.

El uso del término “infinito” en la respuesta también llama la atención, dado que no se evidencia que los estudiantes hayan hecho múltiples intentos, o hayan encontrado una generalización para afirmar que hay infinitas soluciones. No obstante se vislumbra la búsqueda de patrones como un camino heurístico. La pregunta del problema es ¿qué resto deja al ser dividido entre 20?, luego 13, que evidentemente se encuentra en los cálculos hechos por los estudiantes, es la respuesta correcta.

Otro de los problemas trabajados por los estudiantes es el siguiente: “Cinco números se escriben alrededor de un círculo de manera que la suma de dos o tres números adyacentes no sea nunca múltiplo de 3. ¿Cuántos de los cinco números son múltiplos de 3?” [6].

Para resolver este problema los estudiantes manifestaron tener dificultades para entenderlo completamente, ya que no recordaban el significado del término “números adyacentes”.

Una vez hecha la consulta, los estudiantes indicaron que el problema resultaba interesante y propusieron varias estrategias heurísticas, entre las que de nuevo primó la experimentación o ensayo y error.

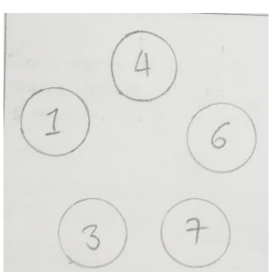


Fig. 9: Ruta heurística para la solución de un problema.

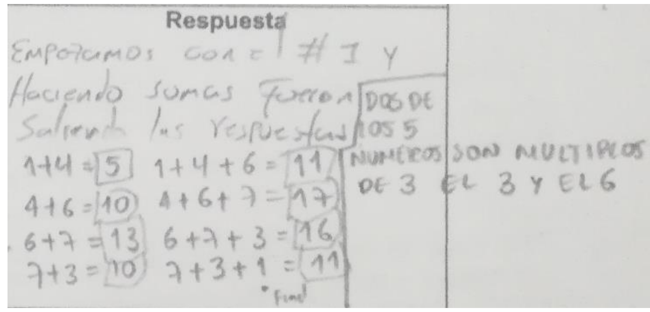


Fig. 10: Estrategias empleadas por un grupo de trabajo para la solución de un problema.

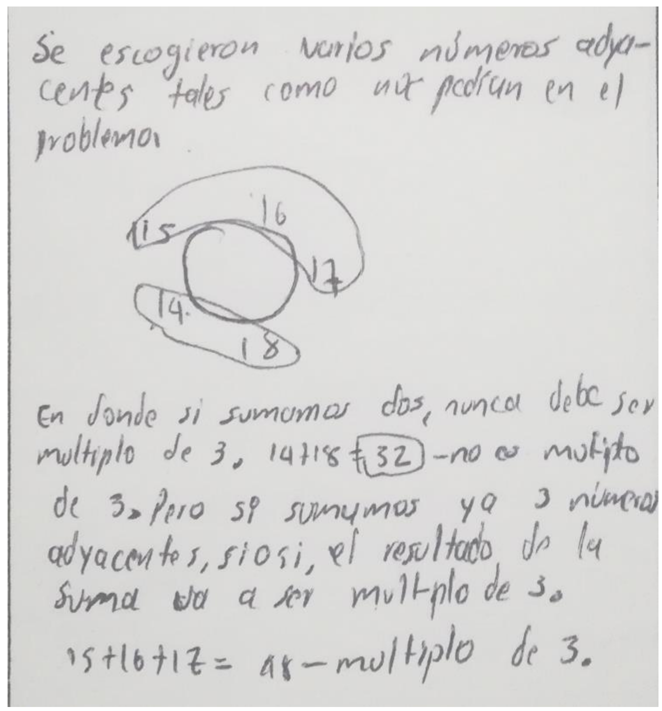


Fig. 11: Estrategias empleadas por un grupo de trabajo para la solución de un problema.

En las Fig. 9, 10 y 11, se evidencian diversas estrategias heurísticas emprendidas por los grupos de trabajo. Como el enunciado del ejercicio menciona un círculo, se privilegia en la totalidad de los grupos, el uso de gráficas. En la Fig 10, los estudiantes enlistaron lo que estaban encontrando en el diagrama circular. El recurso gráfico puede ayudar sin duda a una mejor comprensión del problema, sin embargo, no es estrictamente necesario para resolverlo.

La respuesta más común sobre los motivos para seleccionar cada problema era porque a los estudiantes le resultaba interesante, o porque consideraban que podían resolverlo más fácil con los recursos (conocimientos previos) que tenían.

Algunos problemas no fueron seleccionados por los grupos y esto se debió, según los mismos estudiantes o por la extensión del enunciado o porque no parecía muy interesante.

IV. CONCLUSIONES

En las actividades prácticas de aula debe privilegiarse la investigación, principalmente cuando de resolución de problemas matemáticos se trata, de tal modo que docente y estudiante identifiquen estrategias heurísticas que les permita desarrollares habilidades de pensamiento matemático. Es importante que los estudiantes se enfrenten a retos que los lleve a poner en tensión sus conocimientos y habilidades. En este proceso juega un papel primordial el docente que debe ejercer un papel activo en la enseñanza de la matemática.

Trabajar el contenido matemático a partir de solución de problemas requiere paciencia, entrenamiento y mucha preparación. El docente debe prepararse para ayudar a sus estudiantes a manejar la frustración.

En las dos actividades exploratorias desarrolladas en el semestre B-2019, se evidenció la necesidad de que tanto maestros como estudiantes elaboren los inventarios de recursos antes de enfrentarse a los problemas matemáticos. Ese inventario previene avanzar a ciegas en la solución de un problema e interpretarlo mejor.

También se identificó que los estudiantes privilegian la estrategia ensayo – error como punto de partida. Pocos estudiantes empiezan enlistando los datos dados. Si el problema enuncia un objeto geométrico, entonces los estudiantes comienzan elaborando gráficos.

Los estudiantes prefieren los enunciados cortos y lo relacionan con facilidad. Los enunciados largos por el contrario, resulta para ellos más complejos. Se evidencia poca argumentación en las respuestas dadas a los problemas.

Es indispensable que los docentes indaguen más sobre las creencias de sus estudiantes y reflexionen sobre las propias, ya que este aspecto influye notoriamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento muy especial al Dr. Gerardo Chacón, maestro del curso de Teoría de Números de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño – Colombia, por su inspiradora labor docente y la motivación constante a entrenarme en solución de problemas matemáticos como una estrategia fundamental para abordar el contenido matemático.

REFERENCIAS

[1] Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, pp. 1-9.

[2] Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Shoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas . Educación Matemática, pp. 16-24.

[3] Shoenfeld A, “Mathematical problem solving”, pp.1-424, 1985.

[4] Pérez, Y. Beltrán, C. “Las estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos”. Edusol, vol. 9, pp. 107-116, 2009.

[5] Chacón G. Notas de Teoría de Números. Universidad Antonio Nariño. Bogotá, 2017.

[6] Nieto J. “Teoría de números para olimpiadas matemáticas”. Asociación Venezonala de Competencias Matemáticas. 2015

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE TEORÍA DE NÚMEROS CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Carlos F. Chavez
Colegio Virginia Gutierrez de Pineda, cfcchavez32@gmail.com

***Abstract*— This article deals with a practical activity of number theory, applied to secondary school students in a public school in Bogotá, in which their responses to a problem of empowerment are analyzed. Alan Shoenfeld's theory of problem solving is taken into account and heuristics are especially analyzed, in order to finally come to some conclusions about the study.**

***keywords*— Potentiation, Alan Shoenfeld, last digits, heuristics.**

Resumen— Este articulo trata de una actividad práctica de teoría de números, aplicada a estudiantes de secundaria en un colegio público de Bogotá, en la que se analizan sus respuestas a un problema sobre potenciación. Se tiene en cuenta la teoría de resolución de problemas de Alan Shoenfeld y se analizan especialmente las heurísticas, para finalmente plantear algunas conclusiones sobre el estudio.

Palabras clave— 4 Potenciación, Alan Shoenfeld, últimos dígitos, heurísticas.

I. INTRODUCCIÓN

A continuación, se presenta un análisis de las respuestas, por parte de los estudiantes de grado sexto y octavo del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda, a un problema de teoría de números, relacionado con la potenciación de números enteros positivos, y la búsqueda de patrones para determinar los dos últimos dígitos de la expresión de una suma de dos números elevados a la cien. Se han propuesto dichas potencias a propósito, para que los estudiantes no puedan determinar los dos últimos dígitos haciendo todas las multiplicaciones, sino que identifiquen alguna regularidad y extrapolen los resultados de algunas potencias para determinar la respuesta. Posteriormente se analizarán las respuestas de los estudiantes, teniendo en cuenta la teoría de resolución de problemas de Alan Shoenfeld, en lo relacionado con los recursos, heurísticas, control y sistema de creencias, poniendo especial atención a las heurísticas, entendidas como las creaciones, métodos, estrategias, técnicas, reglas generales, entre otros que utilicen los estudiantes, para progresar en el problema propuesto y así llegar a la solución. Finalmente se presentan algunas conclusiones y consideraciones finales.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y DE LA POBLACIÓN

De acuerdo con Shoenfeld [1]. Los recursos se refieren al conocimiento matemático que posee el individuo y que puede ser aplicado al problema. En estos recursos también juegan un papel importante las Intuiciones y conocimientos informales. Así mismo son relevantes los procedimientos algorítmicos y no algorítmicos, además de la comprensión de las reglas acordadas para trabajar en el tema.

En este estudio, se debe mencionar que se intentó proponer diferentes ejercicios donde los estudiantes debían determinar el último dígito de expresiones como:

$$2^{500}, 3^{125}, 4^{300}, 5^{10000}, 6^{50000}, 7^{200}, 8^{500}, 9^{145}$$

Pero hubo la necesidad de trabajarlos en clase, con la orientación del docente, ya que en primera instancia, ninguno de los estudiantes pudo resolverlo, puesto que no tenían ideas claras de cómo abordarlo, consecuencia de no haber trabajado este tipo de problemas anteriormente.

El problema se aplicó a 35 estudiantes de grado sexto y 35 estudiantes de grado octavo. Al hacer la revisión de todas las soluciones se pudieron identificar generalidades, tanto en los aciertos como desaciertos, por tanto, se analizarán solo las soluciones de los estudiantes que presentaron ideas interesantes y que representen las ideas generales del grupo, puesto que los demás procedimientos o bien utilizan estrategias similares de los que llegaron a la solución, o bien presentan los mismos errores que cometieron los estudiantes, sobre todo en el desarrollo de los cálculos.

A continuación, en la Tabla I, se relacionan los estudiantes seleccionados para el análisis con el grado.

TABLA I

Estudiante	**Grado**
Estudiante 1	sexto
Estudiante 2	sexto
Estudiante 3	octavo

III. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Iniciamos el análisis con los estudiantes de grado sexto en relación con la solución del siguiente problema:

Determinar los dos últimos dígitos de $\mathbf{3^{100} + 9^{100}}$

El estudiante 1 razonó de la siguiente manera, como se muestra en la figura 1:

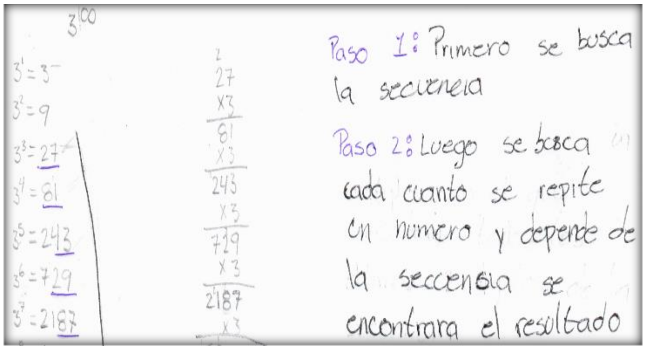


Fig. 1

Realizó las respectivas multiplicaciones de las potencias del 3, llegando hasta $3^{23} = 94143178827$, donde observó, qué sus dos últimos dígitos terminan en 27 y que estos son iguales a los dos últimos dígitos de $3^3 = 27$ y que así sucesivamente se repetían los mismos dos últimos dígitos de las potencias que siguen.

Empezando en el primer número de dos dígitos que es $3^3 = 27$ los últimos dos dígitos son:

27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, 03, 09, y posteriormente vuelven a repetirse así que:

$$3^3 \ y \ 3^{23} \text{ terminan en } 27$$
$$3^4 \ y \ 3^{24} \text{ terminan en } 81$$
$$3^5 \ y \ 3^{25} \text{ terminan en } 43$$
$$3^6 \ y \ 3^{26} \text{ terminan en } 29$$

.
.
.

Y así sucesivamente

Luego su razonamiento fue, que como 23 es el resultado de un número múltiplo de 4, que es 20, y a esto se le suma 3, para que de él 23, entonces buscó un número múltiplo de 4 que sumado con tres se acercara lo que más se pudiera a 100.

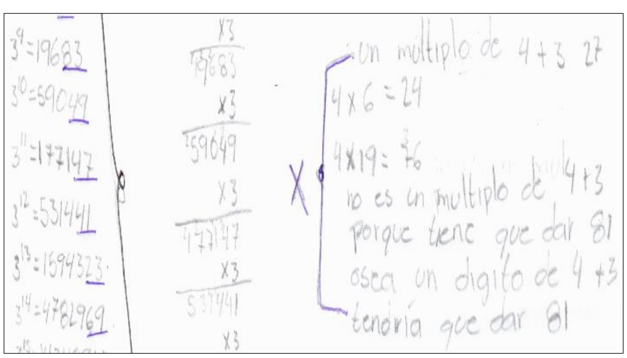
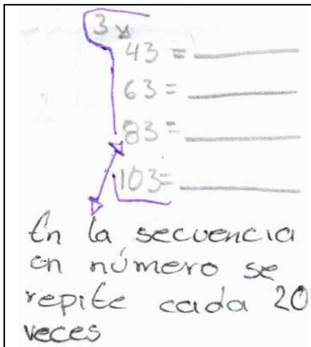


Fig. 2

Sin embargo, el estudiante 1 desechó esta idea, tal vez porque esta idea solo funciona para determinar la última cifra, que seria 7 para todos estos casos, pero dicho procedimiento no funciona para las dos últimas cifras. Luego razonó de la siguiente manera como se muestra en la Tabla II:

TABLA II

	3^{23} termina en 27 3^{43} termina en 27 3^{63} termina en 27 3^{83} termina en 27 3^{103} termina en 27

Es decir, que observó que cada 20 veces, empezando con él 3^{23}, el número terminaba en 27, por tanto 3^{103}, también terminaría en 27. Luego, cómo conocía el patrón de los últimos dos dígitos entonces se devolvió como se muestra en la Tabla III

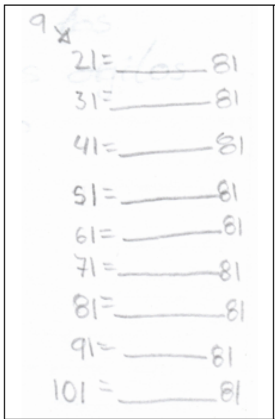
TABLA III

	3^{103} termina en 27 3^{102} termina en 09 3^{101} termina en 03 3^{100} termina en 01

De esta manera el estudiante 1 solucionó efectivamente la primera parte del problema e intentó resolver de la misma manera el de 9^{100}, encontrando que las potencias de 9 tenían una regularidad en sus dos últimos dígitos. Empezando en el primer número de dos dígitos, que es $9^2 = 81$, los últimos dos dígitos son:

81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, y posteriormente vuelven a repetirse. Luego en la Tabla IV su puede ver que directamente razonó que

TABLA IV



9^{21} termina en 81
9^{31} termina en 81
9^{41} termina en 81
9^{51} termina en 81
9^{61} termina en 81
9^{71} termina en 81
9^{81} termina en 81
9^{91} termina en 81
9^{101} termina en 81

pero desafortunadamente cometió un error en un exponente, como se muestra en la Tabla V, lo que lo llevó a un resultado incorrecto al final

TABLA V

El *estudiante 1* repitió el número 9^{19}

Finalmente se puede asegurar que el estudiante 1 siguió un procedimiento válido, donde a partir del desarrollo de operaciones determinó una regularidad en las potencias del tres y determinó sus dos últimos dígitos correctamente. También, aplicó el mismo procedimiento para determinar las potencias del 9, pero cometió un pequeño error, qué hizo que no pudiera llegar a la solución correcta. Sin embargo, revisando los procedimientos posteriores al error, se evidencia que se tenía una idea clara de cómo llegar a la solución, únicamente faltó ejercer mayor control sobre lo que ya se había realizado.

A continuación, se analizan los procedimientos utilizados por el estudiante 2, también de grado sexto.

El estudiante 2, inicia haciendo las primeras multiplicaciones de las potencias del tres, pero rápidamente advierte que no es necesario hacer toda la multiplicación en cada caso, puesto que solo importan los dos últimos dígitos, como se muestra en la figura 3.

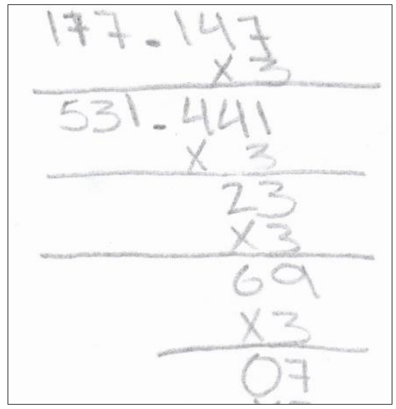


Fig. 3

de esta manera identifica rápidamente, que la secuencia de números vuelve a repetirse después de $3^{23} = 27$, continuando con el siguiente patrón:

27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, 03, 09…

Posteriormente, razona que sí $3^{23} = 27$, entonces también 3^{43}, 3^{63} y 3^{83}, también terminarán en 27. Luego teniendo en cuenta la secuencia de números prevé que 3^{93} termina en 23, para finalmente avanzar siete lugares más en la secuencia y llegar a la conclusión de que 3^{100} termina en 01. Figura 4

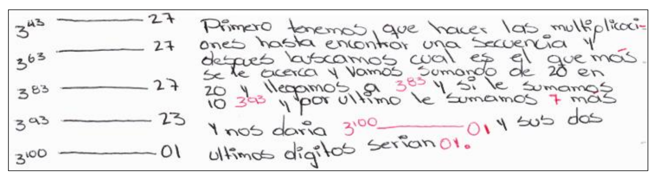


Fig. 4

En general el procedimiento se puede ilustrar en la Tabla VI donde se muestran los dos últimos números en que termina cada potencia

TABLA VI

3^3	…	3^{23}	…	3^{43}	…	3^{63}	…	3^{83}	…	3^{93}	3^{94}	3^{95}	3^{96}	3^{97}	3^{98}	3^{99}	3^{100}
27	…	27	…	27	…	27	…	27	…	23	69	07	21	63	89	67	01

Aquí se puede evidenciar que se hubiese podido llegar a la potencia de 3^{103} y devolverse en la secuencia y de esta manera llegar más rápido a la solución, pero el estudiante 2 seguramente no evidenció este camino.

Para las potencias del nueve, hace un procedimiento similar obteniendo la siguiente secuencia en los dos últimos dígitos

9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, …

Identifica un patrón cada 10 números, razonando que sí $9^2 = 81$, entonces también 9^{22}, 9^{32} y así sucesivamente hasta el 9^{92} también terminarán en 81 . Luego teniendo en cuenta la secuencia de números llega a que 9^{98} termina en 21, para finalmente avanzar dos lugares más en la secuencia y llegar a la conclusión de que 9^{100} termina en 01, ver figura 5.

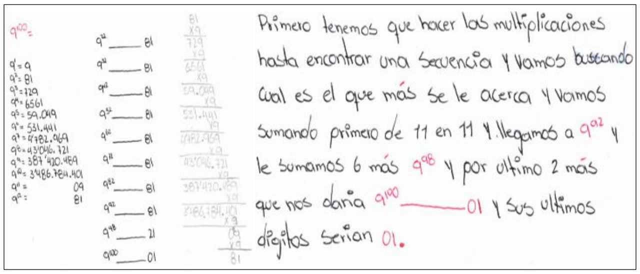


Fig. 5

Se debe aclarar que a pesar de que el estudiante 2 razonó una secuencia de 10 en 10 en su escrito asegura que va aumentando de 11 en 11, y además hace un paso adicional sin razón aparente y es el de avanzar del 9^{92} al 9^{98} y luego si 9^{100}.

Esto también evidencia falta de control en sus procedimientos.

Sin embargo, finalmente llega a la solución del problema, sumando los dos últimos dígitos de cada potencia, concluyendo que los dos últimos dígitos de la suma deben terminar en 02 como se muestra en la figura 6.

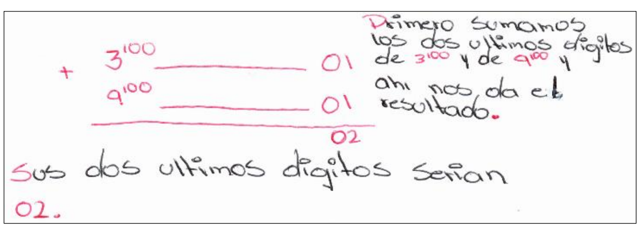


Fig. 6

A continuación, se presentan los razonamientos seguidos por el estudiante 3, de grado octavo.

Inició haciendo las respectivas multiplicaciones e identificó un patrón en el último digito. Ver figura 7

3,9,7,1, 3,9,7,1, …

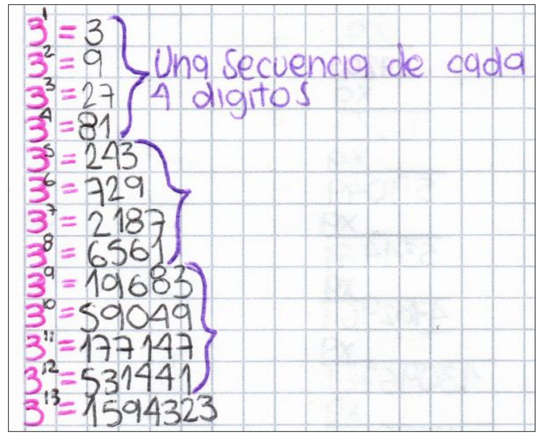


Fig. 7

Posteriormente identificó, que las potencias con exponente múltiplo de 4, terminaban siempre en 1. Y como 100 es múltiplo de 4, entonces 3^{100} terminaría en 1. Figura 8

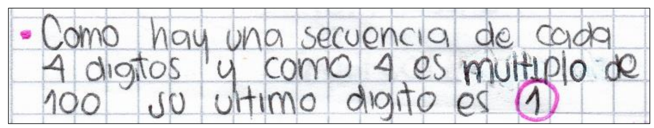


Fig. 8

Seguidamente, se fijó en el penúltimo dígito, encontrando también una secuencia relacionada con las potencias cuyo exponente es múltiplo de 4 como se muestra en la tabla VII

TABLA VII

3^4	…	3^8	…	3^{12}	…	3^{16}	…	3^{20}	…
81	…	**61**	…	**41**	…	**21**	…	**01**	…

Esta secuencia se repite cada cinco números, por tanto, dedujo que como 100 es múltiplo de 5, entonces su penúltimo número seria cero. Figura 9.

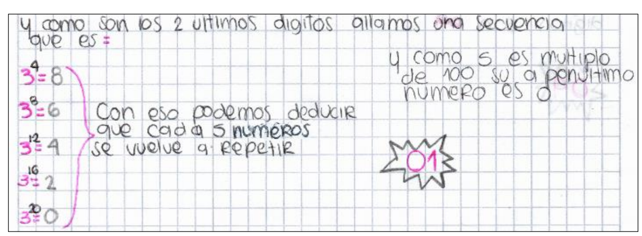


Fig. 9

De esta manera se concluye que los dos últimos dígitos de 3^{100} son 01

Para las potencias del 9, el estudiante 3 encuentra una regularidad relacionando los dos últimos dígitos y las potencias de exponente 10, llegando a la conclusión de que 9^{100} termina en 09 como se muestra en la figura

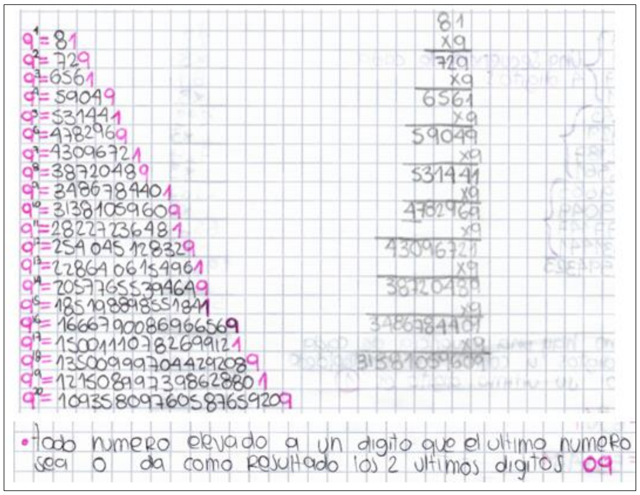


Fig. 10

Sin embargo, comete un error, y es decir que 9^{1} es igual a 81 y en los subsiguientes cálculos continúa desarrollando las potencias de la misma manera, de modo que los resultados siempre se encuentran corridos un lugar, lo que lo lleva a concluir, que los dos últimos dígitos son 09 y no 01 como es correcto. Sin embargo, a pesar de este detalle, los razonamientos están correctos, y de no ser por este descuido, producto de no ejercer control sobre los procedimientos, se hubiese llegado a la solución correcta.

IV. CONCLUSIONES

De acuerdo con la teoría de resolución de problemas de Shoenfeld [1] y siguiendo con las ideas mencionadas en la introducción, en las heurísticas también se incluyen, figuras, dibujos, introducción de notación adecuada, reformulación del problema, trabajo hacia atrás y procedimientos de prueba y verificación. En este sentido se pudo evidenciar con los estudiantes variedad de procedimientos. A continuación, se mencionan algunos de los más importantes:

- Los estudiantes hicieron acercamientos por exceso y por defecto de las potencias planteadas para llegar a la solución. Algunos encontraron una regularidad, e intentaron extrapolar sus resultados para llegar a la potencia de exponente cien. Sin embargo, en este proceso, no necesariamente se llegaba exactamente a dicho exponente, lo cual fue resuelto, o bien haciendo acercamientos por exceso, o en otros casos por defecto, y luego avanzando o retrocediendo respectivamente en la secuencia hallada, para llegar a la potencia deseada.

- También se pudo observar que los estudiantes tienen la capacidad, en algunos casos, de sintetizar la información y dejar de lado otros aspectos poco relevantes, como el de dejar de hacer las multiplicaciones completas, para solo trabajar con los dos últimos dígitos, lo cual permite agilizar procedimientos y hacer razonamientos más eficientemente.

- Así mismo, se identificaron dos formas de proceder, una donde se tenían en cuenta los dos últimos dígitos y se buscaba una regularidad, y otra donde se buscaron las regularidades en la última y penúltima cifra, de manera independiente, para posteriormente combinarlas y llegar a determinar en qué par de números terminaban las potencias solicitadas.

- Sin embargo, hay que decir que entre todos los estudiantes que se aplicó el problema, también se pudieron apreciar estrategias poco prácticas, como la de intentar hacer todas las multiplicaciones, o llegar a la solución, encontrando la regularidad y por simple conteo y repitiendo los números en qué terminaban las potencias, llegar hasta la potencia del exponente cien.

De igual manera Shoenfeld (1985) plantea que el Control tiene que ver con las decisiones globales, sobre la selección e implementación de recursos y estrategias, la planificación, seguimiento y evaluación de dichas decisiones, en las que además intervienen actos metacognitivos conscientes. De acuerdo con esto, se pudo verificar que los estudiantes, especialmente los de grado sexto, no hacen control de sus procedimientos, es decir, no revisan constantemente si lo que están desarrollando, se encuentra bien o mal, sino que solamente se limitan a preguntar al docente, y simplemente aceptan como válida la respuesta que él les pueda dar, es decir que convierten al profesor como el único ente de control de sus actividades. Nunca indagan, se preguntan o dudan de lo que dice el docente.

Hay que decir, que los estudiantes de octavo grado a través de preguntas, formuladas por el docente, por lo menos dudaban de algunos de sus resultados.

Es interesante, ver que los estudiantes de grado sexto proponían buenas ideas, pero fallaban en las operaciones, precisamente por no estar acostumbrados a ejercer control y verificar sus procedimientos, lo que si lograron, en mayor medida, los estudiantes de grado octavo.

Por otra parte, algunos de los estudiantes de grado octavo, propusieron conjeturas válidas que después fueron confirmadas, mientras que otros tuvieron que aceptar que algunas de sus ideas no llegaban a solucionar el problema.

En relación con el sistema de creencias, se puede decir, que en primera instancia los estudiantes no consideraban posible realizar este cálculo sin utilizar la calculadora, y por otra parte, no conocían cómo se comportaban las potencias de los números enteros, es decir no conocían la regularidad que van presentando los últimos dígitos. Por tanto, para ellos fue altamente motivante, sobre todo para los estudiantes de grado sexto, ver que podían resolver este tipo de problemas sin necesidad de una calculadora.

Finalmente se puede decir, que se apreció gran aplicabilidad de la potenciación y se favoreció la mecanización de procedimientos, además de la búsqueda de patrones numéricos, los cuales posteriormente servirán en cuestiones relacionadas con el álgebra.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los estudiantes de grado sexto y octavo del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda de la localidad de Suba.

REFERENCIAS

[1] A. Shoenfeld. Mathematical Problem Solving. Orlando Florida: Academic Press, Inc. 1985

SIGNIFICADO GLOBAL DEL OBJETO SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DESDE EL ENFOQUE EOS

Cesar Alejandro Garzón Robelto
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, cesgar19@hotmail.com

***Abstract---* In the field of mathematics, one line of study corresponds to the analysis of the origin, evolution, and applications of the mathematical object: Linear Equation System-SEL, since they were used to solve problems of daily life at different times in history. In this sense, a historical-epistemological study of the SEL object is carried out in the theoretical framework of the ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction - EOS. This historical-epistemological study is used to characterize the global meaning of the object systems of linear equations, from the identification of the systems of mathematical practices and within a semiotic analysis carried out on the problems that led to the emergence of the SEL object through of history. These partial meanings are used by students and teachers of mathematics, when solving problems related to the SEL object where solutions to problems related to linear algebra tasks in relation to the SEL object are given. In this way the importance of knowing the nature of the SEL mathematical object is evidenced, since key logical and epistemological elements for the processes of the theoretical constitution of the SEL object are analyzed, which allows not only a better understanding of the object, but also reveals characteristic aspects of the mathematical activity of construction of mathematical objects, which should be present within the knowledge of the teacher for the realization of their didactic proposals.**

***Keywords---* Systems of linear equations, ontosemiotic approach, history, epistemology, semiotic analysis.**

Resumen--- En el campo de las matemáticas una línea de estudio, corresponde al análisis del origen, evolución y aplicaciones del objeto matemático: Sistema de ecuaciones lineales-SEL, ya que fueron utilizados para resolver problemas de la vida diaria en las diferentes épocas de la historia. En este sentido, se realiza un estudio histórico-epistemológico del objeto SEL en el marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática - EOS. Este estudio histórico-epistemológico se utiliza para caracterizar el significado global del objeto sistemas de ecuaciones lineales, a partir de la identificación de los sistemas de prácticas matemáticas y dentro de un análisis semiótico realizado a los problemas que llevaron a la emergencia del objeto SEL a través de la historia. Estos significados parciales son utilizados por estudiantes y profesores de matemáticas, al solucionar problemas relacionados con el objeto SEL donde se da solución a problemas relacionados con tareas propias del álgebra lineal en relación con el objeto SEL. De esta manera se evidencia la importancia de conocer la naturaleza del objeto matemático SEL, ya que se analiza elementos lógicos y epistemológicos claves para los procesos de la constitución teórica del objeto SEL, lo cual posibilita no solo una mejor comprensión del objeto, sino que revela aspectos característicos de la actividad matemática de construcción de los objetos matemáticos, que deberían estar presentes dentro de los conocimientos del docente para la realización de sus propuestas didácticas.

Palabras clave--- Sistemas de ecuaciones lineales, enfoque ontosemiotico, historia, epistemología, análisis semiótico.

I. INTRODUCCIÓN

Desde las primeras civilizaciones, la humanidad ha intentado dar respuesta a situaciones problemas de la vida cotidiana, hasta el punto que se han desarrollado numerosas técnicas para trabajar con el objeto de los Sistemas de ecuaciones lineales. En este sentido, se realizó un estudio histórico-epistemológico del objeto SEL en el marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática - EOS. Este estudio histórico-epistemológico se utiliza para caracterizar el significado global del objeto matemático, a partir de la identificación de los sistemas de prácticas matemáticas que a su vez se asocian con algunos de los significados parciales identificados en este estudio. Esto es posible ya que el enfoque ontosemiótico proporciona la herramienta del análisis semiótico de textos, que permite el análisis de los objetos matemáticos primarios para llegar a generar unas configuraciones epistémicas y así lograr la emergencia de un significado del objeto matemático considerado como global.

Se presenta en este documento un análisis al estudio realizado en los cuatro periodos de desarrollo o evolución de la humanidad (época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea) en cuanto a las situaciones problemas encontradas en las diferentes culturas, relacionadas con las prácticas matemáticas realizadas con el objeto SEL, para llegar a conformar el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, dando respuesta a la pregunta de investigación: *¿Cuál es el significado global del objeto sistemas de ecuaciones lineales, según la emergencia en la historia?* En este sentido, se presenta la reconstrucción del significado parcial para el objeto SEL, denominado Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China, a partir del análisis a la situación problema del Período 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C) el cual corresponde a un problema de la vida real tomado de la sección VII de la obra *Nueve capítulos sobre el arte Matemático,* obra escrita en la civilización China (Carrera, 2009). El estudio histórico- epistemológico del objeto SEL, corresponde a uno de los resultados de la investigación denominada: Caracterización de las concepciones y creencias según la dimensión epistémica del conocimiento del profesor en el objeto sistema de ecuaciones lineales; desarrollada en el programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Garzón, 2020).

La investigación centrada en el estudio histórico- epistemológico del objeto SEL, se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, a nivel exploratorio lo cual implica que no se buscaban explicaciones causales sino que se interpretaron realidades, es decir, se analizó el desarrollo natural de los sucesos, donde no hubo manipulación respecto a la realidad (Corbetta, 2003). Este estudio se realizó a nivel descriptivo ya que se identifican las características más importantes del objeto SEL, con respecto al origen y evolución del objeto matemático SEL, para esto se analizaron los sistemas de prácticas abordados por varias civilizaciones a lo largo del tiempo, arrojando ocho configuraciones epistémicas emergentes de los sistemas de prácticas en cada época de la humanidad, conformando así el significado global del objeto SEL. Después de realizar el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, se realiza el análisis semiótico a un problema del periodo 1: época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C*)*, para encontrar el significado parcial del objeto SEL asociado con una configuración epistémica propia de una situación problema de la época.

II. REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

El marco teórico de investigación en Educación Matemática: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática-EOS desarrollado por Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007 incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, con bases semióticas de índole pragmatista y un modelo instruccional coherente; el cual precisa las nociones teóricas desarrolladas y adaptadas de otras teorías que integran este enfoque. El enfoque ontosemiotico se viene trabajando desde el año de 1994 y nace del análisis a diversas teorías, al considerar que no hay respuesta clara, satisfactoria y compartida entre ellas (Teoría de las Situaciones Didácticas - TDS, Teoría Antropológica de lo didáctico-TAD, Dialéctica Instrumento – Objeto: DIO y Juego de Marcos JM, Teoría de los Campos Conceptuales - TCC) al problema epistemológico (en matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de la matemática (Sepúlveda, 2018, p.44).

Según Godino, Batanero & Font (2019), en este enfoque se asume la pertinencia y utilidad de avanzar hacia la construcción de un sistema teórico, que permita abordar de manera articulada los *problemas epistemológicos, ontológicos, semiótico-cognitivos y educativos* implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, del problema epistemológico surgen las preguntas ¿Qué es un objeto matemático? ¿Cuál es la naturaleza de ese objeto matemático? y de manera similar ¿Cuál es el significado de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado? Por tanto, se desarrollan herramientas teóricas y metodológicas en el enfoque como: prácticas matemáticas, objeto matemático, significado de los objetos matemáticos, análisis semiótico y configuración epistémica.

En este sentido, Godino (1994), considera una *práctica* a "toda actuación o manifestación lingüística o no realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p.334). Si las prácticas son realizadas por un docente o un grupo de docentes, se considera como una práctica institucional, pero si la práctica es realizada por un estudiante se considera práctica personal. Igualmente, se considera un *objeto matemático* o entidad matemática a todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas (Blumer 1982, p.8).

Otra noción importante es la de *significado de un objeto matemático,* que para Pino-Fan (2013) corresponde al sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona o una institución realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene, que para el caso del estudio corresponde a las situaciones-problemas relacionadas con el objeto SEL. En la misma dirección, la noción de *configuración epistémica* (Godino, Contreras & Font, 2006) se puede ver como un sistema de objetos matemáticos primarios que se relacionan entre sí y llevan a resolver una situación problema, llegando a conformar sistema de prácticas matemáticas relacionadas con cada objeto matemático. Cada configuración se relaciona con un *significado parcial del objeto matemático*. Estas configuraciones se analizan a partir de un análisis semiótico (Godino, 2002), el cual corresponde a una técnica analítica (metodológica) que permite identificar los significados institucionales y personales puestos en juego, al resolver las situaciones problema propuestas en los procesos de instrucción matemática; la configuración epistémica se compone de los objetos primarios:

- ✓ El *Lenguaje,* corresponde a términos, expresiones, notaciones, gráficas. En un texto intervienen en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático puede usarse otros registros (oral, gestual).
- ✓ Las *Situaciones* corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemática, ejercicios.
- ✓ Los *Procedimientos* son operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo. Son las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas.
- ✓ Los *Conceptos* son dados por las definiciones o descripciones, por ejemplo: numero, punto, recta, media, función…
- ✓ Las *Proposiciones* son las propiedades o atributos de los objetos mencionados y suelen darse como enunciados.
- ✓ Los *Argumentos* pueden ser deductivos o de otro tipo. Se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos objetos que se relacionan entre si y definen cada configuración epistémica como se muestra en la Figura 1.

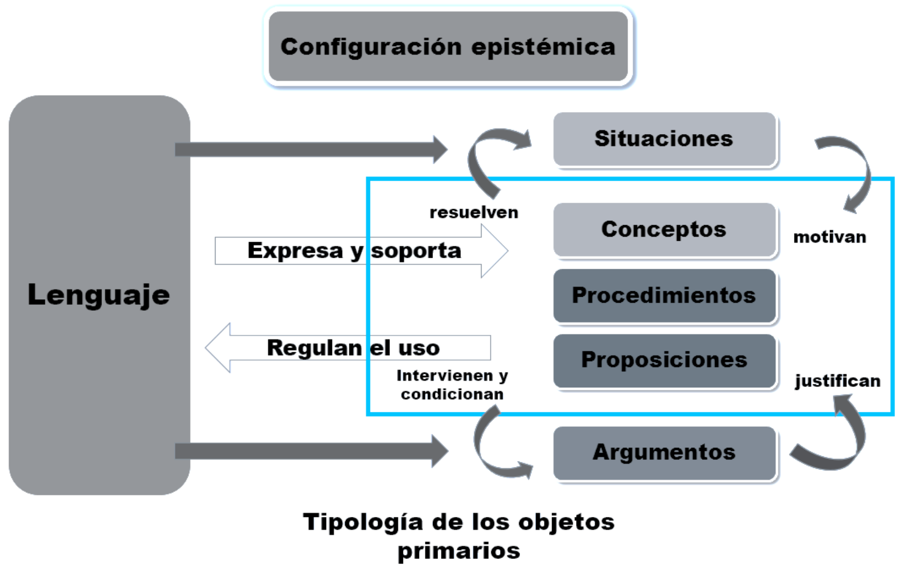


Figura 1: Configuración Epistémica (Fuente: Font & Godino, 2006).

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Estudio histórico-epistemológico del objeto sistemas de ecuaciones lineales

El estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, inicia con el planteamiento de la problemática de resolver situaciones problemas de la realidad, que involucran los sistemas de ecuaciones lineales en las diferentes épocas de la humanidad: época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea. El ***periodo 1,*** corresponde a la *época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C)* y en él se destaca el trabajo realizado en Babilonia, a múltiples situaciones problemas relacionadas con: distribución de cosechas, problemas de áreas de terrenos, cálculos de volúmenes, compra y venta de animales, problemas de equivalencia entre metales, problemas de repartición de pan y cerveza: todos ellos relacionados con los SEL, generando así un sistemas de prácticas matemáticas de donde emergen los primeros significados parciales del objeto SEL y se relaciona con la solución dada por el Método de la falsa posición para sistemas de ecuaciones $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$. En este sentido, Kline (1992) señala que los Babilonios, llegaron a resolver problemas concretos que conducían a sistemas no necesariamente lineales pero que podían ser reducidos a ecuaciones de cuarto grado. Asimismo, en la cultura China, se desarrolló una de las obras más importantes en la historia de las matemáticas llamada: *"Nueve capítulos sobre el arte Matemático "*o también *"La Matemática en nueve capítulos"* publicado durante la Dinastía Han (c. 206 a. C – c. 220 d. C). En esta obra se encuentran situaciones problemas que fueron resueltas por SEL, y llegaron a generar distintos tipos de solución (significados parciales del objeto) tales como el método de las dos situaciones erróneas (correspondiente al método de la doble falsa posición), el método de exceso y defecto, y además se encuentra el método fan-chen que actualmente es conocido como la eliminación gaussiana en la resolución de ecuaciones lineales simultaneas.

En el ***periodo 2.*** *Edad media: (476 d. C – 1453 d. C; siglo V-XV)* los Hindúes realizaron grandes estudios en el desarrollo del álgebra como el nuevo sistema de numeración favoreciendo el desarrollo de

las matemáticas: en esta cultura se encuentra el planteamiento de problemas relacionados con áreas y la repartición de herencias, los cuales se traducían en la solución de ecuaciones algebraicas de grado uno y dos pero su atención no se centraba en los SEL. Sin embargo, hacia el año 1202 surge uno de los aportes europeos más importantes de la época proporcionado por Leonado de Pisa (c.1175 - 1250) más conocido como Fibonacci, el cual corresponde al texto denominado *Liber Abaci,* en esta obra se encuentran problemas de contabilidad mercantil, diferentes cambios de monedas y además aparecen problemas que Fibonacci resuelve por medio de la regla de los dos errores que había aprendido de los árabes. En dicha obra, Fibonacci soluciona una situación problema sobre el precio de un caballo y la distribución de dinero entre dos personas para la compra del caballo por el método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un SEL (significado parcial).

En el ***periodo 3.*** *Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII)* del análisis a las soluciones de los SEL y de los diferentes métodos de solución, emerge una de las ramas más importante en las matemáticas denominada *Álgebra Lineal,* donde emergen dos objetos matemáticos importantes para la solución de los SEL; las matrices y los determinantes. El matemático Gerónimo Cardano (1501 - 1576) en su obra *Ars Magna*, presenta un método de solución a un sistema lineal de dos ecuaciones que llamo *regula de modo,* que serían las bases para lo que hoy se conoce como la *regla de Cramer*. Este método consiste en hacer operaciones elementales con los coeficientes del sistema y así encontrar la solución; a este sistema de prácticas se le asocia el significado parcial denominado: *método de Cardano para la solución de SEL* $2 \, x \, 2$. Es importante comentar que el método de Cardano es una aproximación o aplicación al método convencional denominado método de sustitución para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Se resalta que la descripción del método es de tipo retórica, ya que para la época solo se contaba con la representación numérica. Por otra parte, hacia el año 1748 fue publicado el libro póstumo del matemático escoces Colin Maclaurin (1698 - 1746) titulado: *Treatise of Algebra,* donde se encuentran problemas de la vida cotidiana y problemas netamente matemáticos, que conducen a la formulación de sistemas lineales. La solución a los SEL eran resueltos por un método específico denominado eliminación sucesiva de incógnitas (significado parcial), al punto que en el capítulo XII se describen dos teoremas que presentan soluciones alternativas a los sistemas $2\ x\ 2$ y $3\ x\ 3$ respectivamente, lo que en la actualidad se llama método de los determinantes. Cabe aclarar que el método de Maclaurin, se asemeja al actual método convencional denominado el método de igualación para sistemas de ecuaciones lineales.

Finalmente en el ***periodo 4.*** *Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad)* el matemático suizo Gabriel Cramer (1704 - 1752) toma como referencia el trabajo realizado por Cardano y Maclaurin respecto a la solución de los SEL con base en los coeficientes del sistema, por lo que en 1750 publica el tratado de geometría: *Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques,* en el cual se encuentra descrita la regla general para resolver sistemas de ecuaciones $n \times n$ lo cual se considera como la regla de Cramer (significado parcial). En otra dirección Leonhard Euler (1707-1783) no se interesa por resolver SEL, pero si analiza cuando dos ecuaciones son insuficientes para determinar los valores de las dos incógnitas (solución única), es decir, cuando una ecuación es combinación lineal de la otra, y por tanto surge la necesidad de agregar una restricción para que las ecuaciones a resolver fueran diferentes entre sí con el fin de encontrar los valores de las incógnitas y que el método siguiera funcionando. En esta dirección el matemático francés Étienne Bézout (1730 - 1783) describe una regla general para calcular los valores de las incógnitas de un sistema lineal muy análogo al método de Maclaurin que tiene gran similitud a lo que hoy corresponde al método convencional de reducción para sistemas de ecuaciones lineales. En el mismo sentido Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) se encontró con los sistemas de ecuaciones lineales al desarrollar el método de los mínimos cuadrados en sus estudios de geometría, es decir, utilizo este nuevo método para calcular la órbita del asteroide Ceres en 1801. Posteriormente en 1810 Gauss desarrolló la resolución numérica de los sistemas lineales por eliminación de incógnitas en su obra: *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum,* donde introdujo el procedimiento sistemático de eliminación de incógnitas para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin usar matrices propiamente, el cual se ha difundido como *eliminación gaussiana.* Gauss consultó la obra: *Nueve capítulos sobre el arte matemático* mencionada anteriormente, para el estudio de la órbita elíptica del planetoide Pallas, usando observaciones realizadas entre los años 1803 y 1809, donde habían tenido que estimar el valor de 6 incógnitas en un sistema de 6 ecuaciones lineales.

Como conclusión se establece que el objeto sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la historia emerge de la solución de situaciones problemas (sistemas de prácticas), las cuales están asociadas a 8 configuraciones epistémicas donde cada configuración se relaciona con un significado parcial del objeto SEL. De esta manera, en la tabla 1 se muestra los significados parciales reconstruidos para el objeto SEL.

Tabla 1: Situaciones problema, configuraciones y significados parciales del objeto SEL

Periodos	**Situación - Problema**	**Configuración Epistémica**	**Significados Parciales del objeto Sistemas de Ecuaciones Lineales**
I Época Antigua	SP1.1. Tamaño de terrenos	CE1.1 Problemas de áreas de terrenos	SIGP 1.1 Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 1.2. Repartición de cantidades desconocidas	CE 1.2 Problemas sobre el peso de metales por el método de las dos situaciones erróneas	SIGP 1.2 Método de la doble falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales
	SP 1.3 Grupo de personas y compra de animales	CE 1.3 Problema de exceso y defecto	SIGP 1.3 Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China
II Edad Media	SP 2.1 Precio de animales y distribución de dinero	CE 2.1 Problemas de animales e intercambio de dinero	SIGP 2.1 Método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un sistema de ecuaciones lineales
III Edad Moderna	SP 3.1 Precio de piezas de seda	CE 3.1 Problemas relacionados con el precio de telas de seda	SIGP 3.1 Método de Cardano para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 3.2 Teorema I. Sistemas de ecuaciones 2×2 según Maclaurin	CE 3.2 Solución a sistemas de ecuaciones 2×2 por eliminación sucesiva de incógnitas	SIGP 3.2 Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 3.3 Teorema 2. Sistemas de ecuaciones 3×3 según Maclaurin	CE 3.3 Solución a sistemas de ecuaciones 3×3 por eliminaciones sucesivas	SIGP 3.3 Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 3×3

		de incógnitas	
IV Edad Contemporánea	SP 4.1 Descripción de la regla de Cramer	CE 4.1 Solución a sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer	SIGP 4.1 Método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

IV. CONSTRUCCIÓN DE UN SIGNIFICADO PARCIAL PARA EL OBJETO

Sistemas de Ecuaciones Lineales

En el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, se identificaron las configuraciones epistémicas que dieron origen a los significados parciales del objeto SEL. Ahora se plantea la pregunta ¿Cómo un *estudiante/profesor* puede reconstruir el significado parcial del objeto SEL denominado el Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China? Para responder a este interrogante se seleccionó una situación problema del periodo 1, plasmada en la sección VII de la obra *Nueve capítulos sobre el arte Matemático,* situación problema que da respuesta a este interrogante.

Situación problema 1: **Grupo de personas y compra de animales (exceso y defecto)**

Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el costo de las gallinas?

Para encontrar la solución a la situación problema de la época, se sugieren los siguientes pasos:

a) En términos algebraicos, llamaremos a las dos contribuciones a y a' como el *exceso,* es decir (lo que sobra) y al *defecto* b y b' (lo que deben). Se colocan estos valores en forma de un arreglo matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Luego se multiplica estos cuatro valores en forma cruzada, pero estos productos se colocaran en la fila 1, la fila dos queda igual:

$$\begin{pmatrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

c) A continuación se suman los valores de cada fila:

$$\begin{pmatrix} ab' & + & a'b \\ b & + & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & + & 66 \\ 11 & + & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 27 \end{pmatrix}$$

d) Se procede a hacer el cociente entre las sumas realizada en la primera fila y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas "exceso":

$$\frac{ab' + a'b}{a - a'} = \frac{210}{3} = 70$$

e) De manera análoga, se hace el cociente entre la suma realizada en la segunda fila y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas "exceso":

$$\frac{b + b'}{a - a'} = \frac{27}{3} = 9$$

f) Luego el costo total de las gallinas corresponde a 70 wen y 9 es el número de personas que hay en el grupo, encontrando así la solución a la situación problema.

Para mostrar la validez del método, se procede a resolver la situación problema por medio de la regla de Cramer.

Problema: *Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el coste de las gallinas?*

Solución: En primer lugar el problema se interpreta de la siguiente manera:

a) Sea $\boldsymbol{x}$ el número de personas, $\boldsymbol{y}$ corresponde al precio final de las gallinas, 9 y 6 el dinero con el que cuentan los compradores, 11 y 16 el exceso-defecto, es decir, lo que sobra y lo que quedarían debiendo por las gallinas.

b) Entonces se plantea el sistema de ecuaciones lineales en notación moderna:

$$\begin{cases} 9x - y &= 11 \\ 6x - y &= -16 \end{cases}$$

c) Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = (9)(-1) - (6)(-1) = -3$$

d) Como el $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución y es única. Luego se calcula los determinantes del sistema.

$$\det(\boldsymbol{A}_x) = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -16 & -1 \end{bmatrix} = (11)(-1) - (-16)(-1) = -27$$

$$\det(\boldsymbol{A}_y) = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -16 \end{bmatrix} = (9)(-16) - (6)(11) = -210$$

e) Luego se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable x:

$$x = \frac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-27}{-3} = 9$$

f) Del mismo modo se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable y:

$$y = \frac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-210}{-3} = 70$$

g) Luego la solución del problema es $\boldsymbol{x = 9}$ y $\boldsymbol{y = 70}$ que corresponde a 9 personas que hay en el grupo y el costo de las gallinas es de 70 wen.

Análisis semiótico a la solución presentada en la obra *Nueve capítulos sobre el arte Matemático*:

En primer lugar, se evidencia que las *notaciones y expresiones* utilizadas en la cultura China para la solución de problemas de exceso y defecto, corresponden a escribir los datos del problema en un arreglo matricial de números. Los *términos* exceso y defecto junto con las notaciones y expresiones mencionadas hacen referencia a los ***elementos lingüísticos*** utilizados para expresar y soportar los ***procedimientos*** en la solución del problema. Las instrucciones encontradas en la solución del problema corresponden a la utilización de los ***conceptos:*** multiplicación cruzada, cociente, suma y diferencia de cantidades. En cuanto al **método** de solución, es explicado como cuentas a realizar con los coeficientes (datos del problema) y no se evidencia el uso de ***proposiciones,*** puesto que corresponde a un **procedimiento** para hallar la solución al problema. En la solución presentada sobresale el objeto matemático primario de los ***procedimientos,*** ya que la solución se da utilizando el método de exceso y defecto utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China.

En la siguiente tabla se muestra, como la situación problema, activa los elementos de la configuración epistémica y esta a su vez, genera un significado parcial del objeto SEL.

Tabla 1: Situaciones problema, configuración y significado parcial del objeto SEL

Situación Problema 1:	**Grupo de personas y compra de animales**
Configuración Epistémica 1:	**Problemas por exceso y por defecto**
Significado parcial 1:	**Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China**

V. CONCLUSIONES

Los sistemas de ecuaciones lineales surgen de la necesidad de resolver situaciones problemas concretos en las diferentes civilizaciones antiguas, desde los inicios de la humanidad hasta nuestros días, descubriendo cada vez diferentes formas de solución (métodos) u otros objetos matemáticos intervinientes en los sistemas de prácticas (determinantes y matrices) que hicieron parte de los diferentes significados parciales del objeto SEL, lo que dio origen al significado global del objeto SEL. En la figura 2, se presenta en forma completa el resultado del Estudio Histórico-Epistemológico para el objeto SEL.

Bajo esta perspectiva se concluye que es importante que el docente llegue a conocer y especialmente a reconstruir la naturaleza del objeto matemático SEL, ya que se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves para los procesos de la constitución teórica del objeto SEL en el estudiante y especialmente en el profesor, lo cual posibilitan no solo una mejor comprensión del objeto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción de los objetos matemáticos, los cuales merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas didácticas. Además, el conocimiento del profesor en el tema del significado global del objeto SEL le permitirá en primer lugar realizar cuestionamientos sobre si los estudiantes que están en formación, asimilan el objeto matemático, al punto que mediante un análisis semiótico puede llegar a identificar la tipología de los objetos primarios que conoce el estudiante, y a la vez identificar algunos obstáculos epistemológicos y semióticos que le permitirán re direccionar el significado institucional de referencia (significado pretendido por el profesor según cada método de solución) enfocado a suplir las falencias encontradas en los estudiantes y de igual forma según este desarrollo se deben diseñar las estrategías didácticas que lleven a la emergencia de un significado institucional muy cercano al significado global del objeto SEL presentado en la Figura 2.

De la consideración conjunta de los elementos y sus diferentes tipos de relaciones entre configuraciones epistémicas, ilustrados en la Figura 2 es lo que conforma el ***significado global del objeto SEL.***

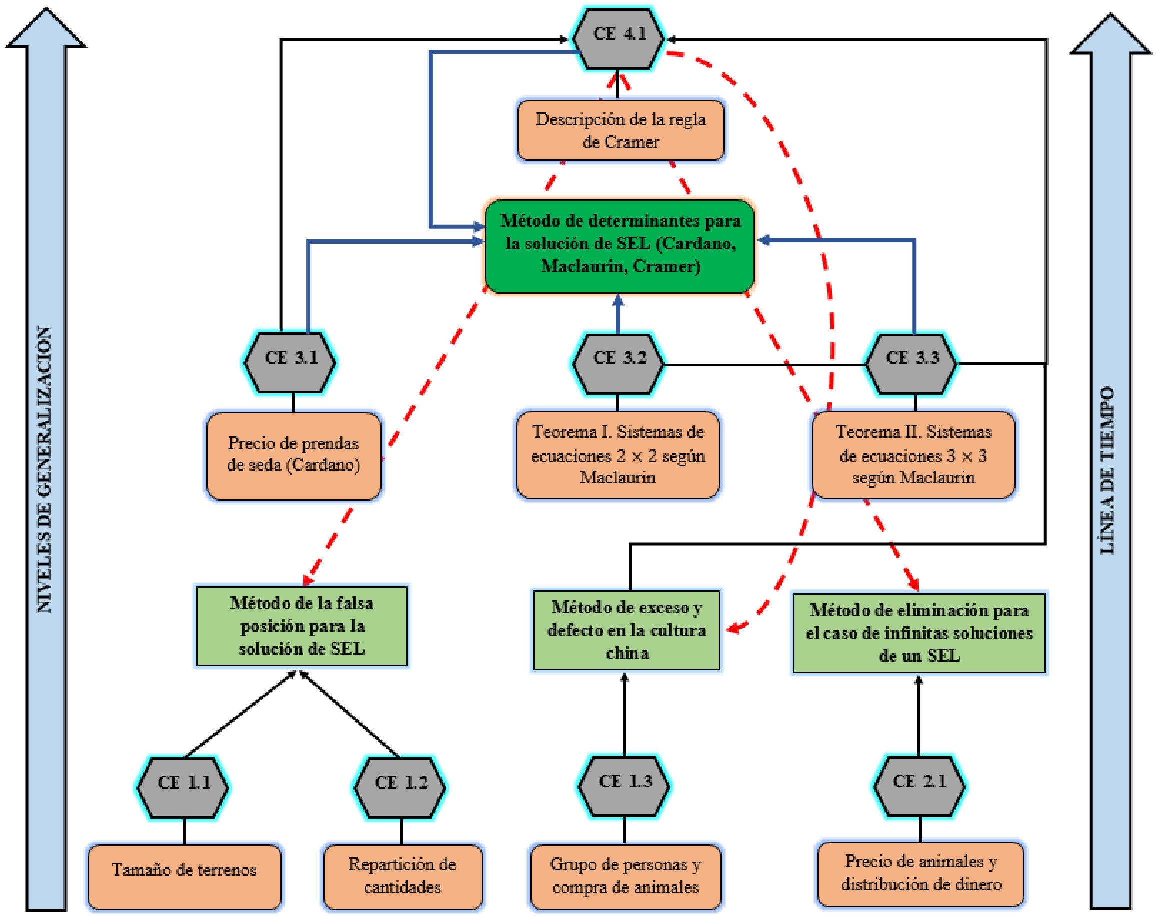


Figura 2: Significado Global del Objeto SEL (Fuente: Elaboración Propia).

REFERENCIAS

Bézout, É. (1779). *Théorie Générale des Équations Algébriques.* Paris: Ph-D. Pierres.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (M. Martínez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método.* Barcelona: Hora.

Cardano, G. (1993). On the rule of method. En G. Cardano, *Ars Magna or the Rules of* (T. Witmer, Trad., Segunda ed., págs. 180-181). New York: The MIT.

Carrera, J. (2009). *Liu Hui "Nueve capítulos de la matemática china".* Madrid: Nivola.

Collette, J. (1986). *Historia de las Matemáticas I.* México: Siglo XXI Editores.

Corbeta, P. (2010). *Metodología y Técnicas de investigación Social*. Madrid: McGraHill.

Cramer, G. (1750). *Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques.* F Cramer & Cl Philibert.

Euler, L. (1748). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlín, Tom IV*, 219-233.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Garzón, C. (2020). *Caracterización de las concepciones y creencias según la dimensión epistémica del conocimiento del profesor en el objeto sistema de ecuaciones lineales (Tesis de Maestría).* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2.3), 237-284.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: Implication for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días.* (M. Martínez, J. Tarrés, & A. Casal, Trads.) Madrid: Alianza Editorial.

Maclaurin, C. (1748). *A treatise of algebra in three parts.* London: A Millar & J Nourse.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la Faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la Derivada (Tesis Doctoral).* Universidad de Granada, España.

Sepúlveda, O. (2018). *El Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor Universitario.* Tunja: Editorial UPTC.

NIVELES DE CONOCIMIENTO EMPLEADOS COMO RECURSOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TEORÍA DE NÚMEROS

Diana I. Quintero Suica
Universidad Antonio Nariño, dquintero72@uan.edu.co

Abstract— Problem solver's knowledge and tools, or resources, are decisive in produced solution by her/him when she/he is solving a problem. The purpose of this document is to identify the resources used by three eleventh grade students in IED Instituto Técnico Olga Santamaría school, and their impact in solving two number theory problems. For this, a fragment consisting of six interactions and the academic production of these students during the resolution of the proposed problems are analyzed. Schoenfeld's theory of problem solving is used as a reference, particularly the category of resources, specifying it in four types of knowledge: ethnomathematical, intuitive, technical-symbolic and formal. The results show, on the one hand, that intuitive knowledge is a determining factor in solving problems and, on the other hand, formal knowledge only arises after its introduction by an external agent to the problem solver.

keywords— resources, mathematical problem, number theory, mathematical knowledge.

Resumen— Los conocimientos y herramientas con los que cuenta un individuo, o recursos, son determinantes en la solución producida por este al resolver un problema. Este documento tiene como propósito identificar los recursos que emplean tres estudiantes de grado undécimo de la IED Instituto Técnico Olga Santamaría, y su impacto al resolver dos problemas del ámbito de la teoría de números. Para ello, se analiza un fragmento constituido por seis interacciones, y la producción académica de estos estudiantes durante la resolución de los problemas propuestos. Se usa como referente la teoría de la resolución de problemas de Schoenfeld, en particular la categoría de recursos, precisándola en cuatro tipologías de conocimiento: etnomatemático, intuitivo, simbólico-técnico y formal. Los resultados muestran, por un lado, que el conocimiento intuitivo es un factor determinante en la resolución de los problemas y que el conocimiento formal solo surge luego de su introducción por un agente externo al resolutor.

Palabras clave— recursos, problemas matemáticos, teoría de números, conocimiento matemático.

I. INTRODUCCIÓN

Partiendo de la noción de comprensión matemática como la habilidad para resolver problemas [1], es requerido reflexionar sobre los elementos involucrados en tal habilidad. Uno de tales elementos, son los recursos con los cuales cuenta el individuo que resuelve los problemas matemáticos planteados, entendiendo estos como "el conocimiento matemático que posee […] y que puede ser aplicado en el problema en cuestión" [1] la información que aquí se presenta contribuye en el análisis e interpretación de los recursos movilizados y su papel en la actividad matemática cuando se propone la resolución de conjunto de problemas. En ese sentido, el propósito de este documento es identificar y caracterizar los recursos empleados por tres estudiantes de grado undécimo y su impacto en el proceso de resolución de dos problemas de teoría de números.

El origen de la información objeto de análisis en este documento, proviene de una implementación de actividades relacionadas con problemas de teoría de números en una clase de matemáticas, para estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Instituto Técnico Olga Santamaría de Anolaima. Tal implementación proporciona información interesante para atender el foco central que se ha planteado en líneas anteriores.

En ese sentido, al analizar las producciones y transcripciones de algunas interacciones de clase proveniente de la información referida en líneas anteriores, pretendemos evidenciar ¿cuáles son los recursos empleados por los estudiantes analizados y su papel en el proceso de resolución de un problema de teoría de números?

II. MARCO DE REFERENCIA

Asumiendo los recursos matemáticos empleados en la resolución de un problema como "el conocimiento matemático que posee el individuo y que puede ser aplicado en el problema en cuestión" [1], la tarea de describirlos implica la recopilación de lo que el individuo involucrado conoce y las maneras en que este accede a estos conocimientos.

Para estudiar la unidad de análisis seleccionada, es posible establecer un conjunto de tipologías de conocimientos en niveles diferenciados que son susceptibles de ser empleados por los estudiantes a la hora de resolver los problemas propuestos. En el presente, se concibe cada tipo de conocimiento como sigue.

A. Conocimiento etnomatemático:

Este conocimiento como aquel que es compartido e identificado por una comunidad o grupo cultural específico tales como grupos de trabajo, niños de cierta edad o clases de profesionales [2]. Este conocimiento es parte de una dimensión cultural y, por tanto, se aleja de un ambiente académico.

B. Conocimiento intuitivo:

Se asume este tipo de conocimiento como aquellas "creencias que posee el individuo y que equivalen a un conocimiento porque se basan en la intuición" [3], entendiendo esta última como "un estado mental o evento en la que una proposición parece verdadera" [4].

C. Conocimiento simbólico-técnico:

Este tipo de conocimiento se asume como el conocimiento que "consiste en expresiones simbólicas, lenguaje natural y representaciones compuestas, como diagramas y tablas que generalmente también contienen símbolos y lenguaje natural." [5]. Con base en [6], es posible establecer tres categorías de conocimiento simbólico sobre el uso y significado en matemáticas de: i) las letras (a, A, α), ii) figuras (±, ÷, %), y iii) plantillas compuestas ({1, 2, 3}, r2, b0).

D. Conocimiento formal:

El conocimiento matemático formal "consiste en aquellas habilidades y conceptos enseñados en la escuela e incluye el uso de la notación numérica escrita convencional […] y el uso de algoritmos escritos" [7], además de su conjunción en cadenas de deducción que le permiten hacer inferencias matemáticas validables.

A continuación, se establecen algunos indicadores para cada uno de los tipos de conocimiento en la Tabla I, que surtirán efecto como la herramienta analítica del presente informe, y que permitirán el estudio detallado de la unidad de análisis propuesta proveniente de la información recolectada.

TABLA I

INDICADORES DE TIPOS DE CONOCIMIENTO QUE SIRVEN COMO HERRAMIENTA ANALÍTICA

Conocimiento etnomatemático	✓ Hace patente el uso de nociones propias de su cosmovisión para la interpretación de símbolos y conceptos involucrado en el problema con el fin de darle una solución.
Conocimiento intuitivo	✓ Realiza clasificaciones de algunos números de acuerdo con las propiedades características de algunas clases disyuntas (*v,g,* número par, número impar, número primo, número compuesto). ✓ Utiliza las nociones de paridad, imparidad, potencia, etc., con el fin de establecer hipótesis sobre una posible solución al problema.
Conocimiento simbólico técnico	✓ Utiliza notación (letras, figuras y plantillas compuestas) para la representación y manejo de conceptos tales como par, impar, potencia, divisibilidad, entre otros, con el fin de establecer la respuesta o solución al problema propuesto. ✓ Utiliza la simbología matemática con el fin de desarrollar procedimientos algorítmicos y rutinarios en la vía de solución del problema.
Conocimiento formal	✓ Evidencia y hace uso de una instancia proposicional como medio para hallar una vía de solución del problema propuesto. ✓ Reconoce la potencialidad de una instancia proposicional como ejemplo genérico de todos los posibles casos en los cuales es válida una afirmación.

III. METODOLOGÍA

La información de la cual proviene el fragmento con el que se pretende ilustrar el análisis, fue recolectada en el marco de la implementación de las actividades de clase mencionadas anteriormente, en el cual se pretendía que 32 estudiantes de grado undécimo resolvieran, en grupos de tres o cuatro integrantes, un conjunto de tres problemas propios de la teoría de números, cada uno de los cuales tenían cuatro opciones de respuesta con única solución. La inclusión de opciones de respuesta es debida al seguimiento de los protocolos de la institución educativa, los cuales orientan al desarrollo de actividades de aula estructuradas a partir de preguntas símiles a las pruebas estandarizadas en Colombia. Las actividades de enseñanza-aprendizaje fueron desarrolladas en una sesión de clase pertenecientes a la asignatura de matemáticas.

La recolección de la información se efectuó por medio de una grabación de audio por parte de la docente a las intervenciones de algunos de los ocho grupos de trabajo, de acuerdo con las dudas que cada uno de estos iba manifestando. Las transcripciones de la grabación de audio y las respuestas a los problemas escritas componen la información de la cual se extraen los datos.

Con el fin de seleccionar el fragmento de la información a presentar, se eligen las interacciones particulares de un grupo de tres estudiantes (Camila, Leidy y Laura) durante el proceso de resolución de los problemas que se ilustran en la Tabla II.

TABLA II

PROBLEMAS DE TEORÍA DE NÚMEROS PROPUESTOS A LOS ESTUDIANTES

Problema 1	Problema 4
Si *m* y *n* son números enteros impares, entonces es correcto afirmar que $m^2 + n^2$ siempre es: a. Un cuadrado perfecto. b. Divisible por 4. c. Par. d. Impar.	Si *a*, *b*, *c* son números primos diferentes y $n = \frac{a^{-1}b^{-3}}{a^{-2}b^{-4}c^{-2}}$ es correcto afirmar que: a. *n* es un entero. b. *n* es un número primo. c. *n* es un racional negativo. d. *n* es irracional.

El fragmento aquí presentado comporta el conjunto de seis interacciones no continuas del grupo de trabajo indicado, al resolver los dos problemas ilustrados. Todas estas se analizan como un continuo de trabajo de este grupo sobre sus avances en la actividad de clase propuesta. Sin embargo, en la presentación de su transcripción se incluyó una barra de color celeste para identificar las interacciones individuales.

Además, la información recolectada por medio de audio se complementa por medio de la producción escrita de estas estudiantes a los dos problemas planteados.

IV. ANÁLISIS

A continuación, en la Tabla III y IV, se presentan el fragmento de interacciones que suponen la unidad de análisis de los recursos empleados por las estudiantes.

A. Problema 1

TABLA III

INTERACCIÓN PROBLEMA 1 PROPUESTO A LOS ESTUDIANTES

1	Leidy	Nosotros creemos que es par porque cuando un número es elevado (…)
2	Docente	¿Problema 1? Ok.
3	Leidy	Porque cuando un número es elevado a la dos siempre va a dar par
4	Docente	Ok. Si quieren propongan entonces dos ejemplos en el que confirmen eso.
5	Laura	Pero no. Yo también digo que (…) no, no digo nada.
6	Docente	Tomen dos, un [número] *n* y un [número] *m* impar. No sé.
7	Laura	Tres y cinco.
8	Docente	Por ejemplo, eso. Elévenlos al cuadrado y vean si la suma es impar.
9	Laura	Pues si los tomamos así [*n*=3 y *m*=5] y los elevamos, y va a dar impar.
10	Docente	Escríbanlo.
11	Laura	Profe, no puede ser par ni impar porque ahí dice que siempre. Entonces siempre tiene que dar [par o impar]. Entonces no siempre va a dar par y no siempre va a dar impar porque ya lo comprobamos.
12	Docente	¿Qué problema es ese?
13	Laura	El primero.
14	Docente	El primero. Ok
15	Laura	Entonces [la respuesta] está entre estas dos (refiriéndose a las opciones a. y b. de la pregunta). Pero profesora ¿cómo así que un cuadrado perfecto?
16	Docente	¿Qué si esto (señalando el resultado de la operación escrita por la estudiante) es resultado de haber elevado un número al cuadrado? ¿Qué números tomaron? (…) Tres al cuadrado y nueve al cuadrado
17	Laura	¡Ajá! Sería seis (refiriéndose a la operación “tres al cuadrado”) y es impar (refiriéndose al resultado total de la operación).
18	Docente	Ok. Tres al cuadrado no te da seis.
19	Laura	¡Ah! Cierto que no.
20	Docente	Corríjanlo. Y cuando lo tengan bien escrito me lo escriben en la hoja.

A continuación, FIg. 1, se ilustra la producción escrita como resultado final de los ajustes sugeridos durante la interacción.

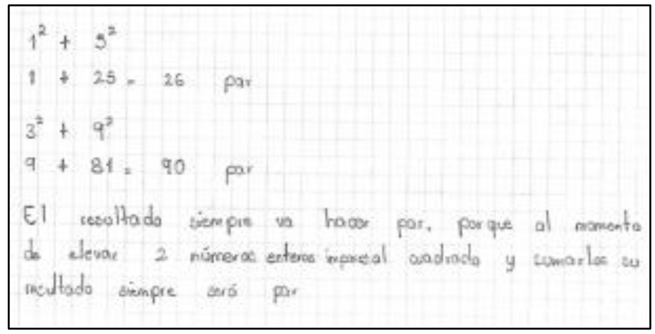


Fig. 1: Producción escrita para el problema 1

B. Problema 2

TABLA IV

INTERACCIÓN PROBLEMA 2 PROPUESTO A LOS ESTUDIANTES

21	Laura	Profesora ¿cuáles son los números primos?
22	Docente	¿Cómo uno sabe que un número es [un número] primo?
23	Camila	Pues yo tengo la idea del que es más o menos par. No todas las veces.
24	Docente	No, porque esos son los [números] pares. Los números primos ¿cuáles son?
25	Camila	[Aquellos] Que se pueden dividir (…) ¿por uno?
26	Docente	Y por sí mismo. Solamente. Por ejemplo ¿el [número] cinco es primo? (…) ¿Cuántos divisores tiene?
27	Laura	Dos.
28	Docente	Dos. El [número] uno y el [número] cinco. ¿El 9 es [número] primo?
29	Laura	No.
30	Docente	No. ¿por qué no Laura?
31	Laura	Porque al dividirlo me va a dar un número con coma algo ¿no? (refiriéndose al cociente como número decimal) O sea, no me va a dar exacto.

32	Docente	Pero ¿cuántos divisores tiene el [número] nueve?
33	Laura	¿El nueve?
34	Camila	Tres. 1, 6 y 9
35	Laura	Ah, sí. Tres.
36	Docente	Pero el seis no, porque cuando yo divido nueve entre seis la división no es exacta. Para que sea divisor es porque el residuo es cero.
37	Laura	Entonces es el 1, 3 y 9.
38	Docente	1, 3 y 9. Como él [número 9] tiene más de dos divisores que no son ni él ni el uno, pues ese no es [un número] primo porque tiene tres [divisores]. Para que sea [número] primo solo debe tener dos [divisores] y debe ser [el número] uno y él mismo. Si tiene más [divisores], ya no es [número] primo.
39	Laura	¿Cuáles son los números enteros?
40	Camila	¿Los números del uno al nueve?
41	Docente	¿Los números enteros? Del 1 a infinito; todos esos. Del menos uno hasta menos infinito; todos esos. Y el cero. O sea, los positivos, los negativos y el cero. Pero que no son fracciones
42	Laura	Y ¿cero, coma algo sirve?
43	Docente	No. O cero, o uno. O menos 1.
44	Laura	Entonces no sé
45	Leidy	Porque mira. Nosotros reemplazamos y nos da esto.
46	Docente	Ese ¿cuál [problema] es?
47	Leidy	El cuarto.
48	Docente	a, b, c son números primos diferentes y van a construir un [número] *n* así (refiriéndose a la forma del número en el enunciado).
49	Laura	Sí, porque siempre esto (señalando la forma del número *n* sobre la producción escrita) al elevar estos números nos van a dar cero, coma algo. Y esto, a lo que se divida, siempre va a dar un número entero. Pues es así lo que se me ocurrió en este momento. Y creo que es así.
50	Docente	Ok. Yo les sugiero algo. Antes de que sigan buscando números decimales. Esta división ¿les da cuánto?
51	Laura	Dos
52	Camila	Dos
53	Docente	Dos. ¿Qué opciones tienen?
54	Camila	Número entero o número primo.
55	Docente	O número primo. Listo. ¿Qué les sugiero yo? Tomen otros tres números primos y hagan lo mismo a ver cuánto les da. Porque tienen que descartar una de las dos. Con otro ejemplo de pronto y nos funcione.
56	Laura	Profe. ¿Cierto que se suman?
57	Docente	¿Se suma qué?
58	Laura	Los términos aquí (señalando el numerador de la expresión de *n*) para poder dar un solo número y poderlos dividir.
59	Docente	¿Este con este?
60	Laura	Sí.
61	Docente	No. Se multiplican.
62	Laura	O sea, cero, coma tres por cero, coma cero, cero, ocho.
63	Docente	Sí.
64	Laura	Profe. Nos da un número entero.
65	Docente	Cuarto [problema] es la [opción] a. Definitivamente les dio entero. Listo, bien.
66	Laura	¿Sí profe?
67	Docente	El otro número no les dio primo.
68	Laura	Sí sirve, pero tiene otro divisor que es el [número] dos.
69	Docente	Ah, entonces no. Bien.

A continuación, Fig. 2, se ilustra la producción escrita como resultado del tratamiento al segundo problema en correspondencia con la interacción presentada.

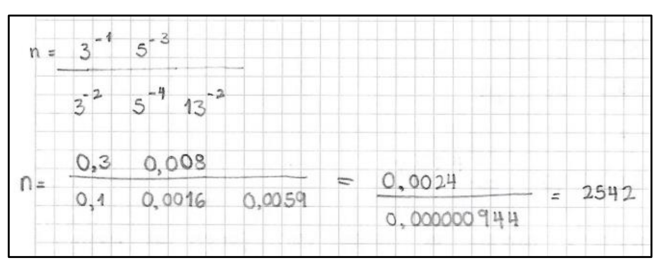


Fig. 2: Producción escrita para el problema 4

Con base en las unidades de análisis se procederá a evidenciar en las interacciones los elementos de cada uno de los conocimientos definidos en el marco teórico, para los desarrollos de cada uno de los problemas propuestos.

C. Estudio de interacciones del problema I

1) Interacción 1

Con base en la primera intervención de Leidy (línea 1 y 3), es posible inferir que ella pone en juego una creencia acerca de la forma general del resultado, atendiendo a la operación indicada en el enunciado del problema. Así, la paridad de la suma está asegurada por el empleo de la potencia cuadrada en un número impar.

Esta creencia parece ser un común acuerdo implícito también para Laura (línea 5), aunque muestra en su verbalización alguna señal de duda sobre este hecho, lo cual se ratifica al momento de pensar en dos números impares específicos (línea 9).

Lo anterior, permite reconocer la movilización de un conocimiento intuitivo al utilizar nociones de paridad, imparidad, potenciación, etc., con el fin de establecer hipótesis sobre una posible solución al problema.

Una particularidad en la primera interacción, y que dará un viro al desarrollo del trabajo de clase de las estudiantes en ambos problemas, es el uso de instancias de la proposición contenida en el enunciado, al sugerir un par de números impares específicos.

Sin embargo, y como se evidencia, este recurso entra en escena gracias a la sugerencia de la docente (línea 6), se desarrolla por escrito como estrategia (Fig. 1), pero no se configura en un recurso explícito por parte de quienes resuelven el problema.

Así, aunque se utiliza una instancia como vía para la solución del problema, lo cual es propio de la caracterización del conocimiento formal, no parece ser una contribución genuina de las estudiantes. La sugerencia dada por la docente limita de alguna forma los resultados obtenidos pues, es posible, que las estudiantes usarán otros recursos para justificar su respuesta en ausencia de esta idea.

2) Interacción 2

En relación con la intervención de Laura para la segunda interacción, es posible ver que ella reconoce que la propiedad que deben cumplir todas las respuestas de las instancias utilizadas debe ser propia de una clase específica (línea 11 y 15). Esta clasificación se adeuda, en parte, a la necesidad de seleccionar una de cuatro opciones de respuesta.

Con lo anterior, es posible colegir que, en cierto grado, se moviliza un conocimiento intuitivo pues se realizan clasificaciones de algunos números de acuerdo con propiedades particulares.

Ahondando un poco más en este par de líneas, y si bien es claro que la idea de proponer ejemplos como casos particulares de la situación no es un recurso ideado por Laura, sí es posible evidenciar el potencial que ella reconoce en estos ejemplos como casos genéricos de todos los posibles casos. Lo anterior se fundamenta en las palabras “entonces siempre tiene que dar” que ella menciona a la docente (línea 11).

Lo anterior se corrobora, además, al observar la producción escrita en la cual ilustra, justamente, los ejemplos tomados de números particulares, acompañado de un texto que los justifica incluyendo las palabras “…su resultado siempre será par.” (Fig. 1). Así, es admisible pensar en un incipiente manejo del conocimiento formal.

Por último, en la producción escrita se evidencia el uso de simbología matemática para realizar la ejemplificación de los casos particulares a tomar. En la interacción (línea 17) Laura deja ver su concepción acerca de que el resultado de un número al cuadrado es el producto entre la base y el exponente (tres al cuadrado es seis). Si bien esto último no es el resultado esperado, son evidencias de un manejo del conocimiento simbólico técnico.

D. Estudio de interacciones del problema 4

1) Interacción 3

En la tercera interacción, Camila inicia declarando las ideas previas que posee acerca de lo que es y cómo identificar un número primo. Esto pues, tanto en el enunciado del problema como en las opciones de respuesta, se encuentra contenido este concepto.

Las nociones que ella logra evocar son un claro elemento de aquellas que comparten los estudiantes compañeros de ella. Por ejemplo, al indicar que un número primo “es más o menos par. Pero no todas las veces”, quizá haciendo referencia a que solo hay un número primo par y el resto son impares. Esto permite inferir una posible movilización de conocimiento etnomatemático.

Nuevamente, se vuelve a evidenciar la predilección de la docente por evocar ejemplos específicos para ilustrar una proposición matemática con el fin de dar significado a lo cuestionado y de, posteriormente, retomar el enunciado general. Esto se fundamenta en los diferentes cuestionamientos hechos a las estudiantes (línea 22, 26, 28) y en la declarada conclusión (línea 38).

Lo anterior es relevante pues, es de recordar, que estas maneras de dar una vía de solución al problema son adoptadas y apropiadas finalmente por las estudiantes cuando resuelven los problemas propuestos.

Lo último por analizar en esta interacción es la declaración de Laura acerca de lo que para ella es una división exacta, identificándola como aquella cuyo cociente no es un número decimal o “con coma algo” (línea 31). Esto lo aplica en el contexto del cuestionamiento “¿Es 9 un número primo?” para reconocer que, por ejemplo, el número seis no es un divisor del número nueve (línea 37), gracias a la indicación dada por la docente (línea 36).

2) Interacción 4

Aunque en forma de cuestionamiento, Camila deja ver su noción acerca de los números enteros como aquellos equivalentes a los números dígitos (línea 40). A su vez, Laura expresa la posible conexión que hace entre los números enteros y los números decimales de igual forma que Camila: en un cuestionamiento (línea 42).

Con las dos líneas anteriores se puede evidenciar el tratamiento de los números de acuerdo con clasificaciones, atendiendo a clases disyuntas de números, por lo cual es posible ver la movilización de un conocimiento intuitivo.

La información proporcionada por Laura al mencionar la posible forma decimal que resulta de elevar un número primo a una potencia negativa (línea 49) es una evidencia sobre la puesta en escena de nociones de la teoría de números para establecer hipótesis acerca de la solución del problema. Esto refleja y ratifica el uso de un conocimiento intuitivo en esta interacción.

Pero adicionalmente, en esa misma línea, se hace manifiesta la apropiación por parte de ella de evidenciar y hacer uso de una instancia de la proposición contenida en el enunciado como medio para hallar una vía de solución del problema.

Lo anterior porque, por un lado, señala la forma del número n que construyó con base en el ejemplo propuesto por ellas, el cual es presentado en su producción escrita (Fig. 2.) y, por otro, porque aduce que "eso es lo que se me ocurrió" refiriéndose a la ejemplificación como medio para abordar la situación. Esto último es característico del conocimiento formal establecido en este documento.

Nuevamente, en esta interacción la docente deja de manifiesto el uso de la ejemplificación como recurso para decidir sobre las opciones de respuesta (línea 55), pues en este problema particular, el ejemplo propuesto por las estudiantes solo ofrecía argumentos para descartar una de las cuatro opciones.

3) Interacción 5

Por medio de un cuestionamiento hecho por Laura (línea 56 y 58) acerca de la operación que debe interpretarse entre los símbolos a-1b-3, ella manifiesta la necesidad de poner en juego la notación para conceptos de potenciación y el desarrollo de procedimientos algorítmicos en la vía de solución del problema. Esto lo termina reflejando en la producción escrita (Fig. 2), con base en los ajustes sugeridos por la docente a tal interpretación, por lo cual esto permite inferir el papel fundamental que juega su conocimiento simbólico-técnico.

4) Interacción 6

En esta interacción Laura expone su visión acerca de la opción de respuesta del problema 4 a partir de otro ejemplo que realizó del enunciado del problema. En este ejemplo, el resultado le ofrece como resultado un número entero pero compuesto, lo cual le permite determinar la respuesta (línea 68). Aquí es permisible colegir el uso de la potencialidad de los ejemplos usados por ella como casos que le permiten generalizar sobre esta situación (línea 64), por lo cual se estaría en presencia de un caso de uso de conocimiento formal.

V. CONCLUSIONES

Un asunto interesante que se advierte en el discurrir de la situación es la apropiación de estrategias y formas específicas de resolver por parte de los estudiantes, que son sugeridos por el docente en un principio. Esto sucede a tal punto que ellos mismos terminan convencidos de ser una idea genuinamente producida por su saber. Si bien esto escapa el asunto del presente documento sobre los recursos, es claro que estos últimos tienen gran influencia en estas elecciones particulares.

Por otro lado, y teniendo en cuenta la naturaleza de los problemas propuesto, se evidencia una mayor movilización de conocimientos intuitivos en contraste con otros tipos de conocimiento. En particular, el uso de las nociones propias de la teoría de números con vías a dar una solución al problema es lo más recurrente durante las interacciones.

El conocimiento formal, si bien evidenciado en algunas interacciones, se reconoce en unas génesis externas a quienes se analizaban como resolutores de las situaciones por lo cual, limita las posibles expresiones alternas que estos pudiesen tener para abordar la situación. Posiblemente, tales expresiones pudiesen ser propias del conocimiento etnomatematico.

REFERENCIAS

[1] A. Schoenfeld, Mathematical problem-solving, Florida: Academic Press, Inc., 1985.

[2] U. D'Ambrosio, Ethnomathematics and its place in the history and Pedagogy of mathematics, For the leaning of mathematics, vol 5, pp. 44-48, 1985.

[3] E. Chudnoff, Intuitive knowledge, Philosophical Studies, vol 162, pp. 359-378, 2013.

[4] J. Pust, Intuition, The Standford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta, 2019.

[5] J. Drouhard y A. Teppo, Symbols and Language, En: K. Stacey, H. Chick y M. Kendal. (Eds.) The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI Study, Dordrecht: Kluwer, pp. 227-264, 2004.

[6] M. Serfati, La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique, París: Petra, 2005.

[7] D. Purpura, A, Baroody y C. Lonigan, The transition from informal to formal mathematical knowledge: mediation by numeral knowledge, Journal of Educational Psychology, pp. 1-12, 2013.