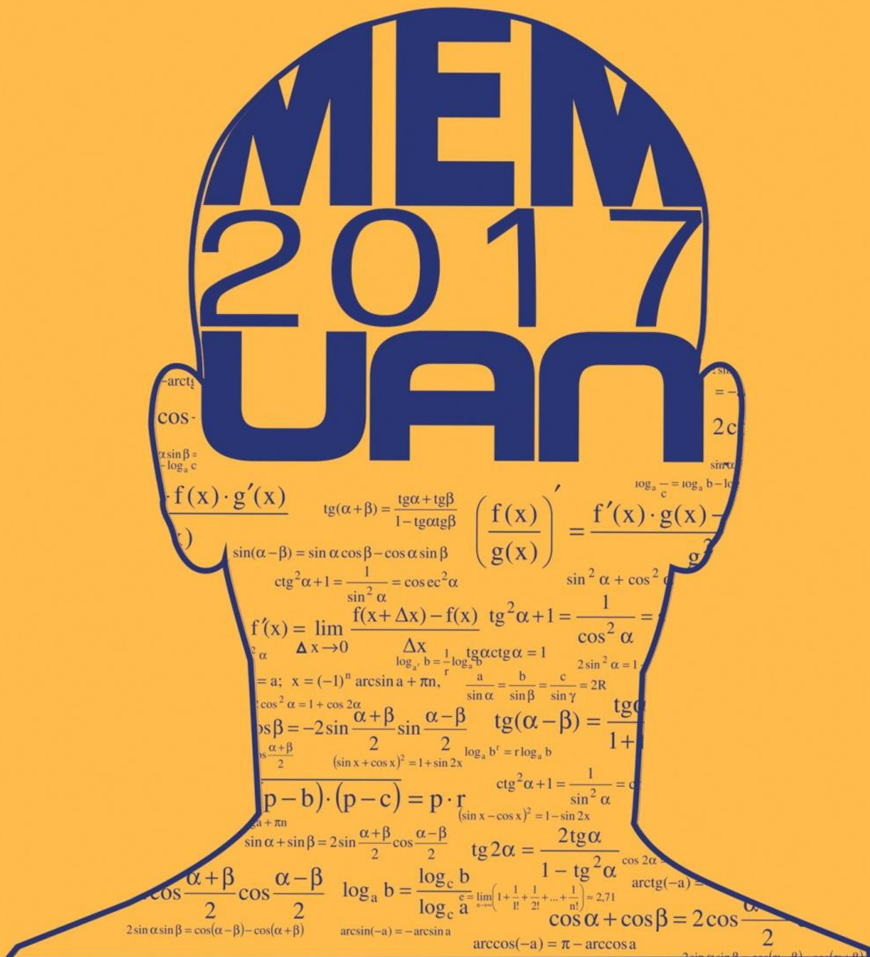
ACTA SIMPOSIO DE MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN ONLINE: 2346-3724



Volumen 4 No. 2

Año 2017

Organiza:

Patrocinan:

Auspicia:

ACTA SIMPOSIO DE MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RESÚMENES DE INVESTIGACIONES TERMINADAS

VOLUMEN 4 No. 2, FEBRERO 2017

ISSN electrónico: 2346-3724

SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES TERMINADAS

VOLUMEN 4 No. 2, Febrero 2017

ISSN electrónico: 2346-3724

ACTA SIMPOSIO DE MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Nº 2, Vol. 4, 2017

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El Simposio de Matemáticas y Educación Matemática y el Congreso Internacional de Matemáticas asistidas por Computador, bajo la franquicia de MEM es organizado por los programas de post grado de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño todos los años desde del año 2011.

Estos eventos convocan a numerosos y destacados docentes e investigadores provenientes de diversas latitudes. En este segundo número del 2017 del volumen 4 del ACTA SIMPOSIO MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA se presenta, por vez primera, las síntesis de aquellas investigaciones terminadas conducentes al grado científico de Doctor en Educación Matemática, sustentadas en el año 2016.

Los temas de investigaciones concluidas constituyen el resultado de un intenso trabajo de más de tres años, tanto de los estudiantes, ya Doctores en Educación Matemática y de sus directores de tesis. Estos extensos los estamos brindando a la comunidad de docentes e/o investigadores de esta importante comunidad científica.

Comité editorial

Bogotá, Colombia. Febrero 10 de 2017.

CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN Y EN SERVICIO. UN ESTUDIO DE CASOS PARA PROPONER CAMBIOS EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

GRACE JUDITH VESGA BRAVO,
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
gvesga@uan.edu.co

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo analizar y describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, comprender cómo se estructuraron y cómo se transforman, para proponer elementos que se deben considerar en los programas de formación encaminados a lograr creencias más productivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se utilizó una metodología con enfoque cualitativo, a través de estudios de casos en dos fases. En la primera, participaron docentes en formación quienes hicieron parte de un curso sobre filosofía y epistemología de la matemática. En la segunda, se trabajó con docentes en servicio, quienes hicieron parte de un curso sobre la historia de las ecuaciones cuadráticas. Ambos cursos estuvieron orientados a desafiar las creencias epistemológicas de los participantes y a promover reflexión al respecto. Se utilizaron como instrumentos cuestionarios cerrados y entrevistas semiestructuradas

Como parte de los resultados con estos dos grupos se pudo identificar que es la experiencia docente intensiva lo que permite crear y consolidar creencias epistemológicas, que el pregrado constituye una etapa en la que las creencias epistemológicas, formadas con anterioridad en el colegio, se están ajustando permanentemente y que, la formación recibida, tanto implícita como explícita, es de difícil y lenta asimilación en las posturas epistemológicas de los futuros maestros.

También se pudo establecer que las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio están en permanente confrontación. Esto posibilita que los programas de formación, inicial o continua, incidan de manera más efectiva y explícita en su construcción o transformación, lo cual implica realizar reformas en las propuestas curriculares vigentes. Esta investigación permite plantear algunas recomendaciones para ello.

Abstract

This research aimed at analyzing and describing the epistemological beliefs that pre-service and in-service mathematics teachers have concerning mathematics and mathematics teaching and learning, understanding how these views are structured and changed, in order to propose elements to be considered in pre-service teacher education programs aimed at achieving more productive beliefs towards both the teaching and learning of mathematics.

The research methodology used was a qualitative approach, through case studies in two phases. Related to the first stage, pre-service teachers took part in a course on philosophy and epistemology of mathematics. With regard to the second stage, in-service teachers participated in a course on the history of quadratic equations. Both courses were designed to challenge the epistemological beliefs of participants and to promote discussion on the matter. Questionnaires and semi-structured interviews were used as instruments.

One of the first results identified in these two groups was that intensive educational experience contributes to the creation and consolidation of epistemological beliefs. Second, the undergraduate program is a stage in which epistemological beliefs, formed earlier in school, are being adjusted constantly and that the training received, both implicitly and explicitly, is assimilated slowly and with difficulty into the epistemological positions of pre-service teachers.

Furthermore, it was established that both pre-service and in-service teachers' epistemological beliefs are in constant confrontation. This situation makes it possible for initial or continuing training programs to have an explicit and effective impact on their construction or transformation, which in turn implies generating curricular reforms in existing proposals. This research proposes some recommendations for these circumstances.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe gran preocupación por los bajos resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en pruebas internacionales de matemáticas como la del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), o el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés). En PISA 2012, todos los países latinoamericanos que participaron tuvieron un puntaje promedio significativamente inferior al obtenido por los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), siendo Colombia uno de los tres países con más bajo desempeño (ICFES, 2013). En TIMSS 2007, tanto en cuarto como en octavo grado, Colombia se ubicó dentro de los diez países con más bajo desempeño (ICFES, 2010).

Son varios los factores que pueden explicar los bajos resultados de los estudiantes y las diferencias entre ellos, como el nivel socioeconómico, la ubicación de las escuelas, la duración de la jornada escolar, los recursos, entre otras. Sin embargo, como lo afirma Yang (2014) diferentes estudios han demostrado que la calidad de los docentes influye significativamente en el rendimiento de sus estudiantes. En el informe de resultados TIMSS 2007 se indica que a mayor y mejor formación de los docentes más altos son los puntajes obtenidos por sus estudiantes (ICFES, 2010), y una de las recomendaciones que hace la OCDE para Colombia está referida a mejorar la calidad de los docentes (ICFES, 2013).

Por otra parte, la UNESCO establece que:

Para poner fin a la crisis mundial del aprendizaje, los encargados de la formulación de políticas deben aumentar significativamente el número de docentes y brindarles todas las oportunidades necesarias para que dediquen su motivación, su energía, sus conocimientos y las competencias adquiridas durante su formación a conseguir el máximo rendimiento posible del aprendizaje de todos los niños y jóvenes. (UNESCO, 2014, pág. 257)

Y propone como una de las cuatro estrategias para disponer de mejores docentes Mejorar la formación de los docentes para que todos los niños puedan aprender, señalando que “La buena calidad de la educación depende de que se imparta a los maestros la mejor formación posible” (pág. 261).

En este sentido cabe preguntarse, para el caso particular de la formación de docentes de matemáticas, ¿Qué significa formar docentes de calidad? ¿Qué es útil que los futuros docentes aprendan? ¿Qué debería enseñarse?, entre otras. Al respecto Hersh (1997) plantea que la pregunta no es sobre qué matemáticas se debe enseñar sino sobre ¿cuál es la postura epistemológica que se tiene sobre qué son las matemáticas? ya que ésta afecta profundamente la práctica. Señala además que saber matemáticas significa hacer matemáticas, es decir, se requiere una buena formación matemática.

Diferentes investigadores afirman que existe una relación entre las creencias que tienen los docentes acerca de naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Thompson, 1984,1992; Steiner, 1987; Ernest, 1989, Pajares, 1992; Artz y Armour-Thomas, 1999; Cross, 2009, 2015; Penn, 2012), es decir, dichas creencias tienen influencia en la práctica bien sea de manera implícita o explícita. Estas conexiones pueden tener efectos positivos, pero también negativos, específicamente en la capacidad y disposición de los docentes para probar y desarrollar nuevos enfoques, para incorporar transformaciones en sus prácticas y, para lograr que reformas curriculares tengan éxito (Steiner 1987; Pepin, 1999; Handal y Herrington, 2003; Cross, 2009, 2015; Pantziara, Karamanou y Philippou, 2013).

La literatura muestra que las creencias epistemológicas de los docentes de matemáticas acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje han sido formadas, a través de modelos de enseñanza que han recibido incluso antes de realizar estudios formales en educación matemática (Cross, 2009) y que están altamente influenciadas por los conocimientos filosóficos e históricos que tengan los docentes o futuros docentes sobre la matemática (Chassapis, 2007; White-Fredette 2009; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009). Sin embargo, estudios han evidenciado que en los programas de formación falta desarrollar en los futuros docentes un conocimiento robusto y consistente de las filosofías de la matemática y la educación matemática, que los conduzca a adoptar nuevas nociones epistemológicas sobre el conocimiento matemático (Flores, 1995, Roscoe y Sriraman, 2011).

En este sentido, existe una tendencia filosófica que muestra dos paradigmas opuestos: el absolutismo y el falibilismo (Lerman, 1990). En el primero, se considera que las matemáticas son absolutas, infalibles, incuestionables, se utiliza un lenguaje formal, no hay lugar al error y o bien existen aparte en un mundo de ideas puras (platonismo) o en la mente del creador (neoplatonismo) y se descubren, o se crean a partir de sistemas lógico deductivos (instrumentalistas o formalistas) (Ernest, 1991, 1998). Esta visión de la matemática tiende a estar relacionada con un enfoque para la enseñanza que puede llamarse conductista centrado en el profesor que posee e imparte conocimiento que debe ser asimilado, y en algoritmos que deben ser mecanizados, lo que, en muchos casos, dificulta orientar la enseñanza hacia la resolución de problemas pues para ello se requiere un punto de vista de las matemáticas flexible y abierto (Steiner, 1987), aspectos que no son característicos del formalismo.

En el segundo paradigma, se considera que la matemática es un producto de la invención humana, falible, corregible, que comparte significados dentro de una comunidad (Davis, Hersh y Marchisotto, 2012; Hersh, 1997), que los conceptos matemáticos no están fijados de manera permanente y pueden tener una historia de modificación a lo largo del tiempo (Lakatos, 1976b). Esta postura está relacionada con un enfoque del aprendizaje que puede llamarse constructivista, que se centra en el estudiante, se basa en el uso de solución de problemas, se hace énfasis en el proceso y se incluyen aplicaciones del mundo real (White-Fredette, 2009/2010). Al respecto Sfard, citada por White-Fredette (2009/2010), señala que, en general, los matemáticos (puros) hacen parte del paradigma absolutista, los investigadores en educación

Matemática se inclinan más por el falibilista, y, los docentes de matemáticas de educación básica y media están atrapados en el medio, con una mayor tendencia al formalismo. Además, la perspectiva falibilista no es una que impregne las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas de futuros profesores (Cooney, Shealy y Arvold, 1998), posiblemente tampoco las posiciones tomadas en los programas de formación.

De otra parte, varias investigaciones han documentado inconsistencias entre las creencias que tienen los docentes sobre la matemática y sus prácticas (Cooney 1985; Raymond 1997; Skott, 2009; Penn, 2012). En todas ellas se hace énfasis en la importancia de que se realicen más investigaciones sobre esta línea porque los resultados, en general, no se pueden generalizar ya que las creencias están influenciadas por contextos culturales. En coherencia con lo anterior, en el caso colombiano en los estándares básicos de competencias, se afirma que las matemáticas son consideradas “como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes” (MEN, 2006, pág. 47).

Se declara en los estándares que para lograr que los estudiantes sean matemáticamente competentes es necesaria la adopción de un modelo epistemológicamente coherente para lo cual se requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas como los siguientes:

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas (…). En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.
- Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales (p 49).

Avanzar hacia la consolidación de un modelo epistemológicamente coherente por parte de los docentes de matemáticas requiere que durante la formación se haga un trabajo continuo que confronte las creencias epistemológicas sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, que generé reflexión alrededor de las mismas y sobre sus implicaciones en la práctica (Flores, 1995; Cross, 2009; Roscoe y Sriraman, 2011). Sin embargo, como lo señala Cross (2009) el cambio o formación de creencias epistemológicas debe ser un proceso continuo de la conciencia, la confrontación y la reflexión. Es posible que los programas de formación inicial sean capaces de comenzarlo, pero otros factores como el entorno escolar y las comunidades a las que pertenecen los docentes son importantes para el éxito sostenido de cualquier esfuerzo de cambio y, por tanto, deben estar participando de experiencias que desafíen sus creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y que esto redunde en que puedan ayudar a sus estudiantes a desarrollar significado y comprensión (MEN, 2006; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009).

El recorrido anterior, muestra que es necesario lograr mayor comprensión sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen docentes en formación y en ejercicio, la manera como se transforman y su influencia en la práctica, así como el efecto que pueden tener diferentes escenarios diseñados para desafiar dichas creencias al tiempo que se profundiza en aspectos filosóficos, epistemológicos e históricos de la matemática, lo cual se constituye en el tema de esta investigación.

Con base en la descripción anterior, en este estudio se plantea **como problema de investigación** ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso formativo de docentes de matemáticas en formación y en servicio para la dirección de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación básica y media.

La investigación tiene como **objetivo general**

Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas para proponer cambios en los programas de formación encaminados a aportar en la consolidación de las creencias epistemológicas de futuros docentes.

Con los **objetivos específicos** siguientes:

- Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y la manera cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas.
- Describir la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje.
- Proponer recomendaciones para programas de formación de docentes de matemáticas encaminadas a que los futuros docentes o docentes en servicio desarrollen creencias y actitudes más productivas y coherentes hacia las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Estos objetivos hacen que esta investigación tenga como campo de acción La formación epistemológica y filosófica sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y de docentes en servicio.

Se concretan como las tareas de investigación las siguientes:

1. Sistematizar el estado del arte y los fundamentos teóricos sobre epistemología de las matemáticas y sobre creencias epistemológicas de docentes en formación o en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, de modo que se constituyan en los soportes teóricos para el desarrollo de la investigación y el análisis de los resultados.
2. Diseñar los instrumentos que se utilizarán para recabar la información.
3. Diseñar e implementar un curso acerca de la filosofía y epistemología de las matemáticas dirigido a desafiar las creencias epistemológicas de futuros docentes de matemáticas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje.
4. Diseñar e implementar un curso sobre aspectos históricos acerca de las ecuaciones cuadráticas dirigido a docentes en servicio para desafiar sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje.
5. Analizar y sistematizar la información recogida para dar cuenta del cumplimiento de los objetivos propuestos.

Se consideran como preguntas de investigación, las siguientes:

1. ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?
2. ¿Cuál es la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje?
3. ¿Qué elementos deben tenerse en cuenta para realizar cambios significativos en programas de formación de docentes de matemáticas encaminadas a que los docentes desarrollen creencias y actitudes más productivas y coherentes hacia las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y que éstas se fertilicen mutuamente?

Metodología utilizada en la investigación

Para abordar el problema propuesto se utilizó el enfoque cualitativo de investigación a través de una metodología de estudio de casos en dos fases. En la primera se trabajó con docentes en formación, quienes participaron de un curso sobre epistemología y filosofía de la matemática; en la segunda, con docentes en ejercicio, quienes realizaron un curso alrededor de la historia de las ecuaciones cuadráticas. Los dos cursos buscaban desafiar las creencias de los docentes en formación y en servicio y propiciar escenarios de reflexión. Para recolectar la información se diseñaron dos cuestionarios cerrados para indagar sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Con base en esta información se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada participante con el fin de indagar sobre la justificación y origen de las creencias señaladas. Sobre la metodología se amplían aspectos esenciales en el capítulo 3.

Aportes

Los resultados obtenidos permiten identificar aportes tanto en lo teórico como en lo práctico en el campo de la educación matemática y la investigación en la formación del profesorado. Desde lo teórico, que se constituye en la novedad científica de la investigación, se logró mayor comprensión acerca de las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, específicamente para el caso colombiano del cual existe poca literatura. El estudio permitió tener información sobre la posición que asumen docentes de matemáticas en formación y en servicio frente a las formas de justificación del conocimiento matemático, las fuentes de las cuáles proviene dicho conocimiento, la estructura y los límites del mismo. Se pudo establecer que los docentes en formación están en proceso de construcción y consolidación de sus creencias epistemológicas, y que los docentes en servicio se han esforzado en construir una epistemología coherente entre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, pero persisten dificultades para lograrlo.

Otro aporte teórico está relacionado con el impacto que tienen experiencias de formación, que incorporan de manera explícita aspectos filosóficos, epistemológicos e históricos de las matemáticas, en las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio. Finalmente se pudieron identificar recomendaciones para los programas de formación, encaminados a aportar en la consolidación de las creencias epistemológicas de docentes acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En lo práctico los aportes principales son el curso realizado con docentes en formación sobre filosofía y epistemología de la matemática y la educación matemática, que fue adaptado de un curso recibido por la autora de esta investigación en sus estudios doctorales; y el curso sobre un recorrido histórico de la ecuación cuadrática. Argumentos más amplios sobre los aportes podrán ser apreciados en conclusiones.

Estructura de la tesis

El documento está conformado por la introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y las referencias bibliográficas. En el capítulo uno se presenta el estado del arte, investigaciones relacionadas con las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio, la relación con la filosofía, epistemología e historia de las matemáticas, referentes fundamentales para el desarrollo del trabajo. En el segundo, se presenta el marco teórico y referencial desde el cual se abordó el problema planteado. El tercer capítulo presenta el enfoque y metodología utilizada, los instrumentos de recolección de información y las fases desarrolladas. También se describen de manera detallada los cursos en los que participaron los docentes en formación y en servicio y la manera en que se concibieron y diseñaron para que cumplieran con el objetivo de desafiar las creencias de los participantes y generar espacios de reflexión. En el capítulo cuatro se describen los resultados obtenidos con los docentes en formación y en servicio, se analizan sus creencias a partir de los instrumentos y las entrevistas para identificar la fuente y justificación de las mismas, y se describen los cambios a lo largo de los cursos. En el capítulo de discusión y análisis de resultados, el quinto, se analizan los resultados encontrados, a la luz de las preguntas de investigación propuestos. En las conclusiones se da cuenta del cumplimiento del objetivo general propuesto y se amplían los aportes teóricos y prácticos de la investigación. En las recomendaciones se señalan nuevos caminos para desarrollar investigaciones orientadas a enriquecer la comprensión de las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de docentes en formación y en ejercicio y que permitan mejorar permanentemente los programas de formación. Al finalizar se presenta la bibliografía citada y se incluyen los anexos más importantes para el desarrollo del estudio.

1. ESTADO DEL ARTE

Diferentes estudios señalan que existe una importante relación entre las creencias epistemológicas de los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y su influencia en la práctica. Las investigaciones muestran que en general, la relación es compleja (Thompson, 1984, 1992); puede tener efectos negativos en la capacidad y disposición de los docentes para probar y desarrollar nuevos enfoques (Steiner, 1987) y por tanto en el éxito de las reformas curriculares (Handal y Herrington, 2003); y que han sido formadas a través de modelos de enseñanza de otros docentes, generalmente de educación básica y media, con poca influencia de los estudios universitarios (Cross, 2009).

Otros estudios muestran que las creencias de los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje están altamente influenciadas por sus conocimientos y posturas filosóficas sobre la matemática y con su historia (Chassapis, 2007; White-Fredette, 2009; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009). Los estudios considerados señalan la importancia de que docentes en su formación inicial y continua participen en espacios de formación, a través de los cuales reflexionen de manera explícita sobre sus creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y el impacto que puede tener en la práctica, de manera que consoliden creencias más productivas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por lo señalado estudiar las creencias epistemológicas de los docentes acerca de las matemáticas y su enseñanza es un área fértil de investigación, en la cual se requieren muchas más propuestas.

2. MARCO TEÓRICO Y REFERENCIAL

La epistemología es el estudio del conocimiento y de la creencia justificada. El conocimiento como creencia justificada está referido a determinar las condiciones necesarias y suficientes para que la creencia exista, la justificación tiene como papel central garantizar que la creencia no se debe al azar. Las creencias epistemológicas han sido conceptualizadas de manera multidisciplinaria, ya que las personas tienen creencias diferentes sobre los distintos aspectos del conocimiento: de dónde proviene (fuente u origen); si es certero e inmutable o evoluciona (estabilidad); y, si es simple y aislado o complejo e integrado (estructura) (Buehl y Fives, 2009).

Estos tres aspectos fueron considerados para el desarrollo de este estudio y también las posturas epistemológicas acerca de las matemáticas, en las que se señala que la matemática es un producto de la invención humana, falible, que comparte significados dentro de una comunidad, cuya área principal de trabajo es resolver problemas, y se modelan los elementos y argumentos de su desarrollo (Lakatos (1976), Hersh (1997), Pólya (1965)).

Para Lakatos el formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo esa concepción las matemáticas no tienen propiamente historia, y señala que eso es un error, puesto que la historia y la filosofía de las matemáticas no pueden y no deben ser tratadas de manera aislada. En su obra

Pruebas y Refutaciones, Lakatos busca poner en duda el formalismo como caracterización válida del conocimiento matemático y mostrar que las matemáticas informales y cuasi-empíricas se desarrollan mediante una incesante mejora de conjeturas, a través de la especulación y la crítica, y no, como resultado de un monótono aumento de teoremas indubitablemente establecidos.

Hersh (1997) adopta la idea del matemático en ejercicio, es decir, para saber matemáticas hay que hacer matemáticas, lo cual implica que es necesario proponer a los estudiantes situaciones que les permita razonar, desarrollar pensamiento creativo, descubrir, inventar, comunicar ideas y probarlas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión está en contraposición de posturas en las que el dominio de los significados ya establecidos para los conceptos y de los procedimientos es el objetivo central de la instrucción, que enfatiza desarrollar el entendimiento matemático más que el pensamiento matemático del estudiante.

Para Pólya (1965) los docentes tienen una gran oportunidad para poner a prueba la curiosidad de los estudiantes y despertarles el gusto por el pensamiento independiente colocando el énfasis del trabajo en el aula en la solución de problemas, y señala que la desperdiciarán si se centran en ejercitar a los estudiantes en operaciones rutinarias.

3. METODOLOGÍA

Este estudio utiliza un enfoque cualitativo y como metodología de investigación el estudio de caso. Se realizó en dos fases, en la primera, seis docentes en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño participaron del curso “Epistemología y Filosofía de las matemáticas y la Educación Matemática”. En la segunda, tres docentes en ejercicio participaron en el curso “Recorrido histórico sobre la solución de ecuaciones cuadráticas". Los cursos fueron diseñados con énfasis en la epistemología, la filosofía y la historia de las matemáticas, y tuvieron un componente de trabajo en solución de problemas a través de conjeturas. El propósito principal era, a través de los temas propuestos en cada uno, las lecturas seleccionadas, el material elaborado y los trabajos propuestos, desafiar a los participantes sobre sus creencias epistemológicas acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de modo que hicieran un proceso permanente de reflexión.

Se diseñaron dos cuestionarios cerrados con el fin identificar posturas de tipo absolutista o falibilista sobre las creencias epistemológicas acerca de las matemáticas; y por otra parte, posturas tradicionales o constructivistas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para el diseño se tomaron como referentes instrumentos utilizados en otras investigaciones (Walker, 2007; Penn, 2012) y se hizo un proceso de validación mediante juicio de expertos.

Con base en la información de los cuestionarios se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada participante para indagar sobre la justificación y origen de las creencias señaladas. Los participantes respondieron los instrumentos al comienzo y al final del curso y presentaron igual número de entrevistas. También se hicieron preguntas relacionadas con el impacto de su formación de pregrado en la formación de sus creencias, la manera en que desarrollan una clase y, al finalizar, sobre la percepción del curso realizado. Los docentes en formación presentaron propuestas de aula para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, las cuales también se constituyeron en instrumentos de recolección de información. Con los instrumentos cerrados se determinó, en cada aplicación, la postura epistemológica reportada por cada participante, si estaba claramente definida o la tendencia que pudo observarse. Para ello se hizo un análisis del número de afirmaciones de cada postura, falibilista/absolutista o constructivista/tradicional, con las que cada participante se identificó. Para determinar los cambios de postura entre la primera y la segunda aplicación, teniendo en cuenta que los instrumentos cerrados tenían una escala de graduación de 1 a 5, se consideró que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia entre los valores marcados era igual o mayor a dos. Las entrevistas fueron transcritas y se utilizaron en la descripción del perfil de cada participante, para señalar los argumentos dados acerca de sus creencias epistemológicas o de los cambios señalados entre una y otra aplicación, y para contrastar la influencia de las creencias reportadas con la propuesta de aula presentada, la cual se analiza y se describe para cada docente.

4. RESULTADOS: UNA MIRADA A LAS CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE DOCENTES EN FORMACIÓN Y EN SERVICIO

En este capítulo se presenta una descripción acerca de las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje identificadas para cada uno de los futuros docentes de matemáticas y para cada uno de los docentes en servicio del curso que hicieron parte del estudio, los cuales se identificaron como Enrique, Yeny, Edwin, Jairo, Lucía y Yadira; y como John, Myriam y Francisco, respectivamente. Adicionalmente para cada uno se describen algunos aspectos generales sobre su formación, experiencia docente y el impacto en la formación de las creencias reportadas. Se incluyen aspectos sobre las apreciaciones del curso en el que cada uno participó y el posible impacto que pudo tener en la formación o consolidación de sus creencias. En el caso de los docentes en formación se describe también la propuesta presentada para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas.

Los tres docentes en servicio, John, Myriam y Francisco se identificaron, desde el comienzo, con una postura falibilista acerca de las matemáticas y constructivista frente a su enseñanza y aprendizaje, la cual mantuvieron hasta el final, aunque se pudo evidenciar que al mismo tiempo están de acuerdo con algunas afirmaciones totalmente contrarias.

A través de algunas de las preguntas hechas durante las entrevistas se pudo observar que los tres docentes muestran una fuerte inclinación a ver la matemática desde el punto de vista formalista, aunque afirmaron que eso no se relaciona con su práctica docente. En el caso de los docentes en formación, al inicio no se pudo identificar una postura clara de Enrique ni de Jairo acerca de sus creencias epistemológicas y Yadira cambió de absolutista a falibilista. Y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Yadira no se identificó con ninguna tendencia al comienzo del curso. Los demás estudiantes aunque se identificaron desde el inicio con posturas falibilista y constructivista, que fueron consolidando, también señalaron, especialmente en la primera aplicación de los instrumentos, algunas posturas contrarias.

Se observó durante las entrevistas, que los docentes en formación, tenían dificultad para argumentar las creencias señaladas, por lo que las cambiaban aparentemente para no dar explicaciones; esa fue la constante en el caso de Enrique. Los docentes en servicio siempre se mostraron seguros durante las entrevistas, y aunque, algunas creencias podían ser contrarias a la postura identificada argumentaban sobre ella con mucha propiedad. Todos los participantes señalaron que se sintieron impactos por aspectos abordados en los cursos y que consideran fundamentales para su ejercicio docente. Por ejemplo, Enrique dijo en la entrevista final, que le gustaría hacer cosas nuevas con sus estudiantes, que ellos sean más protagonistas de su aprendizaje, que participen y trabajen por cuenta propia, pero señala una presión por cumplir con los contenidos establecidos y que eso no se lo permite. El también muestra preocupación por seguir enseñando de manera tradicional, diciendo que debe trabajar al respecto y que en su trabajo de grado, que iniciará el siguiente semestre, lo va a intentar.

Jairo dice que durante el curso tuvo sus propias crisis, considera que fue innovador, que se logró articular lo teórico con lo práctico y lo disciplinar con lo pedagógico. Señaló que generalmente la matemática va por una parte y la pedagogía por otra. Y Yadira, dijo que el curso le permitió reflexionar sobre cómo está enseñando, si lo que hace en el aula es más de tipo formal o si, por el contrario, lo hace de manera más cuidadosa y se tiene en cuenta el anverso y reverso de las matemáticas, y la historia de las matemáticas.

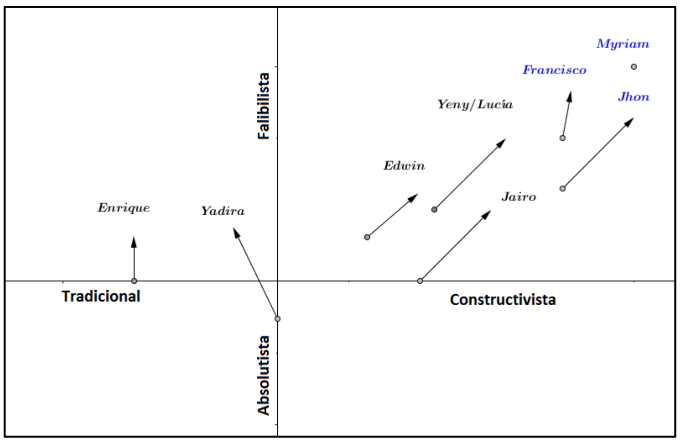
Sobre las propuestas presentadas por los docentes en servicio para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, John señaló que siempre ese tema lo empezaba señalando la forma general que tiene ese tipo de ecuaciones, con énfasis en procesos algorítmicos, y que sólo hacía algunas aplicaciones al finalizar el tema; en contraste, presentó una situación problema abierta para que, con uso de material didáctico, los estudiantes pudieran trabajar y proponer alternativas. Sin embargo, se observó que John tuvo dificultades con el manejo adecuado del material utilizado. Por su parte, Myriam aunque señaló que espera que los estudiantes aprendan a razonar, que considera importante que sepan conceptos para que los usen como herramientas al resolver diferentes situaciones, presentó una clase esencialmente tradicional, a pesar de intentar realizar un diálogo al estilo de Lakatos, lo que se muestra a través del mismo, es un estudiante siguiendo instrucciones dadas por el docente, de tipo algorítmico para resolver una ecuación. Francisco propuso cuatro actividades, cada una diseñada para un grado diferente, centrada en buscar que el estudiante pudiera descubrir y el docente fuera un mediador que a través de preguntas va orientando la actividad.

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Este capítulo tiene como objetivo analizar de manera detallada los resultados para dar respuesta al problema de investigación propuesto ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

Para abordar el problema, éste se dividió en tres preguntas. La primera relacionada con las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, la manera como se estructuraron y como se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas. En la Figura 1 se muestra la postura identificada, a partir de los instrumentos, para cada participante al inicio y al final de cada curso. Se ejemplifica con la magnitud y dirección del vector, la posición inicial y final, y los cambios reportados.

Figura 1. Creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, reportadas al comienzo y al final de cada curso. (En negro docentes en formación; en azul docentes en servicio).



Fuente: elaboración propia

Se evidenció que los docentes en servicio reportan posturas definidas y coherentes entre sí. En contraste, las reportadas por los docentes en formación son más tentativas, pues los cambios en las respuestas dadas a los puntos de los instrumentos revelan que se encuentran en proceso de construcción o consolidación. Sobre la estructuración de las creencias, los docentes en servicio expresan con claridad que su formación formalista en el pregrado y su experiencia docente, han sido los aspectos que les han aportado. Para los docentes en servicio fue positivo e importante el haber recibido en el pregrado una formación matemática rigurosa, de corte formalista, a través de las asignaturas disciplinares, esto es, las que orientaban los matemáticos puros. Pero, al mismo tiempo, señalan las dificultades que han tenido que superar para su ejercicio docente, pues al comienzo las creencias formadas sobre la matemática en el pregrado, orientadas al formalismo, eran un obstáculo, en lugar de un apoyo, para su trabajo de aula.

Por su parte, los docentes en formación, hicieron referencia a su formación en el colegio, a la forma de enseñar de sus docentes y también a su experiencia docente, hablando muy poco de su formación universitaria. Todos los docentes en formación y en servicio hicieron referencia al impacto del curso, especialmente por el estudio de la obra de Lakatos y los aportes de Davis y Hersh, especialmente con su reflexión acerca del anverso y el reverso de las matemáticas.

Se observó que todos los estudiantes en formación tuvieron cambios importantes, el curso les ayudó en la formación de sus creencias, las cuales siguen en proceso de consolidación; y, aunque los docentes en servicio tienen aparentemente más consolidadas sus creencias también están abiertos a ampliarlas y a incorporar nuevos elementos. Se observó que los docentes en servicio, a partir de su formación y experiencia docente, han hecho una distinción entre la matemática en sí y la matemática escolar y parece que se sienten cómodos con esta dualidad, o contradicción, y con la práctica docente que realizan.

De otra parte, los hallazgos muestran que algunos docentes en formación y en servicio han construido un sistema de atenuantes, por ejemplo el currículo y los textos que se les han impuesto, para justificar la contradicción entre lo que reportan son sus creencias frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y lo que suelen hacer en el aula, y también parecen estar cómodos frente a esa situación. Se pudo evidenciar que el incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemologíay la historia de las matemáticas, en las cuales se generan espacios implícitos, pero especialmente explícitos para que los docentes en formación y en servicio reflexionen sobre sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, ayuda a la formación, transformación o consolidación de las mismas, lo cual se correlaciona con lo presentado en otros estudios (Flores, 1995; Cooney, 1994; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009; White-Fredette, 2009).

La segunda pregunta de investigación indagaba por la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Los resultados observados con los tres docentes en servicio que participaron en la investigación, muestran que a pesar de haber señalado, a través de los instrumentos cerrados, posturas aparentemente claras y alineadas frente a la matemática y su enseñanza y aprendizaje, persisten algunas contradicciones y dificultades para romper con posturas formadas durante los estudios universitarios, y probablemente desde antes, y avanzar en una verdadera articulación de sus creencias, que se refleje de manera efectiva en su ejercicio docente.

Finalmente, la tercera pregunta de investigación propuesta estaba orientada a presentar recomendaciones para los programas de formación encaminados a que ayuden a los futuros docentes a desarrollar creencias y actitudes más productivas hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Con base en los resultados del estudio y lo señalado por otras investigaciones, lo deseable para los programas de formación es construir una propuesta curricular en la cual se articulen la historia, la filosofía y la epistemología de la matemática como hilos conductores para el estudio de la matemática y, a través de ese conocimiento profundo, se consolide un trabajo intensivo en solución de problemas que sea el puente entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar, como subconjunto que es de la matemática elemental. Sobre este aspecto se requiere más investigación.

CONCLUSIONES

Este estudio permitió conocer las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio desde la perspectiva de los seis docentes en formación, y de los tres docentes en servicio que hicieron parte del estudio. Se pudieron identificar aspectos sobre la manera como se han ido estructurando, así como los cambios que pueden tener cuando participan en diferentes cursos de formación, los cuales buscaban de manera explícita desafiar sus creencias. Esto se constituye en un aporte importante de este estudio, especialmente para el caso colombiano, del cual existe poca literatura.

Los hallazgos de esta investigación se correlacionan con otros de este tipo en el ámbito internacional. Se identificó una dualidad en los docentes en servicio, a saber, la diferencia que establecen entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar. Indicaron que sus creencias epistemológicas sobre la matemática, formadas durante sus estudios de pregrado y de corte formalista, no tienen relación con su trabajo de aula, ni con sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo, se pudo evidenciar que sí existe un fuerte vínculo. Esta dualidad no se ha identificado de esta manera en otros estudios, a pesar de que sí existen investigaciones que hacen referencia a la desalineación de las creencias de docentes de matemáticas sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje.

Otro resultado del estudio, que a la vez se constituye en un aporte en sí mismo, es la contribución que, a través de los dos cursos que se realizaron, se hizo a la formación, consolidación o construcción de creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de los docentes en formación y en servicio que participaron en la investigación. Los cursos diseñados y realizados para esta investigación, generaron en los nueve participantes inquietudes que les permitieron reflexionar, de manera explícita, sobre sus creencias y su impacto o posible impacto en sus prácticas. Los cursos incorporaron de manera explícita aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos, así como un componente para el trabajo en solución de problemas. Estos aspectos son señalados por diferentes investigaciones como relevantes para la construcción y consolidación de creencias, pero en general, en la literatura se encuentran investigaciones que han abordado de manera específica solamente uno de esos aspectos.

Los resultados encontrados permitieron hacer algunas recomendaciones para los programas de formación inicial y continua, de modo que puedan incorporar cambios en sus diseños curriculares encaminados a que los docentes en formación o en servicio consoliden creencias más productivas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y de ese modo las reformas curriculares que se vienen proponiendo desde comienzos del siglo XXI enfocadas al desarrollo de competencias en los estudiantes puedan tener mayor éxito del que hasta ahora se ha evidenciado a través de las diferentes pruebas nacionales e internacionales que presentan los estudiantes colombianos.

Se puede concluir, con base en este estudio y los referentes considerados, que:

- Las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen los docentes de matemáticas tienen influencia en la
- práctica docente y, por tanto, en el éxito de reformas curriculares, bien sea de manera explícita o implícita.
- La estructuración de dichas creencias proviene de diferentes fuentes, la práctica docente es una de las principales, también lo son modelos observados por los docentes, incluso desde antes de su formación en la universidad, y la formación misma, la cual tiene efectos no del todo positivos para el futuro ejercicio docente.
- La formación y consolidación de las creencias requiere un trabajo intensivo, especialmente, desde los programas de formación, para que ayuden a futuros docentes a construir creencias más productivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es necesario que en los programas de formación inicial y continua se incorporen, a lo largo de la formación, experiencias explícitas que hagan a los futuros docentes confrontar y reflexionar permanentemente sobre sus creencias, las cuales deben tener como hilos conductores aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos de la matemática, y a través de las cuales el trabajo en solución de problemas pueda ser el puente entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar. Por todolo descrito, se puede concluir que los objetivos propuestos se cumplieron y que las preguntas de investigación no solo guiaron adecuadamente la investigación, sino que todas fueron respondidas en total coherencia con los objetivos de la misma.

RECOMENDACIONES

Este trabajo permitió conocer más sobre las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje; y sobre la forma en que se transforman, especialmente para el caso colombiano, donde la literatura al respecto es escasa. En este sentido, se espera que esta investigación provoque nuevos estudios que permitan tener una mayor y mejor comprensión sobre el sistema de creencias y que se puedan utilizar para introducir mejoras o reformas en programas de formación docente inicial y continua y eso a su vez redunde en el desarrollo de competencias matemáticas en niños y jóvenes. Este trabajo también puede ser un referente para las autoridades educativas del país, especialmente para incorporar estrategias que permitan que las reformas curriculares propuestas tengan mayor impacto.

A continuación se presentan algunas recomendaciones para los programas de formación y para futuros estudios y para las autoridades educativas en Colombia.

En primer lugar, teniendo en cuenta lo complejo que es el sistema de creencias, es necesario desarrollar nuevos diseños metodológicos que permitan informar con mayor precisión las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen docentes en formación, en servicio y docentes formadores, y la coherencia entre éstas. Otros estudios pueden estar orientados a definir nuevas y más precisas categorías sobre las creencias de docentes en formación y en servicio, acorde con las tendencias actuales y de vanguardia en educación matemática y el impacto que éstas generan a su vez en el desarrollo de competencias matemáticas de sus estudiantes.

Es recomendable hacer estudios longitudinales que reporten las creencias que tienen docentes en formación cuando empiezan su programa, la forma en que se van transformando o consolidando a medida que avanzan en el mismo, el impacto que puede tener el proceso de práctica docente, y contrastar con las creencias que reportan al finalizar el programa. Este tipo de estudios puede dar información importante para analizar la pertinencia lograda por los programas de formación.

En coherencia con lo anterior, es necesario realizar nuevas investigaciones para conocer sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje de docentes en servicio, la alineación entre éstas y la coherencia que tienen con los fines de la educación matemática. Especialmente con docentes vinculados a diferentes tipos instituciones, de carácter público y privado, urbano y rural, incluso con docentes que no se formaron para ser docentes de matemáticas pero que sí ejercen esa profesión. En estos estudios se pueden incluir análisis que permitan determinar si existe algún tipo de correlación entre las creencias reportadas por los docentes y sus años de experiencia, o entre las primeras y los resultados de sus estudiantes en pruebas de matemáticas de carácter nacional o internacional. Incluso se hace pertinente estudiar la influencia que pueden tener las creencias de docentes de matemáticas en sus propios estudiantes.

Por otra parte, y teniendo en cuenta, que uno de los hallazgos de este estudio hace referencia a la necesidad de hacer de la historia, la filosofía y la epistemología de las matemáticas hilos conductor en los programas de formación, se requiere investigación sobre maneras de hacerlo, qué tipo de nuevos materiales y metodologías se requieren diseñar e implementar y ver el impacto que pueden tener. El conocimiento profundo y continuo de la historia, la filosofía y la epistemología de las matemáticas, debe permitir a los programas de formación y a sus egresados ir más allá, y en coherencia con la formación de creencias más productivas hacia la matemática y su aprendizaje, debe servir para cuestionar lo que se ha establecido debe ser la educación matemática de niños y jóvenes, sus fines, argumentar si es lo pertinente o no, y en su defecto liderar la construcción de currículos más retadores.

En articulación con esto, se requiere investigación que aborde las preocupaciones señaladas tanto por docentes en formación como en servicio sobre la presión que sienten por cumplir con un listado de temas previamente establecidos, y que señalan como una causa para no incorporar nuevas tendencias en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Es decir, es necesario hacer estudios que muestren, como lo mencionan otras investigaciones, la importancia de trabajar de manera explícita las creencias de los docentes para el éxito en la incorporación de reformas curriculares.

Finalmente se requieren estudios que muestran también cuáles son las creencias que tienen los formadores de formadores y que se indague sobre las creencias que los programas de formación esperan que sus estudiantes construyan o consoliden y las estrategias establecidas en su diseño curricular para lograrlo.

En relación con las autoridades educativas en Colombia, este estudio muestra que es necesario que el Ministerio de Educación Nacional trabaje de manera articulada con los programas de formación inicial y continua de docentes de matemáticas, de modo que se construya un plan a largo plazo, que permita realmente transformar la educación matemática en Colombia, tomando como punto de partida ejemplos a nivel internacional, pero sin desconocer la importancia de los contextos culturales ya que no se trata de replicar lo que se hace en otros países.

Los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias matemáticas, propuestos hace ya más de 15 años, tuvieron mensajes importantes, pero está visto que no han tenido el impacto que se esperaba y que no incorporan suficientes elementos que ayuden a los docentes a construir una epistemología coherente, como lo señalan. Es necesario revisar estos documentos e incorporar cambios que hagan visible que lo importante no es cumplir con un extenso listado de temas sino desarrollar el pensamiento matemático en niños y jóvenes. Para ello se requiere un gran acompañamiento a los docentes en servicio, que les ayude a implementar los cambios que se proponen y debe ser en alianza con los programas de formación, para que también desde allí se articule con las propuestas curriculares.

CONTRIBUCIONES DE LA AUTORA CON EL TEMA DE INVESTIGACIÓN

Vesga, G. & Falk, M. (2016). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio: consideraciones para los programas de formación inicial y continua.

Vesga, G. & Falk, M. (2016). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas acerca de la matemática, su enseñanza y su relación con la práctica docente. *Revista Papeles*. Aprobada para publicación.

Vesga, G. (2016). Recorrido histórico alrededor de la ecuación cuadrática para desafiar las creencias epistemológicas de docentes en servicio acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje. *Simposio de Matemáticas y Educación Matemática. MEM 2016.*

Vesga, G. Huertas, A., Vergara, A. & Romero, M. (2015). Effect of a computational scaffolding in the development of secondary students metacognitive skills. *Journal of Technology Enhanced*, 7(2), 143-159.

Vesga, G., Roa. C. & Pinilla, J. (2015). Desarrollo de habilidades metacognitivas a través de la solución de problemas matemáticos. *CIAEM XIV, Chiapas, México.*

Vesga, G, Huertas A. & Galindo, M. (2014). Validación del instrumento "Inventario de Habilidades Metacognitivas (MAI) con estudiantes colombianos". *Revista Praxis & Saber,* 5(10), 55-74.

Vesga, G. (2014). Conciencia metacognitiva en futuros docentes de matemáticas: el caso de la Universidad Antonio Nariño. *RELME 28*. Barranquilla, Colombia.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Artz, A. & Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: A guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 211–235.

Buehl, M. & Fives, H. (2009). Exploring Teachers' Beliefs About Teaching Knowledge: Where Does It Come From? Does It Change? *The Journal of Experimental Education*, 77(4), 367-408, DOI: 10.3200/JEXE.77.4.367-408.

Charalambous, C., Panaoura,A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 161–180. DOI: 10.1007/s10649-008-9170-0

Chassapis, D. (2007). Integrating the philosophy of mathematics in teacher training courses. *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*, 61-79. Springer US.

Cooney, T., Shealy, B. & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(3), 306-333.

Cross, D. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of athematics Teacher Education*, *12*, 325–346. DOI 10.1007/s10857-009-9120-5.

Cross, D. (2015). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 173–201. DOI 10.1007/s10857-014-9276-5.

Davis, P., Hersh, R. & Marchisotto, E. (2012). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education*. New York: Falmer.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza* (tesis doctoral). Universidad de Granana, Granada.

Handal, B. & Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 59-69

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* New York: Oxford University Press.

ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo.* Bogotá: ICFES.

ICFES. (2013). *Colombia en PISA 2012. Informe nacional de resultados. Resumen ejecutivo.* ICFES. Bogotá: ICFES.

Lakatos, I. (1976a). A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 27(3), 201-223.

Lakatos, I. (1976b). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.

Lerman, S. (1990). Alternative perspective of the nature of mathematics. *British Educational Research Journal*, 16, 53–61

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-333.

Pantziara, M., Karamanou, M., & Philippou, G. (2013). Teachers' beliefs and knowlegde related to the Cyprus mathematics curriculum reform. En F. Arzarello (Presidencia), *Eighth Congress of European Research in*

Mathematics Education (CERME 8). En Manavgat-Side, Antalya – Turkey.

Penn, A. (2012). *The Alignment of Preservice Elementary School Teachers' Beliefs concerning Mathematics and Mathematics Teaching* (Tesis de maestría). Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Pepin, B. (1999). *Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany*. TNTEE Publications, 2(1), 127-146.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Traducción Julián Zugazoita. México: Trillas.

Roscoe, M., & Sriraman, B. (2011). A quantitative study of the effects of informal mathematics activities on the beliefs of preservice elementary school teachers. *Zdm*, 43(4), 601. doi:10.1007/s11858-011-0332-7

Skott, J. (2009). Contextualizing the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(1), 27–46.

Steiner, H. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *Learning of Mathematics* 7(1), 7-13.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105–127.

Thompson, A. (1992). *Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research.* En D.A. Grouws, (Ed.), Handbook on mathematics teaching and learning. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

UNESCO. (2014). *Enseñanza y aprendizaje: Lograr la calidad para todos.* París: Ediciones UNESCO.

Walker, D. (2007). *The development and construct validation of epistemological beliefs survey for mathematics* (Tesis doctoral). Oklahoma State University, E.U.A.

White-Fredette, K. (2009). What is Mathematics? An Exploration of Teachers' Philosophies of Mathematics during a Time of Curriculum Reform. Middle-Secondary. *Education and Instructional Technology Dissertations*. Paper 46.

White-Fredette, K. (2009/2010). Why Not Philosophy? Problematizing the Philosophy of Mathematics in a Time of Curriculum Reform. *The Mathematics Educator*, 19(2), 21-31.

Yang, X. (2014). *Conception and Characteristics of Expert Mathematics Teachers in China.* Berlin: Springer.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO ROBUSTO PARA EL CONCEPTO DE ÁREA Y CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO INVOLUCRADO EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO (niños entre 10 y 13 años)

DIANA CAROLINA PÉREZ DUARTE
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
dianacperez@uan.edu.co

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Resumen

El propósito de esta investigación es la construcción de significado robusto del concepto de área y la caracterización del pensamiento geométrico involucrado, en los estudiantes de grado sexto de los Colegios: Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, el Bosque Bilingüe y Tibabuyes Universal I.E.D. Se diseñaron once actividades, las que se implementaron a 176 estudiantes. En el proceso de solución de cada problema planteado, los estudiantes comienzan a construir el concepto de área utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente, a partir de elementos básicos de la geometría griega.

Para las actividades se propone un conjunto de problemas bajo la estructura de las competiciones matemáticas, frente a los cuales, los estudiantes ofrecen estrategias que les permite realizar transformaciones a las figuras geométricas por medio de acciones de descomposiciones, recomposiciones y comparaciones. Las actividades diseñadas propician que los estudiantes lleguen a deducir fórmulas aritméticas para calcular el área de diferentes figuras geométricas. La implementación de cada una de las actividades y los resultados obtenidos en las entrevistas, permitió evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de solución de los diferentes problemas, para constatar los elementos que caracterizar el pensamiento geométrico involucrado con respecto al concepto de área.

Abstract

The purpose of this research is the construction of robust meaning of the concept of area and the characterization of the geometric thinking involved in sixth-grade students of four different schools. The schools were chosen to include students from varying socio-economic levels as well as both public and private schools. The participating schools were: Colegio de la Universidad Antonio Nariño in Usme, Liceo Feán, Colegio El Bosque Bilingüe and Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. Twelve activities were designed, which were implemented with 176 students. In the process of solving every problem posed, students begin to build the concept of area using their geometric thinking operationally, following the approach of classic elements of Greek geometry.

A series of activities was designed to allow the students to approach problems of area from an essentially geometric perspective. For each of the activities a set of problems, either taken from or similar to the non-routine or challenging problems found in popular mathematics competitions, is proposed. Working in groups, students offer their own strategies of solution using transformations to the geometric figures through actions of decomposition, recomposition and comparison, gradually constructing the concept of area. The activities designed also propitiate that students arrive, through similar means of decomposition and recomposition, at arithmetic formulas to calculate the area of different geometric shapes. The implementation of each of *the activities and the results obtained in the interviews of a random sample of students, allowed evidence to be compiled concerning the strategies used by the students in the process of resolution of the different problems and to ascertain elements that characterize the geometric thinking involved in the construction of meaning for the concept of area.*

INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las ramas de la matemática con mayor presencia en la naturaleza y en la vida. En la actualidad, se realizan investigaciones concernientes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento geométrico. Algunos de estos estudios se enfocan en la realización de unidades didácticas, métodos de enseñanza, uso de recursos informáticos, entre otros, para mejorar la comprensión, desempeño y desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría se evidencian varias debilidades. Una primera de ellas es la manera en que en general se suele plantear el quehacer instructivo en el salón de clases, donde el profesor da importancia sólo al reconocimiento (abstracción de algunas de las propiedades) de las figuras geométricas y memorización de fórmulas para calcular áreas, volúmenes, perímetros, entre otras; con un tratamiento y orientación como éste no se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante.

Con respecto a las investigaciones, algunas de éstas se dedican a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Estos trabajos no mencionan de qué manera se puede enfocar el aprendizaje para que los estudiantes construyan significado robusto de los conceptos geométricos, y específicamente para el que nos interesa en la presente tesis, el de área, de tal forma que el proceso de aprendizaje sea perdurable. Por ejemplo, las unidades didácticas que se elaboran en el contexto de varias investigaciones continúan con la formulación de ejercicios en lugar de problemas de corte no rutinario, como los problemas de competiciones matemáticas, práctica que institucionaliza el aprendizaje como adquisición de definiciones, métodos y procedimientos.

En el tema de área, se sigue dando importancia a las fórmulas y su cálculo por medio de ellas, circunscribiendo el trabajo a la aritmética, en lugar de dar oportunidad a los estudiantes a potencializar su pensamiento y autonomía en la construcción de significado geométrico para este concepto. El proceso desarrollado de esta última forma permitiría la resolución de problemas no rutinarios enfocados a una amplia gama de situaciones incluyendo problemas pertinentes a la vida cotidiana.

Frente a esta situación, se ve la importancia de tener en cuenta la investigación de Pérez (2011)[1], que versó sobre la construcción de significado para el concepto de área de algunas figuras geométricas planas, dirigida a estudiantes de grado sexto. Con la motivación de continuar con este proceso de investigación, se pretende seguir explorando el desarrollo del pensamiento geométrico y las condiciones, actividades y prácticas pertinentes para llegar a construir significado robusto para el concepto de área y caracterizar el pensamiento geométrico involucrado.

En efecto, el enfocarse en el desarrollo del pensamiento geométrico, sin precisar o caracterizar dicho pensamiento, ocupa a muchas investigaciones internacionalmente y ha sido tratado en numerosos eventos, tales como los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME 1995 hasta 2012), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM o IACME 1961, 1987 y 1995), las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los Congresos Iberoamericanos de Cabri (IBEROCABRI) y los Congresos de la Sociedad Colombiana de Matemática (SCM).

Las investigaciones acerca del desarrollo del pensamiento geométrico se reflejan en las siguientes tendencias, y los investigadores que las adelantan.

1. Trabajos cuyo interés radica en la validación del conocimiento geométrico y centran su atención en las concepciones de los estudiantes acerca de cómo se valida éste. En este sentido se destacan: Krygowska (1980); Hanna (1991), Holowey (1969).

2. La preocupación por el razonamiento espacial, como elemento esencial del pensamiento científico, que agrupa varias líneas de investigación, como aquellas que intentan establecer relaciones entre el pensamiento espacial y las matemáticas. Entre los que han trabajado en esta línea se tienen: Del Grande (1990); Bishop (1993); Mammana y Villani (1998).

3. Las referidas al estudio de la visualización que intentan establecer las interacciones entre ésta y el razonamiento en geometría, y otras que buscan determinar mecanismos para incrementar la habilidad espacial en los aprendices. En este sentido se destacan: Presmeg (1986); Clement y Battista (1992); Fischbein (1993); Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996); Gutiérrez (1996); De Guzmán (1996).

4. Las que apuntan al desarrollo evolutivo del pensamiento geométrico y están orientadas por los avances de la psicología cognitiva. Se destacan trabajos realizados por Piaget, acerca de la concepción del espacio en los niños, y los estudios de los esposos Van Hiele (1957), encaminados a determinar niveles de pensamiento geométrico y etapas de instrucción correspondientes. Tall (2013), describe en su último libro una teoría que versa sobre el desarrollo del pensamiento matemático desde el niño menor hasta el adulto.

5. Desde la ciencia cognitiva se intentan precisar modelos de conocimiento y pensamiento geométrico. En este sentido se destacan Sharma (1979), Bransford (1979); Jenkins (1979), Pinker (1994).

6. Sobre el desarrollo de las tecnologías de la información (TIC) y el uso extenso de recursos informáticos, lo anterior ha dado lugar a varias investigaciones en torno al aporte de las representaciones dinámicas y generalizadas. Algunos autores que aportan a esta temática son: Hitt (1998), Laborde (1998), Rizo y Campistrous (2003), Villiers (1999), González (1999).

Se enmarca la presente investigación por la primera, tercera, cuarta y quinta tendencias presentadas, sin desconocer el aporte que las demás posiblemente puedan ofrecer a ella.

Algunos de los autores citados tratan de caracterizar el pensamiento geométrico del niño; sin embargo, sus hallazgos no propician un aprendizaje desarrollador[2], pues tienen entre sus limitantes que el diagnóstico se refiere al contenido curricular y no valoran el papel que tienen los estudiantes en construir significado de un concepto geométrico determinado.

Una de las últimas investigaciones que buscan caracterizar el pensamiento geométrico es el desarrollado por Tall (2013) en su libro: Como los seres humanos aprenden a pensar matemáticamente.

[1] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado.* Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

[2] No todo aprendizaje es desarrollador; esto depende de las habilidades que desarrolla el estudiante, lo cual le permite buscar diferentes estrategias a la solución de un problema interesante.

En este escrito Tall (2013) comienza a describir el pensamiento matemático del ser humano como una construcción de conceptos a partir de dos tipos de abstracción, la estructural y la operacional.

Tall (2013), con respecto al desarrollo a largo plazo de las ideas matemáticas afirma:

La geometría comienza cuando el niño juega con los objetos, reconociendo sus propiedades a través de los sentidos y describiéndolos utilizando el lenguaje. Con el tiempo, las descripciones se hacen más precisas y se usan como definiciones verbales para especificar figuras que pueden construirse con regla y compás y eventualmente las propiedades de las figuras pueden relacionarse en el enfoque formal de la geometría Euclidiana. El aprendizaje de la aritmética sigue una trayectoria diferente, empezando no enfocándose en las propiedades de los objetos físicos, sino en las acciones que se realizan sobre esos objetos las cuales incluyen el contarlos, agruparlos, compartirlos, ordenarlos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos.

Estas acciones se vuelven operaciones matemáticas coherentes y se introducen los símbolos que permiten realizar las operaciones rutinariamente con muy poco esfuerzo consciente. Más sutilmente, los símbolos en sí mismos pueden verse no solo como operaciones a realizarse sino también comprimidos en conceptos numéricos mentales que pueden manipularse en la mente.

Los sistemas de medidas también se desarrollan a partir de acciones[3]*: medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otros. Estas cantidades pueden calcularse en forma práctica usando fracciones o usando decimales si se desea un nivel mayor de precisión.* [4]

Para esta investigadora la anterior afirmación elaborada por el profesor Tall (2013) en su libro no es acertada, ya que en la investigación realizada por Pérez (2011)[5], se observó que los estudiantes lograban construir el concepto de medición (área) por medio de las acciones de descomposición-recomposición-comparación de algunas figuras geométricas planas abordadas en el contexto de la solución de problemas no rutinarios. El análisis de las actividades generadas en la tesis indicó que en el transcurso de la solución de cada problema no rutinario el estudiante complementa y adecúa cada vez más el significado del concepto de área. Los resultados obtenidos en la población de estudio mostraron que los estudiantes construyeron de esta manera un significado apropiado del concepto implicado fortalecido y reforzado por generar diferentes estrategias en la solución de los problemas planteados, y asimilar la potencia del concepto revelada en ellas.

Las valoraciones anteriores conducen al siguiente **problema de investigación**, para construir significado robusto[6] del concepto de área en los estudiantes de grado sexto, ¿cuáles son las experiencias que deben fomentarse y cómo puede caracterizarse el pensamiento geométrico involucrado?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de construcción de significado para el concepto de área. El **objetivo general** es contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con la construcción de significado robusto para el concepto de área.

Se plantean como **objetivos específicos**:

- Recopilar evidencia pertinente de la historia de la matemática, pues a través de ella se revela el camino transitado por la comunidad matemática en la generación y construcción de conceptos y estrategias de pensamiento.
- Diseñar actividades basadas en problemas no rutinarios y retadores, que hagan que los estudiantes del grado sexto construyan significado para el concepto de área y desarrollen estrategias para calcular el área de ciertas figuras planas, mediante la descomposición y recomposición de figuras y regiones geométricas planas.
- Analizar las soluciones de los problemas planteados y a través de éstas caracterizar el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto involucrado en la construcción de significado robusto para el concepto de área.
- Analizar la solución de los problemas olímpicos de matemáticas realizadas por la Universidad Antonio Nariño (Primer Nivel – grados sexto y séptimo).
- Analizar y sustentar una posición crítica con el fin de establecer si los planteamientos de la teoría de Tall (2013) son justificables o no frente al pensamiento geométrico cuyo desarrollo se observa en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

El campo de acción de esta investigación es la caracterización del pensamiento geométrico.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

- ¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la geometría?
- ¿Qué presupuestos teóricos sustentan la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con el concepto de área?
- ¿Cómo estructurar una secuencia de experiencias para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿En qué contextos deben presentarse las experiencias estructuradas?
- ¿Cómo analizar la eficacia y el impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿Cuál sería una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado robusto del concepto de área en niños de grado sexto?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, se proponen las siguientes tareas de investigación:

- Fundamentar teóricamente el problema. Revisar teorías propuestas e investigaciones realizadas en el diseño de actividades en geometría para caracterizar el pensamiento geométrico con el propósito de fundamentar la investigación.
- Construir el estado del arte de la presente temática para definir su grado de actualidad.
- Estudiar las soluciones de estudiantes de grado sexto a problemas pertinentes de las olimpiadas de matemáticas y otros similares y estructurar un sistema de actividades diseñadas (teniendo en

[3] Tall, D. (2013). Este autor define acción como la manipulación de los objetos geométrico.

[4] Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three words of Mathematics.

[5] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

[6] Pérez (2015). Criterio emitido en el examen de calificación. "Construcción de redes conceptuales que desarrolla el estudiante para dar solución a problemas no rutinarios"

cuenta en el diseño problemas retadores como son los problemas olímpicos que provocan el pensamiento autónomo) para que, al desarrollarlas, el estudiante pueda construir significado para el concepto de área coherente con el nivel de la geometría del grado sexto y así contribuir a caracterizar el pensamiento geométrico involucrado, empleando del modelo de Wenger y con el propósito de contrastar las teorías de Tall (2013).

- Valorar los resultados de la implementación del sistema de actividades.
- Proponer una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado para el concepto de área en estudiantes de grado sexto.

El aporte práctico de la presente investigación radica en un conjunto de actividades para la construcción de significado del concepto de área desde un enfoque netamente geométrico. El aporte teórico es que se precisa una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en tal construcción (áreas).

Este estudio permite sugerir los pasos que se cree se deben seguir en el proceso de enseñanza para que se construya el concepto de área en estudiantes de grado sexto, además de proponer la caracterización del pensamiento geométrico con respecto a la medición (área).

Esta tesis está estructurada en la introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el Capítulo 1, se describe la situación actual en la que se encuentran estudios dirigidos al pensamiento geométrico, identificando los métodos de enseñanza que se utilizan para la geometría y poniendo en evidencia que no se han hecho suficientes investigaciones que caractericen este pensamiento. En el Capítulo 2, se presenta el marco teórico en que se basó este estudio y que se encuentra dividido en cinco partes, en la primera se expone un marco geométrico, en la segunda se expone la teoría piagetiana relevante, en la tercera se analiza la teoría de Tall acerca de la forma en que los seres humanos construyen el concepto de área, en la cuarta se expone la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que enriquecen las perspectivas del presente estudio, y en la quinta se describe el modelo de Wenger. El Capítulo 3 presenta la metodología en que se desarrolló esta investigación y los pasos en que se diseñaron y aplicaron las actividades. El Capítulo 4 se presenta la implementación de la propuesta metodológica y descripción de algunos episodios en la construcción del significado del concepto de área.

Además, se pretende construir un material docente que paute el proceso de enseñanza - aprendizaje y el estudio del concepto de área.

1. ESTADO DEL ARTE

Diversas son las investigaciones que han trabajado sobre el pensamiento geométrico llegando a una aproximación a caracterizar éste, lo cual implica identificar diferentes formas de pensamiento relacionados con el hacer geometría (resolver problemas, conjeturar, demostrar teoremas). Los puntos de vista de estas investigaciones no son unificados.

Para el análisis de las caracterizaciones que se han desarrollado dentro de un marco geométrico se tendrá en cuenta algunas de las tendencias del pensamiento geométrico. Esta descripción se dividirá en cinco categorías donde se puntualizará cada una de las investigaciones que se han desarrollado en cada categoría:

1. Pensamiento geométrico como se entiende desde los niveles de Van Hiele
2. Pensamiento geométrico y su relación con la visualización
3. Materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico
4. Pensamiento geométrico como se entiende desde la ciencia cognitiva
5. Referencia de varios autores que intentan caracterizar el pensamiento geométrico

En estas categorías se destacan investigadores como Corberan y otros (1994), Malloy (1999), Pugalee y Malloy (1999), Beltrametti y otros (2003), Frimel (2004), entre otros, los cuales hacen referencia de cómo se entiende el pensamiento geométrico desde los niveles de Van Hiele. Sus propuestas van orientadas al diseño de métodos de enseñanza – aprendizaje a través de los niveles de Van Hiele. Por otra parte Bower (1983), Godino y otros (2011), Hitt (1998), entre otros, relacionan el pensamiento geométrico y la visualización. En sus trabajos brindan importancia a la relación entre los objetos geométricos y el desarrollo de determinadas operaciones o transformaciones. También consideran significativo el proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de las habilidades de visualización en la resolución de problemas en el salón de clases. Estos trabajos no hacen referencia a la caracterización del pensamiento geométrico.

Concerniente a la visualización Clements y Battista (1992), Del Grande (1990), Presmeg (1986), De Guzmán (1996) desarrollan diversos aportes, en particular De Guzmán (1996) establece varias categorías: isomorfa, homeomorfa, análoga y diagramática. Estos investigadores no llegan a concretar una caracterización del pensamiento geométrico, en la construcción de significado de un concepto geométrico. Por otro lado Coberàn (1996), Tasayco, (1998), Richar (2009), Rojas (2009), entre otros, proponen en sus investigaciones la utilización de diversos materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico. Sus propuestas las desarrollan a través de materiales manipulables y elaborados con el apoyo de software de geometría dinámica.

Por ultimo un intento por caracterizar el pensamiento geométrico lo hacen Piaget e Inhelder, los Van Hiele y Tall. Los primeros investigan acerca de las relaciones espaciales de los niños y proponen cuatro etapas de desarrollo en el pensamiento espacial. Los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en el año 1957, elaboran una concepción cuyos componentes son la teoría de los niveles de razonamiento: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor, que explican cómo se produce el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y proponen las fases de aprendizaje (interrogación, orientación dirigida, explicación, orientación libre, integración), lo cual resume su propuesta didáctica para el aula. Por su parte Tall (2013) propone una clasificación del pensamiento humano con respecto a la construcción del concepto de área.

2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como objetivo situar al lector de la presente investigación, en la perspectiva conceptual utilizada en ella concerniente a la importancia de permitir a nuestros estudiantes la construcción de significado para el concepto de área de superficies planas y caracterización del pensamiento involucrado en tal construcción. El marco teórico estará dividido en cinco partes.

Primero, se expone un marco geométrico, donde se menciona los inicios de la geometría pertinentes al concepto de área, destacando algunos matemáticos que aportaron proposiciones generales (teoremas) de área por medio de la descomposición y recomposición de figuras geométricas.

Segundo, se estudia con juicio la teoría piagetiana de la construcción de conceptos geométricos en el niño, en particular, la construcción del concepto de área.

Tercero, se compara lo anterior con la teoría de Tall acerca de la forma en que los seres humanos aprenden a pensar geométricamente y en particular como construyen el concepto de área.

Cuarto, se enmarca la investigación en la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que aprecia el "hacer matemáticas" como una empresa de una comunidad que, en un diálogo que se desarrolla en la historia, avanza por medio de "pruebas y refutaciones". En este enfoque se detalla los intercambios estudiantiles en el contexto de la solución de una serie de problemas relacionados con la determinación del área de ciertas figuras o regiones planas, operando sobre las figuras o regiones (descomposición, recomposición, comparación), y produciendo así soluciones que van construyendo significado para el concepto de área cada vez más apropiado en relación con el concepto que se maneja en la comunidad matemática.

Por último, se describirá el modelo de Wenger (1998) presentando los aspectos que se tienen en cuenta para el desarrollo de esta investigación. Específicamente se retoma la teoría Communities of Practice: learning, meaning and identity (Wenger, 1998-2007); esta teoría contribuye al proceso de aprendizaje de los estudiantes que otras teorías no consideran prioritarias. Se dirige a describir cómo la práctica social propicia y mejora en el estudiante el desarrollo cognitivo.

3. DISEÑO METODOLÓGICO Y DE ACTIVIDADES

La investigación es de tipo teórico-descriptivo y es un estudio evolutivo y transversal, ya que en ella se produce una fotografía instantánea de una población en un momento determinado y se evalúan los cambios que se producen comparando las mismas personas en diferentes etapas de desarrollo de las actividades y demás componentes.

Adicionalmente, se trabaja con un análisis temático para interpretar el significado de la realidad del sujeto o autor de una situación estudiando sus representaciones, estrategias de solución y actitudes, de esta forma indagar sobre las diferentes etapas o procesos del pensamiento geométrico que desarrolla el individuo para construir significado robusto del concepto a estudiar y lograr categorizarlos. Se diseñaron actividades didácticas para ser desarrolladas en forma grupal e individual, observando tanto su desarrollo como sus resultados.

Está investigación se desarrolló en cuatro colegios distintos, de diferentes perfiles en cuanto a su estudiantado, y está dividida en dos etapas. En la primera fase se aplica cada una de las actividades propuestas a un grupo de estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados. Se graban videos para analizar las estrategias que utilizan los equipos de estudiantes cuando están ejecutando sus respectivas actividades y los cuales sirven para el mejoramiento continuo, perfeccionando los materiales para luego ser implementados con un segundo grupo de estudiantes.

Se diseñó y elaboró la serie final de actividades didácticas que se realizaron a los estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados. Al finalizar el estudio se realizó una prueba - entrevista de forma individual, el cual se llevó a cabo con el segundo grupo de los cuatro colegios escogidos, para de este modo analizar cada una de las fases por las cuáles el estudiante progresa en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

Con respecto a la descripción, y aplicación de las actividades se describieron los objetivos que se pretenden en cada una de las actividades y la aplicación de éstas para el desarrollo de la presente investigación, con el propósito de caracterizar el pensamiento geométrico con respecto a la medición.

Antes de diseñar las diferentes actividades que ayudaran a los estudiantes a construir el significado de área de ciertas figuras geométricas planas y caracterizar el pensamiento involucrado se pensó en actividades que no fueran de tipo de rutina memorística, no se pretende desarrollar la habilidad sólo para responder una prueba, se busca ver si el estudiante construye este concepto por medio de la descomposición – recomposición – comparación, de esta forma analizar cuáles son los procesos de pensamiento que desarrolla el estudiante para construir el significado de este concepto.

Estas actividades presentan una estructura euclidiana donde se tienen en cuenta el concepto de área y las estrategias utilizadas en las demostraciones euclidianas. El propósito de estas actividades, es que el estudiante construya el significado del concepto de área por medio de la descomposición y recomposición de algunas figuras geométricas planas, y la posterior comparación, presentando en cada actividad una serie de problemas con el objetivo que el estudiante a medida que vaya solucionando cada problema, comience a construir el significado del concepto que se está trabajando.

Para el desarrollo de las actividades de descomposición – recomposición se plantean dos etapas, una primera de manipulación física que tiene como objetivo apreciar en cuántas formas se puede descomponer una figura. La segunda etapa es de manipulación mental, donde se proyectaron actividades en el papel para que el estudiante tenga la necesidad de utilizar su imaginación y pueda realizar la comparación del área de las figuras planas, haciendo correctamente está representación en su dibujo.

Luego los estudiantes realizarán la etapa de comparación, que tiene como objetivo que lleguen a la conclusión que una misma área puede estar representada por diferentes formas geométricas, esta etapa se realizará en dos maneras, la primera donde no se utiliza la unidad de medida, la segunda descomponiendo en unidades de comparación, representados en triángulos, rectángulos, rombos y cuadrados.

A continuación los estudiantes efectuarán actividades de deducción de procedimientos aritméticos para encontrar el área de las figuras geométricas propuestas. La última actividad aborda el círculo donde el estudiante encontrará su área por métodos de aproximación.

Al finalizar este proceso se realizará una prueba - entrevista donde se tomará una muestra de los estudiantes que participaron en las etapas anteriores de la investigación, pues se quiere observar el carácter conceptual y procedimental del conocimiento que ponen en juego los estudiantes.

Para el desarrollo de cada una de las actividades se tiene en cuenta en su diseño los componentes de la teoría social del aprendizaje propuestos por Wenger, Lakatos, Hersh y Davis, enfatizando algunos aspectos como: contextualizar el problema de una manera que se conecte con los alumnos y sus intereses, ofrecer una situación que sale de las actividades habituales, poner a los alumnos en condiciones de apropiarse de la situación, para que puedan desarrollar por sí mismos la comprensión de su participación, colocar a los estudiantes en interacciones, haciéndolos trabajar en equipo o como un grupo, animar a los estudiantes a crear sus propias estrategias de uso de sus conocimientos matemáticos estableciendo vínculos entre los conceptos, animar a la reflexión y al debate, y a la adopción de un número determinado de estrategias o soluciones.

4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLOGICA Y DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS EPISODIOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE ÁREA

La investigación se desarrolló en el Colegio Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, y Colegio Del Bosque Bilingüe, de la Ciudad de Bogotá. La propuesta metodológica se dirige a la caracterización de este pensamiento, por medio del análisis de las estrategias de solución y los aportes que realizan los estudiantes a su grupo y al grupo en conjunto en cada colegio, demostrando las formas en que van construyendo significado robusto del concepto de área.

Con respecto a la descripción de algunos episodios en la construcción del significado del concepto de área, se da un breve reporte de la ejecución de la investigación, donde se señala algunas condiciones particulares de ésta, alcances y dificultades principales.

A continuación, se realiza una caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes mientras desarrollaban cada una de las actividades en la etapa práctica de esta investigación, además se indicará que el trabajo autónomo de los estudiantes resulta un factor motivacional muy fuerte.

Caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes

Este proceso de caracterización se refleja en el Gráfico 1, en la que se muestra cómo los estudiantes avanzan en sus procesos para la construcción de significado robusto del concepto de área, iniciando en una fase que se ha denominado Fase A hasta llegar a una fase culminante de la construcción que se ha nombrado Fase F.

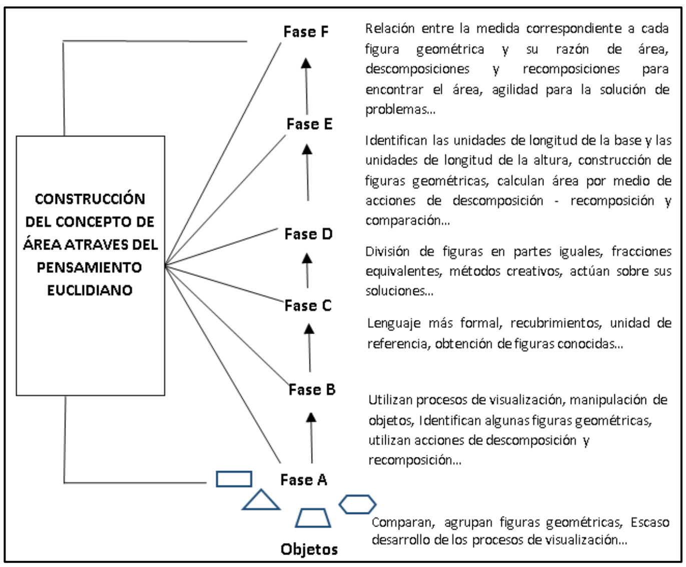


Gráfico 1. Avances de los estudiantes en cada Fase.

Se diseñaron cinco actividades que contribuyeron a caracterizar el pensamiento en cada fase, en las cuáles se identificaron las características del pensamiento que evidencian los niños en cada una de éstas.

En la Fase A, se inicia con una prueba de entrada donde el desempeño estudiantil se caracteriza en general por los siguientes aspectos.

- Falta de claridad en los procesos a realizar para dar solución a los problemas que involucran medición.
- Comparación de figuras geométricas midiendo a través de una regla.
- Agrupación de figuras geométricas y comparación visual para observar si son congruentes.
- Falta de dominio de un lenguaje geométrico.
- Dificultad en la comprensión lectora.
- Escaso desarrollo de los procesos de visualización.
- Dificultad en la identificación de algunas figuras geométricas, como por ejemplo hexágono y trapecio.
- No utilización de una unidad de referencia a emplear para realizar recubrimientos.

Con base en estas características se propuso desarrollar procesos de pensamiento en los estudiantes por medio de experiencias retadoras y enriquecedoras, de esta manera, comenzaron a desarrollar una serie de acciones sobre las figuras geométricas, y así llevar a cabo la medición de área. Con estas acciones los estudiantes comienzan a construir significado del concepto de área. En este proceso se toma como marco la teoría euclidiana, que tiene como característica el uso de herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas.

Para la Fase B, se propuso una actividad de descomposición y recomposición de figuras geométricas, en la cual se observó que los estudiantes aumentaron sus capacidades en los siguientes aspectos:

- Identifican algunas figuras geométricas como los cuadrados, rectángulos y triángulos.
- Comienzan a realizar descripciones cortas de algunas figuras geométricas.
- Utilizan procesos de visualización.
- Manifiestan de cuántas formas se puede descomponer una figura geométrica.
- Justifican por qué dos figuras geométricas tienen igual tamaño.
- Realizan descripciones cortas de algunas propiedades de las figuras geométricas.
- Ejecutan descomposiciones de las figuras geométricas mentalmente.

Esta caracterización se logra por medio de la manipulación de objetos geométricos, que es una primera etapa que desarrolla la teoría euclidiana, en la cual se realizan demostraciones de los teoremas acerca del área de figuras geométricas, a través del reacomodo de las "piezas" geométricas. Estas características fueron evidenciadas en la actividad uno, sección uno y dos.

Durante la Fase C, se desarrolló una actividad de comparación de figuras geométricas en la cual los estudiantes comenzaron a medir varias figuras geométricas mediante recubrimientos. Los avances significativos que se lograron identificar fueron los siguientes:

- Utilizan una unidad de referencia.
- Realizan las respectivas recomposiciones para obtener figuras geométricas conocidas.
- Utilizan un lenguaje más formal para sustentar sus respuestas.
- Continúan utilizando procesos de visualización de una forma más rigurosa.

Los estudiantes utilizaron algunas estrategias manifestadas por Byrne (1847) en su libro Los primeros seis libros de Euclides, donde las demostraciones se construyen a través de diferentes métodos, como la descomposición, recomposición y comparación, además de los procesos de visualización. Esto se evidenció cuando los estudiantes realizaron las respectivas recomposiciones, para obtener figuras geométricas conocidas y de esta manera, ubicar una unidad de referencia y comenzar a realizar el recubrimiento total de la figura, según los resultados arrojados en la actividad 2.

Cabe resaltar que los estudiantes al encontrar la unidad de referencia hacían uso de las propiedades de las figuras geométricas, como lados opuestos de un paralelogramo son iguales, las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en partes iguales, lados opuestos de un paralelogramo son paralelos, las diagonales de un rectángulo son iguales, el cuadrado es a su vez paralelogramo, rectángulo y rombo, entre otras. De esta forma identificaron cuadrados, rectángulos y paralelogramos, concluyendo cuántas de estas unidades recubrían la figura proporcionada para determinar su área.

En la Fase D, se propuso determinar la razón entre áreas de figuras geométricas. En ella los estudiantes comenzaron a utilizar herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas. El trabajo realizado por los estudiantes en esta Fase se caracteriza por:

- Subdividen las figuras en partes iguales.
- Comparan las partes constituidas respecto a cada división realizada.
- Señalan por qué el polígono quedó dividido en partes iguales.
- Encuentran fracciones equivalentes.
- Observan y comparan si las partes divididas de una figura geométrica tienen igual área.
- Utilizan diferentes acciones para dividir una figura geométrica en partes iguales.
- Actúan sobre sus soluciones para comenzar a dar justificaciones.

Los estudiantes utilizaron muchas de las herramientas principales que utilizó Euclides para resolver problemas de áreas, llegaron a manejar el término de igualdad a través de acciones de descomposición, recomposición y comparación, aspectos que se evidenciaron en la Actividad 3.

Para la Fase E, se propusieron varias actividades para que los estudiantes dedujeran fórmulas para calcular el área de figuras geométricas específicas, evidenciando que los estudiantes poseen la habilidad de desarrollar procedimientos aritméticos para encontrar el área de las principales figuras geométricas planas. En ella se encuentran los siguientes avances en su pensamiento.

- Identifican las unidades de longitud de la base y la altura de rectángulos y triángulos.
- Construyen diferentes figuras geométricas, donde tienen en cuenta los datos indicados y encuentran la relación de proporcionalidad que puede existir entre una figura y otra.
- Argumentan por qué se usa un tratamiento similar que involucra las longitudes de la base y altura en un rectángulo y en un paralelogramo.
- Calculan el área de figuras geométricas por medio de descomposiciones y recomposiciones obteniendo una figura geométrica conocida.
- Adquieren habilidades para la solución de problemas.

Las características logradas en esta fase, se pudieron constatar a través de los resultados de la actividad 5, sesiones uno, dos, tres y cuatro.

Por último durante la Fase F, se estudiaron las fórmulas para la longitud y el área del círculo, actividades en las cuales se confirma que los estudiantes utilizaron estrategias plenamente consolidadas para hallar el área por medio de descomposiciones y recomposiciones, con base en lo anterior se logró identificar los siguientes progresos en el desarrollo de su pensamiento.

- Encuentran con facilidad la razón de área correspondiente a cada figura geométrica.
- Justifican la relación entre la medida correspondiente a cada figura geométrica y su razón de área.
- Argumentan cómo encontrar la longitud aproximada para la circunferencia haciendo uso de los datos obtenidos.
- Realizan descomposiciones y recomposiciones para encontrar el área de una circunferencia.

Se demostró que a medida en que el estudiante va utilizando las propiedades de los objetos para llevar a cabo la descomposición, recomposición y comparación, interioriza y obtiene un mejor entendimiento[7] de las propiedades de las figuras geométricas y sus implicaciones.

Con respecto a la metodología descrita anteriormente, se consideró conveniente, para realizar un correcto análisis de las respuestas, entrevistar a varios estudiantes por curso, los cuáles fueron escogidos de forma aleatoria. Cada una de las respuestas dadas por los estudiantes respondía a determinadas características específicas. Las entrevistas tuvieron como objetivos:

- Caracterizar el pensamiento del niño en la solución de problemas no rutinarios donde interviene el concepto de área.
- Analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utiliza el estudiante para dar solución a los problemas planteados para caracterizar su pensamiento al desarrollar un enfoque predominantemente geométrico de la medición.

Para la primera fase, se utilizaron nueve tarjetas en cada una de las cuales aparecen diferentes figuras geométricas. El estudiante debió escoger dos de las tarjetas, crear un problema y escribirlo en los respectivos formatos. Además, para cada tarjeta se diseñó una serie de preguntas que se podían realizar al estudiante si no llegara a dar solución a la actividad planteada. En la segunda fase, se le entregó al estudiante siete problemas para que el estudiante explicara y justificara su solución por escrito complementado por explicaciones verbales.

La entrevista se llevó a cabo en distintos momentos y de forma individual para cada uno de los niños elegidos, y en todos los casos se usó un cuestionario preparado. Dentro del desarrollo de las entrevistas, el docente investigador se vio en la necesidad de hacerse participe en este proceso, pues los estudiantes por sí solos no expresaban fácilmente las heurísticas que realizaban para dar solución al problema, probablemente debido a que no están acostumbrados a expresar libremente sus ideas porque en su formación siempre esperan que el docente les realice las preguntas para luego ser contestadas.

CONCLUSIONES

Robustez del significado del concepto de área

Con base en el análisis histórico desarrollado en el Capítulo 2, la experiencia que se obtuvo en la implementación de cada una de las actividades propuestas y los resultados obtenidos en las entrevistas, se tienen los elementos requeridos para definir la construcción de significado robusto del concepto de área.

Una primera etapa en la construcción de un significado robusto del concepto de área se logra cuando el individuo usa la estrategia euclidiana basada en igualdad de área buscando diferentes estrategias de división de una región del plano o figura geométrica. Con base en estas transformaciones el individuo utiliza herramientas de traslación y rotación, entre otras, para reconfigurar estas “piezas” geométricas, y de esta manera, formar una nueva figura geométrica, comprendiendo con claridad que el área permanece igual (invariante).

[7] Construcción de conexiones robustas entre los nuevos conocimientos y aquellos que se conocen de forma previa, donde son capaces de elaborar sus propios procedimientos o herramientas para resolver problemas.

En una segunda etapa, se comparan figuras que no tienen igual área, utilizando patrones de referencia que permiten hacer comparaciones parte-todo de la misma configuración introduciendo un conteo de partes constituyentes (unidades iguales de referencia).

Una tercera etapa aborda la búsqueda de fórmulas aritméticas para calcular el área. Dichas fórmulas se obtienen mediante la descomposición y recomposición de las figuras basadas en una fórmula primitiva tomada como conocida, en este caso la del rectángulo, al igual de lo que sucede en la teoría matemática de la medida.

Finalmente, se es capaz de resolver problemas no rutinarios y hasta retadores que involucran el concepto de área empleando una gama de estrategias que se desarrollaron en etapas anteriores.

El pensamiento métrico primeramente es geométrico.

En esta investigación se evidencia que los jóvenes estudiantes han construido conceptos de medición a través de la solución de problemas no rutinarios que involucran acciones de descomposición, recomposición y comparación de figuras geométricas, sin la utilización de símbolos aritmético-algebraicos. Esto va en contravía de la postura teórica de David Tall (2013), donde señala que el pensamiento geométrico es la abstracción a partir de las figuras percibidas (abstracción estructural) y el pensamiento métrico (la medición) es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes (abstracción operacional).

Para esta investigación, la medición, y en particular, la construcción del significado del concepto de área, es primariamente geométrico, combinando luego elementos aritméticos que, a su vez, se basan en relaciones geométricas. Detrás de las estrategias de descomposición y recomposición, se halla la identificación y uso de propiedades geométricas de las figuras involucradas, propiedades que sustentan la corrección de las descomposiciones y recomposiciones (que las figuras "calcen", que depende del reconocimiento de propiedades de los ángulos, las longitudes de los segmentos, paralelismo, entre otros). Tal identificación, a su vez, tiene su raíz, por ejemplo, en la manipulación física de fichas con cierta forma, pero se hace efectiva en la construcción del significado del concepto de área, no por intermedio de la percepción sino en el reconocimiento de invariantes bajo las transformaciones efectuadas, es decir, las operaciones del sujeto sobre las figuras.

Estas manipulaciones se emprenden por medio de realizar acciones de transformación o modificación de las figuras geométricas por medio de descomposiciones y trazos de líneas auxiliares.

Clasificación del pensamiento humano con respecto a la construcción del concepto de área

Se tiene presente que para Tall (2013) los conceptos de longitud y área inician con acciones de medir, un proceso esencialmente numérico – aritmético, y de esta forma se abstrae el concepto con base en las acciones del sujeto por medio de operaciones rituales sobre los objetos y no por medio de los objetos en sí. Además, Tall intenta hacer una clasificación del pensamiento humano basada en la percepción por una parte y en acciones que se van convirtiendo en operaciones, por otra. Para esto, siguiendo parcialmente a Piaget, formula dos maneras en las cuales el individuo construye conceptos nuevos. Una primera, denominada abstracción estructural y una segunda llamada abstracción operacional, ilustradas en la Figura 1.

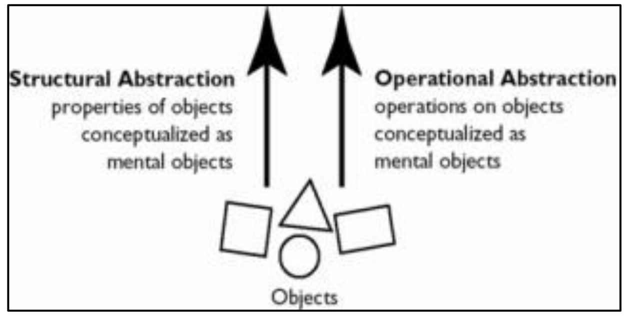


Figura 1. Tomado de Tall, David (2013) How Humans Learn to Think Mathematically pg. 65

La abstracción estructural se define como centrarse en contemplar la estructura de los objetos y abstraer de ahí sus propiedades. Tall (2013) afirma que ésta es la abstracción propia del pensamiento cuyo producto son los conceptos geométricos.

En cambio, la abstracción operacional se logra a partir de las acciones del sujeto por medio de procesos que se van interiorizando y organizando de modo que se vuelven con el tiempo operaciones sobre las cuales se logra abstraer los conceptos aritméticos y algebraicos.

En cuanto, a su caracterización del pensamiento geométrico, Tall (2013) no tiene en cuenta las diferentes operaciones que puede realizar un individuo para construir un concepto geométrico nuevo, ya que se limita a un pensamiento contemplativo y no activo.

Tall (2013) plantea que la abstracción estructural y la operacional son dos tipos de pensamiento diferentes, separando el pensamiento geométrico del aritmético y algebraico. Pero en la presente investigación se ha demostrado que este señalamiento no es cierto, ya que estas dos abstracciones van articuladas en la geometría, pues se promueve la abstracción a partir o bien de los objetos o bien de las acciones que realiza el sujeto para ejecutar transformaciones.

Por otra parte, como se dijo en el aparte anterior, el planteamiento central de la presente investigación es que el pensamiento métrico es esencialmente geométrico.

En la investigación se evidenció que las actividades diseñadas para este estudio seguían el concepto griego de área, donde los estudiantes al enfrentarse a un problema, y buscar darle solución, comienzan utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente.

El pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado del concepto de área y llevado a cabo en el contexto de la solución de problemas no rutinarios requiere de construcciones, descomposiciones, recomposiciones y comparaciones, todas estas acciones realizadas por el individuo. Este pensamiento geométrico no es la abstracción a partir de las figuras geométricas como lo indica Tall (2013), sino a partir de transformar la figura y utilizar activamente sus propiedades. Concluimos que Tall no ha tenido en cuenta y no ha analizado el pensamiento utilizado por un individuo al resolver problemas geométricos no rutinarios relacionados con el concepto de área.

Por otro lado, en cuanto al pensamiento métrico, incluyendo el relacionado con el concepto de área, Tall (2013) argumenta que es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes, involucrando un elemento de simbolismo, ya que se introduce además unas expresiones numérico - aritméticos. Con base en este señalamiento, Tall (2013) sostiene que la medición involucra operaciones del sujeto y termina empleando fórmulas de tipo algebraico, y por lo tanto, que el pensamiento métrico, se relaciona con la abstracción operacional, separando así el pensamiento métrico del geométrico.

Basado en los resultados de esta investigación, se difiere de estos señalamientos ya que en ella se muestra que se construye significado del concepto de área a partir de actividades que recorren tres fases.

Primero, se centran en la igualdad de áreas de distintas figuras por medio de las transformaciones de descomposición y recomposición. Segundo, usando lo que se han denominado "unidades de referencia", se logra la comparación de las áreas de distintas figuras y, más generalmente de diferentes regiones planas. Tercero, formando nexos entre los aspectos geométricos y aritmético – algebraicos de la medición de áreas se toma la fórmula del área del rectángulo como básica, y a partir de allí, por medio de la misma clase de transformaciones, se muestra cómo se puede relacionar y referir las fórmulas de las áreas de otras figuras geométricas (paralelogramo, triángulo, trapecio, hexágono, entre otros) al área del rectángulo. Reiteramos, como se mostró en el Capítulo 2, que se procede de manera similar en la matemática avanzada, en particular, en la teoría matemática de la medida.

Con base en estos resultados, se evidenció que el pensamiento requerido para la construcción del concepto de área y la solución de problemas involucrados en términos de medición utiliza un pensamiento geométrico operacional.

El pensamiento geométrico y el pensamiento euclidiano van más allá del acto de la contemplación, es mucho más rico de lo que Piaget y Tall señalan en su teoría, no está limitado al análisis de las propiedades de los objetos, sino es activo y operacional. Se concluye que, las actividades inspiradas en los planteamientos griegos alrededor del concepto de área, permiten al estudiante construir significado robusto de ese concepto por medio de operaciones netamente geométricas.

Se observa, además, que Tall (2013) sigue de cerca el tradicional tratamiento curricular de la geometría para hacer sus planteamientos.

La autora de la presente investigación discrepa de la caracterización realizada por Tall (2013), por lo que en lo que sigue se proponen dos clasificaciones para la construcción de significado del concepto de área y la caracterización del pensamiento involucrado.

La primera es el análisis; cuando el estudiante se centra en examinar las configuraciones e identifica sus propiedades para transformarlas, con el propósito de encontrar figuras geométricas equivalentes (de igual área).

El segundo aspecto, es el razonamiento y la argumentación. En esta etapa se encuentran las diferentes operaciones que se realizan sobre la configuración por medio de métodos creativos como visualizar la situación, subdividir, descomponer, recomponer y comparar, entre otros, para obtener figuras geométricas nuevas conservando el área de la figura original. Se procede de forma similar para establecer fórmulas de tipo algebraico para determinar su área.

Estas dos clasificaciones son llevadas a cabo con la utilización de un pensamiento geométrico operacional, las cuáles se ilustran en la Figura 2.

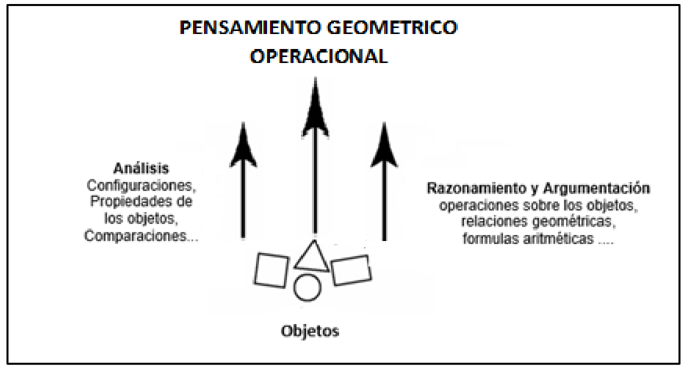


Figura 2. Replanteamiento del proceso en la construcción del concepto de área.

La construcción de significado robusto de los conceptos de longitud y área en un proceso sólido de enseñanza – aprendizaje no se inicia con acciones de medir, como lo señala Tall (2013), y si, por el contrario, se basa directamente en la aritmética y las fórmulas, el aprendizaje es precaria y carece de profundidad, tanto así, que los estudiantes apenas identifican las palabras perímetro y área con fórmulas aritmético - algebraicas y hasta las confunden. Se concluye que los conceptos geométricos cuyo significado robusto se construye con base en transformaciones y propiedades geométricas facilita la adquisición del concepto de área y la solución de problemas no rutinarios, además, podemos afirmar con certeza que la utilización del enfoque y abordaje euclidiana potencia y desarrolla el pensamiento geométrico.

Esquema del proceso para la construcción del concepto de área

Teniendo en cuenta la clasificación planteada en esta investigación para la construcción de significado del concepto de área para estudiantes de aproximmadamente12 años de edad, se propone el esquema o mapa conceptual que se muestra en la Figura 3.

Como puede apreciarse en el esquema, se parte de observar que una figura geométrica o región del plano puede descomponerse en partes iguales, trazando líneas de subdivisión. Esto permite comparar el área de la figura geométrica con la de otras figuras por medio de unidades de referencia.

De otra parte, en el mapa conceptual se muestra que es posible recomponer estas partes teniendo en cuenta la conservación de área y las propiedades de las figuras, para obtener otras figuras geométricas equivalentes y, a partir de estas, buscar fórmulas aritméticas para calcular el área de la figura o región geométrica inicial.

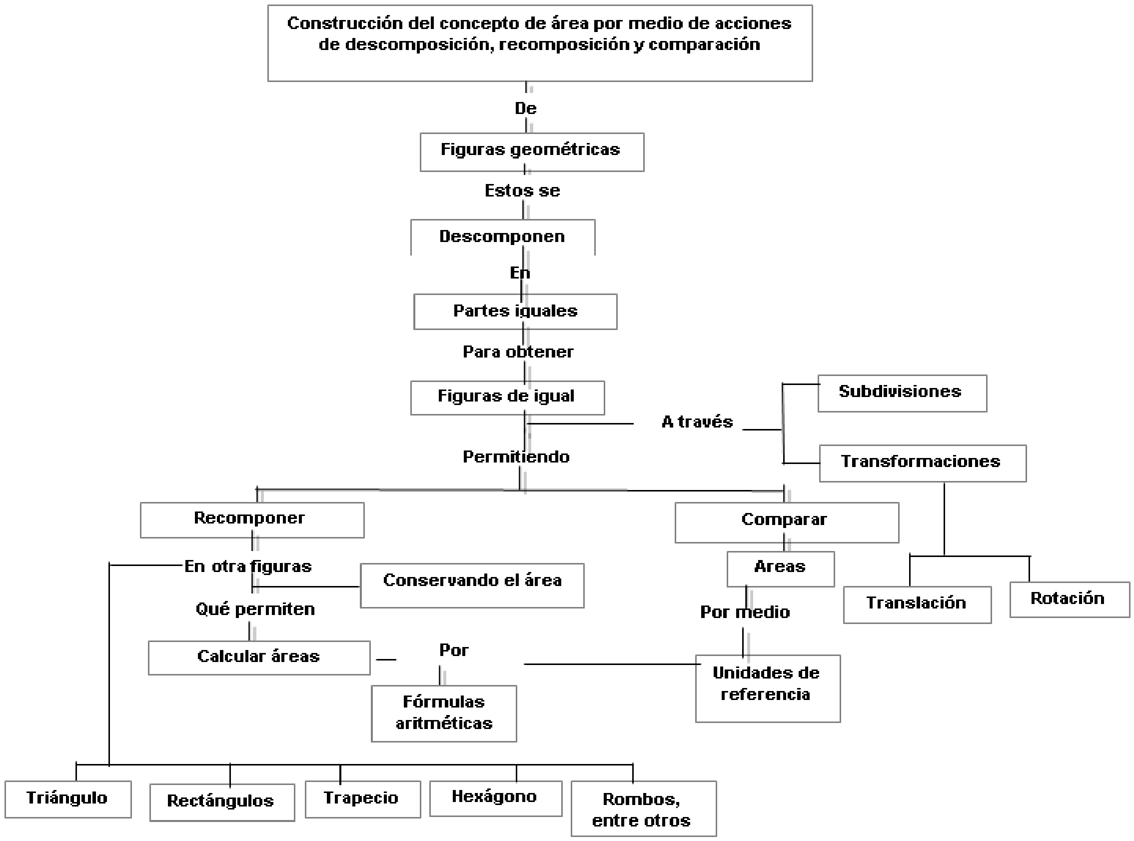


Figura 3. Esquema del proceso para la construcción de área

RECOMENDACIONES

A través del tiempo se ha demostrado que la construcción del concepto de área en la geometría escolar colombiana se continúa enseñando bajo los mismos planteamientos de la educación tradicional, donde el estudiante se considera un individuo que capta información y memoriza fórmulas para dar respuestas a ejercicios sin saber el por qué lo está haciendo. Con base en estos cuestionamientos los estudiantes no están aprendiendo a razonar ni mucho menos construyen significado apropiado para el concepto, por lo que esta investigación propone una transformación del enfoque que incide en el modo de pensar de los estudiantes, con respecto a la construcción de significado robusto del concepto de área, en la cual se conviertan en individuos más activos, más creativos y más analíticos.

Para el diseño de cada una de las actividades propuestas dirigidas a la construcción del concepto de área, se tuvo en cuenta cada uno de los componentes desarrollados en el enfoque euclidiano. En este proceso se muestra con claridad que el dar solución a problemas de área está íntimamente relacionado, no apenas con la medición práctica por medio de procedimientos aritméticos y numéricos como lo propone Tall (2013), sino con un conocimiento operativo de las propiedades de las figuras que permite buscar diferentes subdivisiones y descomposiciones, para luego recomponer las partes obtenidas a sabiendas que, por sus propiedades, "calzaran" perfectamente, utilizando acciones físicas y mentales de comparación que dan lugar a enunciar razones entre sus áreas y desarrollar formulas aritméticas para el cálculo de éstas, y a poder abordar con éxito la resolución de problemas retadores relacionados con el concepto de área.

Es de esta forma, si las escuelas llevan una práctica diferente de enseñar por medio de solución de problemas no rutinarios y teniendo en cuenta el legado histórico de las matemáticas, los estudiantes inician sus procesos de razonamiento y construyen su conocimiento en lugar de reducirse a memorizar sin comprender. Por lo cual se recomienda, que en las instituciones educativas se planteé el trabajo escolar en términos de promover el pensamiento geométrico, por medio de actividades que reten al aprendizaje autónomo. Además, esto podría lograrse difundiendo las actividades y los resultados de la investigación en los diferentes centros educativos del país para hacer conocer este método de enseñanza y de esta forma comenzar a replantear las orientaciones del currículo frente a los conceptos de medición.

Se sugiere explorar la posibilidad de extender los planteamientos expuestos en esta tesis para la construcción de significado de otros conceptos geométricos y métricos.

En esta investigación se realizó un estudio puntual acerca de la posición de Tall (2013) con respecto a la caracterización del pensamiento para la construcción del concepto de área. Queda abierto el espacio de investigación y discusión para otros aspectos matemáticos que este autor trata en su libro.

CONTRIBUCIONES DE LA AUTORA

Pérez, D. & Falk, M. (2016). Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años).

Pérez, D., Falk, M. (2016). Cuestionando las orientaciones del Currículo. Un enfoque alterno para el concepto de área. *Revista Vidya*, (36)1, 79-92.

Pérez, D. (2015). Una propuesta para la construcción de significado del concepto de área, basado en las formas de razonamiento de Euclides en una comunidad de práctica para sexto grado. MEM 2015.

Pérez, D. (2013). Una propuesta para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. *Revista Papeles*, 5(9), 87-95.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

Abdullanh, A. Z. (2011). Students´ perceptions towards the Van Hieles phases of learning geometry using geometer´s sketchpad software. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*.

Batista, L. M. (2008). La adquisición de los primeros conceptos científicos en el niño según Piaget. Recuperable: 23 de Junio del 2014. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/Boletines/08/Articulos09.pdf

Berthelot, R. S. (1999). L'enseignement de l'espace à l'ecole primarie. *Grand N*, nº65,pp. 37-59.

Bordonaba, P. (2007). *El nacimiento de la Inteligencia en el niño. Jean Piaget*. Barcelona: Ares y Mares.

Byrne, O. (1847). *Los primeros seis libros de los elementos de Euclides.* Falkland Island: Taschen.

Camargo, L. (2012). Investigaciones en Educación geométrica. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Corberan, R. (1996). El área, recursos didácticos para su enseñanza en la geometría. Recuperable: 9 de abril del 2014. Obtenido de www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Crowley, M. (1987). The Van Hiele model of the development of geometric thought. In Do, T.V. and Lee, J.-W. (2009). A multiple-level 3D-LEGO Game in augmented reality for improving spatial ability. . *Proceedings of the International Conference on Human-Computer Interaction*, 296-303.San Diego,CA

Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Lindquist & A.P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp.126-135). Reston, VA:*National Council of Teachers of mathematics.*

Ferreiro, E. (1975). *Introducción a la Epistemología Genética. Jean Piaget*. Buenos Aires: Paidos.

Garcá, E. (2006). *La formación de la inteligencia.* Piaget. México: Trillas.

Guzman, M. (2006). El rincón de la pizarra. Recuperable: 25 de marzo del 2014. Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/visualizacion

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* University of Warwick: Kluwer Academic Publishers, 54-61.

Hershkowita, R. (1991). *Memorias del tercer Congreso Internacional sobre investigaciones de Educaciòn Maremàtica.* Valencia.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educaciòn Matemàtica*, 10(2), 23-45.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. la lògica del descubrimiento matemático.* Versión Española de Carlos Solis.

Malloy, C. (1999). Perimeter and Àrea through the Van Hiele Model. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 87-90.

Pandiscio, E. (2002). *Geometry.* Mathematics Teacher, tomo 95, 1 - 32.

Paz, A. (2013). Cómo funciona la mente: algunas tesis de Stiven Pinker. Recuperable: 20 de Agostodel 2014. Obtenido de http://soyandrespaz.wordpress.com/2013/05/18/como-funciona-la-mente-algunas-tesis-de-steven-pinker/

Pèrez, D. (2011). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un sistema de Actividades para la construcción de significado del concepto de àrea, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Bogotá.

Philip, D. (1923). *Experiencia Matemática*. Barcelona.

Rizo, C. C. (2003). Aprendizaje y geometría dinámica en la Escuela Básica. Ciencia y Sociedad. Volumen XXVII, Número 4, Octubre-Diciembre 2003. Recuperable: 5 de marzo del 2014. Obtenido de file:///G:/Tareas%20de%20Orlando/celia.pdf

Rojas, O. (2009). *Una concepción Didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario diversificado* (Tesis doctoral). Cuba.

Stockton, R. (2009). Mathematics Teacher, Enero, tomo 32, No. 7, 1-12.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge.

Wenger, E. (2007). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* Cambridge: University Press.

EL TEOREMA DE BAYES EN EL PROCESO DE FORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE MEDICINA. UNA HERRAMIENTA PARA SU ACTUACIÓN PROFESIONAL

LUIS FERNANDO PÉREZ DUARTE
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
lufepedu@hotmail.com

PEDRO MONTERREY GUTIÉRREZ
Director de Tesis
Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia
pedro.monterrey@urosario.edu.co

OSVALDO ROJAS VELÁZQUEZ
Co Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

El teorema de Bayes es tratado en los cursos de Bioestadística en las Carreras de Medicina, pero su presentación sigue las pautas de los libros de Estadística y en general no se vincula con los problemas de la práctica médica en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia. En este sentido se impone el perfeccionamiento del tema de Probabilidades, en el curso de Bioestadística en Medicina. En la investigación se implementa un modelo didáctico para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje del teorema de Bayes, en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de las aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia. Con la propuesta didáctica sustentada en el modelo se logra: aumentar la cantidad de estudiantes *que utilizan correctamente el teorema de Bayes y la probabilidad total; crear redes conceptuales para mejorar las competencias en el uso de las probabilidades; facilitar la creación de mecanismos donde los estudiantes formulen heurísticas para dar solución a problemas*

Prácticos del contexto de la medicina y preparar a los estudiantes para perfeccionar las decisiones clínicas, a partir de un conocimiento de las posibilidades de aplicación del teorema de Bayes en el proceso de diagnóstico clínico.

Abstract

Usually Bayes Theorem is a component of any Biostatistics course in Medical Faculties around the word. The general practice is to teach the theorem following a mathematical point of view, in accordance to the way that the theorem is introduced in Probability and Statistics textbooks. This teaching procedure is not in accordance with the objectives and goals of medical education, which is based on the precept that clinical practice will be done according to the principles on Evidence Based Medicine.

In this thesis, a new teaching model for Bayes Theorem was developed in order to improve the Medical Education at Medical Faculty in the Antonio Nariño University. The new procedure considered the applications of Bayes Theorem in the interpretation of diagnostic test and clinical evidences in clinical diagnosis. The procedure was based on a heuristic way to achieve the theorem understanding. To achieve the objectives of the new teaching procedure, some modifications in the pedagogical procedures to teach previous concepts was done, with the additional gain that all the lessons in probability theory was improved.

The new proposal will improve the students' capabilities to analyze clinical evidences by means of probabilistic judgements.

INTRODUCCIÓN

La Estadística está presente en las distintas áreas de la actividad humana, pues hoy en día tiene una destacada influencia, en las diferentes esferas de la vida. La simple lectura de un periódico requiere de conocimientos de Estadística para entender el significado de las tablas de datos y gráficas que aparecen en la prensa y que se refieren, por ejemplo, al consumo de bienes y servicios. Específicamente en la medicina la presencia de la estadística ha adquirido gran relevancia en las últimas décadas. La carrera de medicina tiene como objetivo generar competencias necesarias para este fin; pero se ha demostrado que la enseñanza de la estadística no se articula con los saberes que se desarrolla en otros cursos, de tal modo que generan falencias en este aspecto[8].

Los procesos de razonamiento en los estudiantes de medicina, facilitan el desarrollo de destrezas para solución de problemas (Rancinh y Candreva, 1995)[9]. Aspectos estos, que son necesarios para la práctica médica. Uno de los contenidos estadísticos que contribuye a la formación del razonamiento médico, es el teorema de Bayes. Entonces es prudente introducir en las escuelas de medicina la enseñanza y aplicación de la probabilidad subjetiva y del teorema Bayes en los diagnósticos.

En 1763 se publicó An essay towards solving a problem in the doctrine of chances[10]. En este artículo, Bayes estudió el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados, esto es la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Con esto resolvió el problema "de la probabilidad inversa"; su interpretación, desde el punto de vista de la aplicación del Teorema de Bayes, en el proceso de diagnóstico, es que la probabilidad a posteriori de un evento queda determinada por una probabilidad a priori, que se determina a partir de un juicio clínico

inicial, que puede ser una valoración subjetiva, basada en la experiencia, o una medida de frecuencia, obtenida a partir de datos estadísticos, por ejemplo las prevalencias de un evento. Este juicio inicial se modifica por una información adicional derivada, por ejemplo, de la aplicación de algún criterio de diagnóstico. A pesar que la esencia matemática del Teorema de Bayes, la adjudicación de las probabilidades a priori es un proceso en el cual el médico debe poner en práctica su juicio clínico, su experiencia, el conocimiento adquirido en su formación y los resultados más actuales de la investigación Biomédica. Este proceso permite fortalecer el desempeño del médico en la práctica profesional y unir la experiencia del profesional con los resultados de las pruebas médicas para el diagnóstico. Esta forma de un unificar la experiencia, los resultados más actuales de la investigación, con las evidencias clínicas facilita la aplicación de los principios de la Medicina Basada en la Evidencia.

La Medicina Basada en la Evidencia[11] es un criterio que se fundamenta en que las decisiones que corresponden a un uso racional, explícito, juicioso y actualizado de los mejores datos objetivos aplicados al tratamiento de cada paciente, en ella se requiere la integración de la experiencia clínica individual con los mejores datos objetivos cuando se toma una decisión terapéutica. Este criterio se impone cada vez más en la actividad médica, y modifica la medicina tradicional al promover que la práctica médica se fundamente en datos científicos y no en suposiciones o creencias. Esta medicina se basa en la lectura crítica de la literatura biomédica y en la aplicación de métodos racionales, sustentado en los mejores datos, objetivos y en los resultados más actualizados de las investigaciones en el área, en la toma de decisiones clínicas o terapéuticas. Al tratar un paciente, siguiendo las pautas dictadas por la Medicina Basada en la Evidencia, el médico tiene una cierta certeza sobre su estado. Esta certeza está determinada por su experiencia y por los resultados e información obtenidos de la literatura médica, sobre esta base él puede definir las probabilidades a priori o prioris, después de la realización de los procedimientos de diagnóstico debe contrastar su juicio inicial con estas evidencias y modificar su conocimiento inicial. Esta situación es un problema de cálculo de probabilidades inversas y su solución queda determinada por la aplicación del Teorema de Bayes. Aunque los principios de la Medicina Basada en la Evidencia ganan adeptos día a día, esta forma de proceder basada en el Teorema de Bayes no es común en los análisis clínicos, pero su introducción enriquecería sustancialmente la práctica clínica.

Usualmente el teorema de Bayes es tratado en los cursos de Bioestadística en las Carreras de Medicina, pero su presentación sigue las pautas de los libros de Estadística y en general no se vincula con los problemas de la práctica médica en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia. El énfasis principal, en esos casos, es la explicación de las pruebas de diagnóstico y el significado de los

[8] Tosleson, D. (1990). New pathways in general medical. *The New England Journal Of Medicine*, Massachusett Medical Society.

[9] Rancich, A. y Candreva, A. (1995). Razonamiento Médico: Factor de problemas como estrategia de Enseñanza – Aprendizaje. Educación Médica Salud Vol 29 No. 3 -4. Recuperado el 9 de abril de 2014 en la URL: http://hist.library.paho.org/Spanish/EMS/21763.pdf.

[10] Bayes, T. y Price, R. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Recuperable el 6 de febrero de 2016 en la URL: http://rstl.royalsocietypublishing.org, p. 375.

[11] Sackett, D., Rosenberg, W., Muir, J., Brian, R. y Richardson, W. (1996). Medicina Basada en la Evidencia: Lo qué es y lo qué no. Basado en un editorial de *British Medical Journal*. BMJ 1996; 312 (13 enero): 71-2. Recuperable el 5 de noviembre de 2014 en la URL: http://www.infodoctor.org/rafabravo/mbe3.html#definicion

valores probabilísticos, que se utilizan para caracterizar su desempeño en el diagnóstico. En este sentido se impone el perfeccionamiento del tema de Probabilidades, en el curso de Bioestadística para Medicina. Se debe lograr que en este proceso se prepare a los estudiantes para perfeccionar las decisiones clínicas, a partir de un conocimiento de las posibilidades de aplicación del Teorema de Bayes en el proceso de diagnóstico clínico.

Las valoraciones anteriores conducen al siguiente problema de investigación: ¿cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje del teorema de Bayes en el curso de Bioestadística para los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño? Se precisa como objeto de estudio: el proceso de enseñanza-aprendizaje de la bioestadística en la formación médica.

Se infiere como objetivo general: implementar un modelo didáctico para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes, en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de las aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia.

Se plantean como objetivos específicos:

- Identificar los elementos conceptuales básicos en la enseñanza del Teorema de Bayes en las carreras de Medicina, haciendo especial énfasis en los requerimientos que se derivan de las aplicaciones a problemas de la medicina basada en evidencias.
- Modificar en el programa de la asignatura el Tema de Probabilidades para adecuarlo a los requerimientos que demanda el perfeccionamiento de la enseñanza del Teorema de Bayes.
- Elaborar los objetivos, habilidades y capacidades que deben lograrse con la enseñanza del teorema de Bayes en el marco de sus aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia.
- Construir una colección de problemas retadores con aplicaciones del Teorema de Bayes, que permitan el logro de los objetivos, habilidades y capacidades que se determinen.
- Elaborar una serie de problemas complementarios dirigidos al docente, para ser utilizado como notas de clases, que paute el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes y que permita estandarizar a los profesores que dicten esta asignatura en el enfoque pedagógico que se desea lograr.

Acorde con el objetivo, el campo de acción se enmarca en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Bayes en la materia Bioestadística en la formación médica.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan la siguiente hipótesis de Investigación: La presentación del Teorema de Bayes en el curso de Bioestadística en la Universidad Antonio Nariño, en el contexto de problemas retadores, sobre la toma de decisiones clínicas o terapéuticas, donde se utilicen los resultados de pruebas de diagnóstico, contribuirá a fortalecer las capacidades de análisis de las evidencias por parte de los estudiantes de la carrera de Medicina.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes tareas de investigación:

- Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la bioestadística, específicamente del Teorema de Bayes en la formación médica.
- Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la bioestadística, específicamente en la enseñanza del Teorema de Bayes, en el marco de sus aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia.
- Elaborar un modelo didáctico para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Bayes, en el marco de sus aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia.
- Elaborar una metodología basada en el modelo, para su implementación en la práctica en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño.
- Valorar la pertinencia del modelo propuesto y la viabilidad de la implementación de la metodología en la práctica.

El aporte teórico de la tesis esta dado en un modelo didáctico, donde se integra la resolución de problemas retadores inmersos en situaciones médicas, la contextualización al desempeño profesional del médico y la medicina basada en evidencias, para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes en los estudiantes de medicina. Con el modelo se espera facilitar la construcción de un significado robusto, sobre la temática y así mejorar el razonamiento de los estudiantes de medicina, que le permitan tomar las mejores decisiones para adquirir competencias en el manejo de variables, generando hipótesis y realizando análisis y síntesis en todos los procesos, que conllevan a la resolución de un problema en el campo de la medicina. Este proceso propicia la comprensión sobre las aplicaciones del teorema de Bayes en el ámbito de las ciencias médicas.

El aporte práctico de la tesis se basa en una propuesta didáctica sustentada en el modelo didáctico para la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes. A demás de una serie de talleres, para la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes en el aula, que propicie la adquisición de habilidades por parte de los estudiantes, en la identificación de las probabilidades a priori y posteriori, que le permitan mejorar las perspectivas en la toma de decisiones en problemas clínicos. A demás se pretende construir una colección de problemas retadores con aplicaciones del Teorema de Bayes, que permitan el logro de los objetivos propuestos.

La estructura de la tesis está conformada por una introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos. En el Capítulo 1 se presenta algunas investigaciones relacionadas con el este tema, los que se constituyen en referentes fundamentales para el desarrollo del trabajo. En el Capítulo 2, se presentan los fundamentos filosóficos y psicológicos, consideraciones sobre la resolución de problemas y su aprendizaje; también aspectos conceptuales sobre la Probabilidad Subjetiva. En el Capítulo 3 se presenta la metodología utilizada, los instrumentos de recolección de información y las fases desarrolladas en este estudio. En el Capítulo 4 se describe el modelo didáctico y su implementación. En el Capítulo 5 se describen los resultados obtenidos al aplicar las fases del modelo didáctico a estudiantes de la carrera de medicina.

1. ESTADO DEL ARTE

En este Capítulo se abordan las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la Bioestadística, en particular del Teorema de Bayes en el mundo y en Colombia.

1.1. El proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística en la formación médica

En este epígrafe se valoran los trabajos realizados por: Snee (1990), Hogg (1992), Fernández (1996), Norman y Streiner (1996), Indrayan (1996), Butler (1998), Wild y Pfannkuch (1999), Leung (2002), Garfield, Hogg, Schau y Whittinghill (2002), Hassad (2009), Fmiles, Price, Swift, Shepstone y Leinster (2010). Estos autores coinciden en la importancia de la formación estadística en los estudiantes de medicina, para un mejor desempeño profesional. Este proceso le permite indagar, cuestionar, razonar y a dar explicaciones a sus planteamientos, dentro de la resolución de un problema dado.

1.2. El proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Bayes en la formación médica

Aportan al proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Bayes en la formación médica autores como: Rossman y Short (1995), Nease y Owens (1997), Iglesia, Leite, Mendoza, Salinas y Varela (2000), Nendaz, Gut, Perrier, Simonet, Blondon, Herrmann, Junod, y Vu (2006), Díaz y Fuente (2007), Díaz, De la Fuente y Batanero (2012), Villarroel, Dos Santos e Hinojosa (2014), entre otros. En sus investigaciones indican que este tema no es sencillo, pero necesario en la formación del médico, pues les permite tomar decisiones en proceso de incertidumbre, incorporando cambios de creencias sobre sucesos aleatorios, a medida que se adquieren nueva información. También resaltan la existencia de intuiciones erróneas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión en la aplicación del teorema de Bayes.

1.3. El Teorema de Bayes en la medicina

Investigadores como: Lauritzen y Spiegelhalter (1988), Sahai (1992), Silva y Benavides (2001), Mohan, Srihasam y Sharma (2008), entre otros, resaltan la aplicabilidad del teorema de Bayes en los diferentes campos de la medicina. Apuntan que en diferentes centros de investigación se trabaja de forma intensa en esta temática, pero sus resultados no llegan a la formación del futuro médico, para mejorar la formación del profesional en este campo.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta los sustentos teóricos del trabajo, comenzando por abordar los fundamentos filosóficos y psicológicos, a continuación, se brindan los elementos de la teoría de la resolución de problemas, los referentes sobre la Medicina Basada en la Evidencia y por último el teorema de Bayes.

2.1. Fundamentos filosóficos y psicológicos

Con respecto a los fundamentos filosóficos se asume las posturas de Lakatos (1978), Davis y Hersh (1988). Lakatos, en su Libro "Pruebas y refutaciones" presenta un intercambio de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y su alumno. Donde demuestra que la actividad matemática se puede construir a partir de un problema y una conjetura. Los autores se centran en las diversas formas en las que se adquiere el conocimiento matemático, afirmando que en cada instante el estado de las experiencias es el resultado de motivaciones e intereses del individuo, así como de las interpretaciones y posibilidades de las matemáticas que conoce en ese instante. Por medio de la experiencia matemática se llega a una "matemática ideal", a través de un trabajo en comunidad donde exista intercambio de ideas llegando a un aprendizaje más productivo.

Con relación a los fundamentos psicológicos se asume la teoría de Piaget, donde se considera que para la construcción del conocimiento es necesario tener en cuenta los siguientes conceptos básicos: esquema, estructura, organización, adaptación, asimilación, acomodación y equilibrio.

2.2. Resolución de problemas

La definición de problema ha sido abordada por diferentes investigadores, entre los que se destacan Pólya (1965), Rohn (1984), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Ballester, S. y otros. (1992), Campistrous y Rizo (1996), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros. Se asume la dada por por Campistrous y Rizo (1996), ellos aducen que un problema es "… *toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo*."[12]. También se abordan las características que tipifican a cada una de las definiciones de problemas, se asume una definición acerca de resolución de problemas y problemas retadores. En el trabajo con la resolución de problemas, varios son los autores que han aportado estrategias o fases, entre los que se tienen Pólya (1945), Schoenfeld (1985), Blanco, (1996), entre otros. En esta tesis se asume el modelo propuesto por Schoenfeld (1985), pues este permite un trabajo cooperado, donde los estudiantes intercambien y socialicen sus conocimientos, lo cual es propicio y favorece la enseñanza de la medicina en la actualidad. Este modelo tiene las siguientes fases: analizar y comprender el problema, diseñar y planificar una solución, explorar soluciones, y verificar la solución.

En cada una de estas fases el docente debe considerar ciertas preguntas heurísticas, que lleven a la resolución del problema y apropiación del contenido, a través del método heurístico, al ser utilizado en las tablas de contingencias. El método heurístico es aquel "… mediante el cual se les plantean a los alumnos preguntas que facilitan la búsqueda independiente de problemas y soluciones de estos, donde el maestro no le informa al alumno los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes de forma independiente"[13]. La utilización de este método es necesario en el desarrollo de los cinco talleres. Las preguntas heurísticas tienen un rol significativo en la resolución de problemas, pues permite desarrollar los procesos en las tablas de contingencias. Las posiciones asumidas sobre la teoría de la resolución de problemas se imbrican al aprendizaje basado en problema (ABP), el cual tiene significativa aplicabilidad en las diferentes escuelas de medicina del mundo.

2.3. Medicina Basada en Evidencia

Maestre, Ocampo, Useche, y Trout (2012), afirman que la medicina basada en evidencia (MBE) es un instrumento que utiliza el conocimiento científico aprobado, que dan las investigaciones clínicas, para conseguir los mejores resultados en los pacientes y esta contribuye con la autoformación médica. La MBE requiere la integración rigurosa de las mejores evidencias clínicas externas posibles, obtenidas a partir de la investigación sistemática, lo que se refleja en la exactitud y precisión de los métodos de diagnóstico. Esta conlleva a la eficiencia y seguridad de los procedimientos terapéuticos a seguir, por esto la práctica de la MBE lo que invalida son las pruebas diagnósticas y estrategias terapéuticas previamente aceptadas y las sustituye por nuevas prácticas más exactas, eficaces y seguras.

2.4. Probabilidad Subjetiva

Esta postura de la probabilidad, surgió por inconsistencias en las aplicaciones de la definición frecuencial de la probabilidad, se ha desarrollo por las contribuciones de Finetti y Savage[14]. En esta concepción la probabilidad es una medida de la certidumbre personal acerca de la plausibilidad de un resultado aleatorio, en ella se asume el grado de creencia o de certeza que tiene una persona acerca de la ocurrencia de un suceso. La asignación de la probabilidad se determina por un juicio personal sobre la posibilidad de que el suceso ocurra.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe los elementos que justifican el paradigma de la investigación, se valora el alcance del estudio y se hace

[12] Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Pueblo y Educación. p. 21.

[13] Ballester, S. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 225.

[14] Gregoria M y Morales A. (1995); *Teoría de la probabilidad: Fundamentos, Evolución y Determinación de Probabilidades*; Tesis Doctoral no publicada; Universidad de Complutense de Madrid.

referencia a la población y la muestra. La investigación es cualitativa, con un enfoque de investigación acción, donde se plantean los diferentes métodos teóricos y empíricos que se utilizan, para alcanzar los resultados deseados. Por las características del trabajo los métodos estadísticos matemáticos juegan un papel significativo en el análisis y obtención de los resultados.

4. MODELO DIDÁCTICO

En este capítulo se presenta un diagnóstico inicial, se abordan los referentes de los modelos didácticos, se explicita el modelo didáctico para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes y por último se explica la propuesta didáctica.

4.1. Diagnóstico de la situación inicial

El diagnóstico tiene como finalidad conocer el estado actual del proceso de enseñanza aprendizaje de la Bioestadística, en particular del Teorema de Bayes y sus aplicaciones en el campo de la medicina, para esto se realizó un estudio con estudiantes y docentes que imparten el curso de Bioestadística en facultades de medicina. Primeramente se realiza una evaluación de conocimientos grupo control para determinar las falencias que presentan los estudiantes. Segundo se aplica una encuesta de actitud de los estudiantes de medicina hacia la estadística, al finalizar el tema del teorema de Bayes, donde se determinó que los estudiantes mantienen una actitud negativa hacia la utilidad de este teorema.

A continuación se realiza una encuesta a docentes universitarios, que impartan el curso de Bioestadística en las facultades de medicina, para conocer sus criterios del aporte del teorema de Bayes para la formación del futuro médico.

4.2. Fundamentos de los modelos didácticos

Diferentes autores aportan en sus estudios definiciones de modelo didácticos: Sigarreta (2001), Escalona (2007), entre otros. Escalona (2007) aduce que: "… *un modelo didáctico es una abstracción del proceso de enseñanza-aprendizaje, o parte de este, que fundamentado teóricamente permite interpretarlo y establecer nuevas relaciones en función de lograr perfeccionar dicho proceso*"[15]. Esta definición de modelo didáctico es la que se asume en esta tesis, que se dirige al proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes.

4.3. Modelo Didáctico para la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes

El modelo didáctico (Esquema 1) consta de tres fases fundamentales interrelacionados entre sí. Cada una de las fases posee sus respectivos componentes. El gráfico que se muestra en el Gráfico 1 es una representación que sirve para ilustrar las fases, componentes, cualidades y relaciones esenciales del modelo. A continuación, se explican cada una de ellas junto a sus componentes.

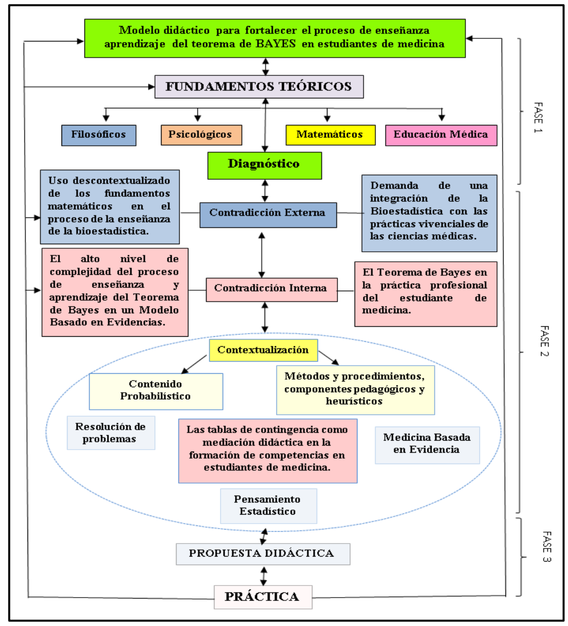


Gráfico 1. Esquema del modelo didáctico

4.3.1. Fase 1. Fundamentos y diagnóstico del modelo didáctico

La fase 1 tiene tres momentos: referentes teóricos, contradicción externa y diagnóstico permanente. Esta fase constituye la base del modelo y es contentiva de la problemática a investigar. La superposición de estos momentos es fundamental para la generación de la nueva cualidad deseada en el modelo.

Los referentes teóricos son los fundamentos científicos en que se basa este modelo, los cuales son los siguientes: psicológico, filosófico, matemático (Teorema de Bayes), didáctico (Resolución de problemas), educación médica (Medicina basada en evidencia y en el aprendizaje basado en problema).

El momento del diagnóstico, recogido en el epígrafe señalado, permite conocer cómo se reflejan en la práctica médica, las tendencias teóricas valoradas. El resultado de las acciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado, permiten determinar la contradicción en su manifestación externa entre el uso descontextualizado de los fundamentos matemáticos en el proceso de la enseñanza de la bioestadística y la demanda de una integración de la Bioestadística con las prácticas vivenciales de las ciencias médicas.

4.3.2. Fase 2. Resolución del modelo didáctico

La fase 2 del modelo tiene dos momentos, dirigidos a determinar la contradicción interna y la resolución. La determinación de la contradicción interna, constituye el primer momento. Este proceso se inicia con el planteamiento de la contradicción en su manifestación externa, lo cual es un primer acercamiento, que va profundizándose a través del análisis epistémico valorado en el estado del arte y del diagnóstico realizado a los estudiantes de medicina. Estos aspectos se muestran en la primera fase del modelo. Para determinar la contradicción en su manifestación interna, es necesario precisar los factores que inciden negativamente en la enseñanza-aprendizaje del teorema de Bayes, los cuales pueden resumirse en:

- Pobre desarrollo del dominio de los conceptos previos acerca de la probabilidad, lo que incide negativamente en el análisis correcto de la ocurrencia de un evento.
- Las preguntas heurísticas no activan lo suficiente el pensamiento probabilístico, lo que impide un correcto análisis de la información en las tablas de contingencia.

[15] Escalona, M. (2007). *El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario.* Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero", Holguín. p. 65.

- Los contenidos probabilísticos no tienen un significado y sentido necesario para los estudiantes, por tal motivo no se comprenden en el contexto de la medicina y de sus aplicaciones.
- No se aprovechan todas las posibilidades que ofrecen las probabilidades para la resolución de problemas, a través de la medicina basada en evidencia, lo que impide una visión sobre su utilidad en su desempeño profesional.
- El contenido probabilístico se imparte a través de metodologías tradicionales, donde el estudiante es un simple receptor de conocimiento.
- Es limitado el reconocimiento de un espacio muestral y sus restricciones.
- Los estudiantes presentan dificultades en la apropiación del concepto de probabilidad condicional, lo cual conlleva a confusión entre esta probabilidad y la conjunta.
- Es limitada la resolución de problemas con muestreos, con reemplazamiento, lo que conduce a la no identificación de la característica de un espacio muestral.
- Existen limitaciones en la aplicación del teorema de la suma y la unión de probabilidades, para obtener la solución adecuada a un problema.
- No reconocimiento de la probabilidad inversa de un fenómeno, lo cual limita la comprensión y utilidad del Teorema de Bayes.
- Dificultad en el reconocimiento de la distribución de frecuencias conjuntas y marginales, lo cual implica escasa habilidad en su lectura.

Bajo estas condiciones es posible determinar la contradicción en su manifestación interna, tiene lugar en la relación entre los métodos de enseñanza que no logran articular el valor de las evidencias, la utilidad del Teorema de Bayes y el papel del pensamiento estadístico, y los resultados del aprendizaje donde los estudiantes de medicina no se apropian de forma significativa del conocimiento, no reconocen la importancia y utilidad de dicho contenido y carecen de herramientas y habilidades para su uso oportuno.

El alto nivel de complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje del teorema de Bayes en un Modelo Basado en Evidencia y su aplicación en la práctica profesional del estudiante de medicina, son contrarios dialécticos porque se oponen y presuponen. Se oponen entre sí como lados de la contradicción por presentar diferente naturaleza, el primero es de naturaleza psicológica y el segundo es de naturaleza metodológica[16]. Se presuponen porque el sistema desaparece por la ausencia de uno de ellos. La oposición entre los mismos genera el desarrollo, la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje del teorema de Bayes en un Modelo Basado en Evidencia se refleja en el desarrollo de la práctica profesional del estudiante de medicina. La aplicación del Teorema de Bayes en la práctica profesional del estudiante de medicina desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje del Teorema de Bayes en un Modelo Basado en Evidencia, creándose una espiral que lleva la contradicción hacia niveles superiores.

El segundo momento de esta fase dos, lo constituye la resolución, la cual presenta los siguientes componentes: contenido probabilístico, métodos y procedimientos, componentes pedagógicos y heurísticos, resolución de problemas, medicina basada en evidencia, y pensamiento estadístico. A continuación, se explican cada uno de ellos, sus funciones y las relaciones que se establecen entre estos.

4.3.2.1. Contenido probabilístico

El contenido es la parte de la cultura que debe ser objeto de asimilación por los alumnos, en el aprendizaje, para alcanzar los objetivos propuestos. Es necesario destacar que el "qué" determina el "cómo", por tal motivo el contenido es un importante componente del proceso de enseñanza y aprendizaje, y por tanto una categoría de la didáctica. Por contenido se entiende el sistema de conocimientos, habilidades y hábitos, relaciones con el mundo y también aquellas experiencias de la actividad creadora (Álvarez de Zayas, 1994).

El contenido probabilístico se refiere a toda la teoría de la probabilidad que permite determinar la ocurrencia de un fenómeno dentro de un contexto dado, donde se tiene en cuenta las leyes matemáticas, así como los procedimientos, hábitos y habilidades que permiten operar con ese conocimiento. Este contenido es importante durante el proceso de formación del estudiante de medicina. Su función se dirige a orientar el desarrollo del pensamiento estadístico, y su contextualización a situaciones de la vida cotidiana en su desempeño profesional, así como a la interpretación y comprensión de la literatura científica médica, para lograr una adecuada formación del estudiante de medicina.

El trabajo con el contenido probabilístico se dirige al desarrollo de las habilidades comunicativas, resolución de problemas y razonamiento matemático. También se incluyen habilidades que son necesarias, como condiciones previas para la utilización de métodos y procedimientos, como por ejemplo la lectura e interpretación de tablas.

Para lograr un adecuado desempeño profesional en los estudiantes de medicina, consciente de la aplicabilidad del Teorema de Bayes, es necesario un robusto aprendizaje del contenido probabilístico, donde se refleje el trabajo heurístico con las tablas de contingencia. Es imprescindible y natural que lo heurístico salga a relucir, pues la solución al problema en su manifestación interna debe orientarse hacia el perfeccionamiento del método de enseñanza, esto conlleva a transformar primero la práctica profesional del docente para que consecuentemente mejore el aprendizaje de los estudiantes. Para cumplimentar lo antes planteado es importante que el profesor emplee los métodos y procedimientos.

4.3.2.2. Métodos y procedimientos

Los métodos constituyen sistema de acciones, donde se regula la actividad del profesor y de los estudiantes para lograr los objetivos, y en estrecha relación con la atención de los intereses, motivaciones y características particulares de los estudiantes (Zilberstein, et al., 2003). Según Sriraman y English (2010) los docentes hacen uso y son conscientes de los métodos que son reconocidos como válidos en la comunidad y precisa que los estudiantes necesitan que se le enseñen esos métodos.

Desde un proceso de enseñanza-aprendizaje del teorema de Bayes significativo, se requiere del uso de métodos donde los estudiantes puedan observar, realizar experimentos y actividades demostrativas con datos del contexto médico. Además, deben plantear hipótesis y contrastarla con los resultados obtenidos en la resolución del problema; de forma tal que logren elaborar conclusiones de la aplicabilidad de este teorema en la práctica, para mejorar su desempeño profesional. Su función, es determinar los métodos y procedimientos, para lograr un proceso enseñanza-aprendizaje significativo del Teorema de Bayes, además de estimular y desarrollar los procesos lógicos del pensamiento estadístico. Los métodos y procedimientos dinamizan al contenido geométrico, a la resolución de problemas, a la medicina basada en evidencia y desarrollan el

[16] García, M. y Nápoles, J. (2015). A dialectical invariant for research in mathematics education. *The Mathematics Enthusiast*. Volume 12, Numbers 1, 2, & 3. Article 33. Recuperable el 3 de diciembre de 2015 de la URL: http://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1358&context=tme

pensamiento estadístico y, a la vez, dichos componentes perfeccionan y enriquecen su aplicación. Los métodos y procedimientos propician:

- Dominio del contenido probabilístico, pues permite la búsqueda, la experimentación, transformación y su contextualización al ámbito de la medicina basada en evidencia, para contribuir a su solidez y generalización. Por su parte contenido probabilístico, necesita de los métodos y procedimientos, para ofrecerles una adecuada orientación a los estudiantes. La relación contenido probabilístico y resolución de problemas está mediada por los métodos y procedimientos.
- Desarrolla y estimula el pensamiento estadístico, pues este propicia experimentar, formular y reformular hipótesis para ofrecer un mejor diagnóstico, lo cual conduce a descubrir y/o redescubrir conceptos, para adquirir competencia en la toma decisiones.
- Estimula y desarrolla la resolución de problemas, pues la utilización de métodos y procedimientos propicia la independencia en la resolución de problemas, logrando que el estudiante posea un papel activo, para construir su propio conocimiento. En este proceso el estudiante es un agente transformador, capaz de resolver problemas contextualizados, donde utilice la mejor información científica del ámbito médico, para lograr sus metas y un adecuado desempeño profesional.
- Contribuye a la aplicabilidad de la medicina basada en evidencia, pues favorece el uso racional, explícito y actualizado de los mejores datos aplicados a un tratamiento médico, para favorecer la búsqueda del contenido probabilístico. Por otra parte, la medicina basada en evidencia sirve de apoyo a los métodos y procedimientos, pues propicia que los estudiantes se apropien de los contenidos probabilístico.

En la tesis se utilizan métodos que promueven la actividad productiva de los estudiantes. Cai (2003) y Goldin (2004) aducen que es importante conocer qué tipos de pensamiento surgen en el proceso de resolución de problemas, que puedan ser evocado naturalmente, además consideran necesario determinar las capacidades deseadas para el desarrollo del razonamiento matemático, que le permiten al estudiante ser flexible y ofrecer solución a problemas interesantes. Estas concepciones de Cai (2003) y Goldin (2004), se logran con métodos que propician la intervención directa de los estudiantes en la elaboración del conocimiento. El método heurístico se encamina a estos fines (Pólya 1965, Ballester y otros 1992, Schoenfeld 1994, Cai (2003), Goldin (2004), entre otros) y a su aplicación.

Este método se dirige a conducir al estudiante hacia la búsqueda del contenido probabilístico en el ámbito de la medicina. Con la implementación de este método se estimula en los estudiantes su reflexión sobre la aplicabilidad del teorema de Bayes en la medicina, además de orientarle para que indague, investigue y llegue a conclusiones a través de preguntas heurísticas, que el docente debe elaborarla con claridad y en correspondencia con el objetivo de la actividad.

Entre métodos y procedimientos existe una relación dialéctica, donde es necesario considerar algunos aspectos, entre ellos: el objetivo de la clase y las características de los estudiantes, pues esto propicia que en un momento dado un procedimiento pueda convertirse en método y viceversa (Zilberstein 2004, Sriraman y English 2010). Entre estos procedimientos figuran los heurísticos, que pueden utilizarse para lograr aprendizaje de los contenidos probabilísticos y la independencia del pensamiento estadístico. Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias.

Los procedimientos heurísticos constituyen recursos mentales para la búsqueda del conocimiento probabilístico, que se dirigen a orientar y obtener la vía de solución durante el proceso de resolución de problemas, particularmente en el contexto de la medicina. La utilización de estos procedimientos propicia que los estudiantes se apropiación de conocimientos, destrezas, capacidades intelectuales y habilidades en la extracción de información de las tablas de contingencias, y la puedan emplear en la solución de problemas prácticos o en la toma de decisiones.

4.3.2.3. Resolución de problemas

Un problema es una situación en la que existe un planteamiento inicial, donde se plantea una exigencia que obliga a transformarlo, para la cual no se vislumbra un camino aparente y obvio que conduzca a la solución (Pólya 1965, Schoenfeld 1985, Campistrous y Rizo 1996, Sriraman y English 2010, Pochulu y Rodríguez 2012). Los problemas que se proponen esta dirigidos a lograr que el estudiante participe, construya, descubra y redescubra el conocimiento probabilístico, y comprenda las aplicaciones del Teorema de Bayes en la práctica médica, donde desarrolle un pensamiento crítico y creativo, a través del trabajo tanto individual como en colectivo.

La función de este componente radica en construir y apropiarse de los nuevos conocimientos probabilísticos, que permitan desarrollar una enseñanza-aprendizaje del teorema de Bayes y de sus aplicaciones efectiva, de forma tal que los contenidos perduren en los estudiantes, siendo capaces de aplicarlos en su desempeño profesional. En el proceso de resolución de problemas es necesario el trabajo con la heurística, pues este propicia una mayor comprensión de los problemas.

La heurística aplicada al contenido probabilístico del ámbito de la Bioestadística tiene como objetivo buscar las reglas y métodos que llevan a la interpretación, reinterpretación y a los redescubrimientos de los nuevos contenidos, a través de la elaboración de principios, reglas, estrategias y de las fases de la resolución de problemas, que en su conjunto propician la búsqueda de vías de soluciones de los problemas en el contexto de la medicina. El proceso de la resolución de problema, donde se hace uso de la heurística y del trabajo con las tablas de contingencias, propicia en el estudiante la independencia y el desarrollo de habilidades para resolver problemas contextualizados al ámbito de la medicina, relacionados con el Teorema de Bayes. Este proceso conduce al desarrollo del pensamiento estadístico. La resolución de problemas contextualizados a la medicina, posee para los estudiantes ciertas ventajas que repercuten en su desempeño profesional, ellas son:

- La interacción con datos reales de su contexto.
- La participación activa del estudiante en la obtención del conocimiento probabilístico.
- La posibilidad de crear espacios de interacción que propician observar, discutir, reflexionar, medir sus conocimientos, plantear hipótesis de solución, que permiten la construcción del conocimiento robusto sobre el contenido probabilístico y el desarrollo del pensamiento estadístico.
- Desarrolla la capacidad de extraer información significativa, que le permita tomar las mejores decisiones en su desempeño profesional.

La resolución de problemas toma la información que brinda la medicina basada en evidencia, este último constituye el próximo componente de la fase de resolución.

4.3.2.4. Medicina basada en evidencia

La medicina basada en evidencia es un instrumento que utiliza el conocimiento científico que ofrecen las últimas investigaciones clínicas para conseguir los mejores resultados en los pacientes. Su función es dotar al médico de herramientas que le permitan tomar las mejores decisiones dentro de los estudios clínicos. La medicina basada en evidencia tiene su incidencia sobre cada uno de los componentes del momento de resolución:

- A la resolución de problemas le aporta información actualizada, donde se propicia el uso de los recursos heurísticos, lo cual permite una mejor comprensión del problema sobre la base de datos reales.
- Por su naturaleza propicia el desarrollo del pensamiento estadístico.
- Facilita ver la utilidad de los contenidos probabilísticos, en particular de sus conceptos dentro de contextos reales a la práctica médica.
- A través de su información propicia que los estudiantes sean capaces proponer métodos y procedimientos adecuados para la resolución de problemas.

4.2.3.5. Pensamiento estadístico

Se entiende por pensamiento estadístico la capacidad que tiene el individuo para tomar decisiones a través de los datos obtenidos en una investigación y en procesos de incertidumbre. Este pensamiento se basa en el dominio de los conceptos básicos, proposiciones, procedimientos estadísticos y además de habilidades para el trabajo con datos, que les permita predecir hechos o comportamientos basados en situaciones conocidas.

El dominio del contenido estadístico, en particular el teorema de Bayes, contribuye a mejorar los procesos de razonamiento estadístico. Su función es desarrollar a un nivel superior el contenido estadístico, mejorar los niveles de intuición y los procesos de análisis, para facilitar la resolución de problemas del ámbito de la medicina en su vida estudiantil y profesional.

El razonamiento estadístico propicia un análisis y una síntesis de lo que este proporciona; pero también es abstracción y generalización, obtenida de ellos. Los resultados del razonamiento estadístico (conceptos básicos, definiciones, proposiciones, teoremas, fórmulas y habilidades) se incorporan al proceso del pensar, producto de este proceso se enriquece y se desarrolla este pensamiento a otro nivel de complejidad. Este proceso tiene forma de espiral y propicia que el estudiante pueda llegar a generalizaciones cada vez más complejas, en la medida que es capaz de revelar relaciones y conexiones del contenido estadístico, con un mayor nivel de profundidad.

El razonamiento estadístico desarrolla la capacidad de tomar decisiones frente a situaciones que presentan algún tipo de incertidumbre. Un ejemplo lo constituye cuando el médico tiene que tomar una decisión de un tratamiento frente a un paciente donde la prueba diagnóstica es positiva.

El docente debe actuar en función de generar y organizar problemas en el contexto de la medicina, que permitan a los estudiantes aprender a pensar, y de esta forma contribuir al desarrollo del razonamiento estadístico. Desarrollar este pensamiento propicio generar condiciones que favorezcan en los estudiantes conjeturar y predecir, donde posean la posibilidad de descubrir conceptos, definiciones, proposiciones y fórmulas de las probabilidades, y sus aplicaciones al ámbito de la medicina, para lograr un adecuado desempeño profesional. Esto conlleva a un contenido probabilístico con un mayor nivel de complejidad.

Un nuevo enfoque propicia desarrollo en los estudiantes de medicina cuando se logra motivarlos para que puedan profundizar en los contenidos probabilísticos necesarios para su desempeño profesional. En este proceso se debe lograr que sean capaces de llegar a niveles cada vez más elevados en el dominio de los conceptos, proposiciones y teoremas, para propiciar el desarrollo de un razonamiento estadístico reflexivo y crítico, respecto al contenido probabilístico y su aplicabilidad al contexto de la medicina, mediante la resolución de problemas.

La relación esencial sistémica entre los componentes de la fase de resolución se concreta en lo antes planteado. En esta relación se origina la formación de la nueva cualidad: las tablas de contingencia como mediación didáctica en la formación de competencias en estudiantes de medicina, resolviéndose de esta manera el problema que genera la investigación. El sistema, al entrar en acción, dinamiza la contradicción y potencia su desarrollo. La contradicción, no desaparece, ella se desenvuelve, a través de un movimiento en espiral, donde en cada espira, los contrarios se oponen en un plano superior. La Fase 3 está formada por la propuesta didáctica y su implementación.

Relaciones esenciales del modelo

Las relaciones constituyen la esencia de este modelo, lo caracterizan y lo tipifican. Dichas relaciones presentan niveles cada vez más profundos de esencialidad. En el modelo se presentan cuatro grandes relaciones.

- La primera relación está dada por las categorías que constituyen los fundamentos teóricos del modelo. Estas categorías constituyen las bases para el modelo y en su conjunto determinan una relación sistémica que caracterizan y tipifican el modelo didáctico.
- La segunda relación se presenta entre los dos lados de la contradicción externa como resultado del diagnóstico. Se precisa que la contradicción externa es una consecuencia natural del diagnóstico.
- La tercera relación se presenta entre los dos polos de la contradicción interna. Expresa pares dialecticos entre un mismo plano, que en su conjunto dinamizan el modelo didáctico.
- La cuarta relación se manifiesta entre los componentes del momento de resolución, pues en su interrelación forman la nueva cualidad, resolviendo la contradicción. Esta nueva cualidad refleja a las tablas de contingencia como mediación didáctica en la formación de competencias en estudiantes de medicina.

4.4. Propuesta de didáctica

La propuesta didáctica pretende relacionar e integrar cada uno de los conceptos básicos de probabilidad de forma tal que escalonadamente consoliden el conocimiento de las nociones básicas de la disciplina y creen las condiciones para una comprensión efectiva de Teorema de Bayes y de la Probabilidad Total. Esta propuesta se basa en la importancia de la definición de probabilidad condicional dentro del proceso de demostración del Teorema de Bayes. Para lograr estos objetivos se propone utilizar las tablas de contingencia como un modelo pedagógico para comprender las relaciones entre sucesos y las diferentes propiedades de la probabilidad; este modelo se estructura sobre la base de una red conceptual que surge en el proceso de investigación de esta tesis (Gráfico 2), en la que diferentes temas van constituyendo una red heurística que escalonadamente, según la secuencia metodológica que une los diferentes contenidos, va propiciando el logro de los objetivos planteados anteriormente.

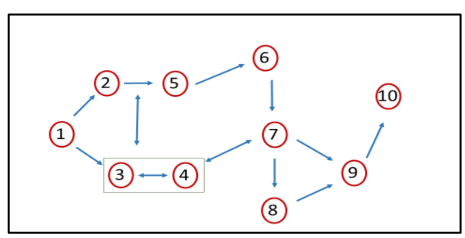


Grafico 2. Integración de los diferentes conceptos para el desarrollo del modelo didáctico.

En la Tabla 1 se muestra la continuación la demostración del teorema de Bayes utilizando las tablas de contingencia.

Tabla 1. Esquema de cálculos reproduce la demostración del teorema Bayes.

	$P(B/A_1)$	$P(B/A_2)$.	$P(B/A_3)$	……		(1)
$P(\Omega) = 1$	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	……		(2)
Ω	A_1	A_2	A_3	…….		(3)
B	$B \cap A_1$	$B \cap A_2$	$B \cap A_3$	…….		(4)
P(B) =	$P(B \cap A_1)$	$P(B \cap A_2)$	$P(B \cap A_3)$	……	Suma de la fila	(5)
P(B) =					*(2)	(6)
$P(A_i/B)$					(6)/suma de (6)	(7)

5. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se realiza un análisis de los resultados del sistema de actividades para favorecer la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes. Los resultados se valoran desde el punto de vista cuantitativo, donde se muestra desde lo cualitativo los diferentes elementos que avalan esos resultados, a través de un estudio descriptivo. También se ofrece una comparación entre el grupo control y el experimental, mediante la diferencia de proporciones para determinar si hubo cambios significativos.

5.1. Análisis de los resultados del sistema de actividades para favorecer la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes

En este capítulo se describió la implementación y la evaluación de 6 talleres de enseñanza (Tablas de Contingencia, Probabilidad I, Probabilidad II, Independencia, Teorema de Bayes, Teorema de Bayes II), los cuales conforman la propuesta didáctica, que se sustenta en el modelo didáctico, para facilitar la enseñanza del Teorema de Bayes.

En la propuesta didáctica se evidencia, que el uso competente de los conceptos relacionados con la concepción frecuentista de la probabilidad, es de gran utilidad para una proporción significativa de estudiantes, pues superan las dificultades para valorar la importancia del tamaño de la muestra a la hora de estimar la probabilidad de un suceso. En este proceso asumen de manera reflexiva la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio y adquieren con propiedad el concepto de independencia probabilística.

Como resultado de implementación de la propuesta didáctica se resalta: primero, que los estudiantes utilizan sus propias deficiencias para crear un nuevo conocimiento probabilístico, esto se observó cuando se enfrentaban a un problema, que les permitía proporcionar nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones con el grupo relacionadas con el tema, lo que conlleva a un nivel superior en el pensamiento probabilístico.

El segundo aspecto a resaltar es el desarrollo que presentan los estudiantes en el manejo del vocabulario técnico de la estadística, lo que permite una mejor comprensión de los conceptos trabajados en cada uno de los talleres.

El tercer aspecto, es la capacidad que desarrollaron los estudiantes para extraer información de tablas de contingencia, para dar solución a los problemas planteados.

El cuarto aspecto, es la articulación de los diferentes conceptos probabilísticos que llevaron al estudiante de una forma natural a construir el concepto de probabilidad subjetiva y condicional, que permitieron comprender el uso del teorema de Bayes.

Los resultados indican que la metodología propuesta para la enseñanza contribuye también a generar actitudes positivas hacia la probabilidad como marco útil para resolver problemas y proporcionar a los estudiantes una visión más ajustada del proceso de construcción de un marco teórico científico.

CONCLUSIONES

El transcurso de la investigación, sobre el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes, en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño, permitió comprobar la hipótesis de la tesis y ofrecer una respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos propician destacar algunos elementos que resultan esenciales en éste trabajo, ellos son:

El proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística en la formación médica ha sido investigado por Fernández (1996), Leung (2002), Indrayan (1996), Hogg (1992), Hassad (2009), Fmiles y otros (2010), Espindola y otros (2013), entre otros. Estos autores realizan estudios sobre la importancia de la enseñanza de la estadística, identificando los obstáculos cognitivos que presentan los estudiantes, proponiendo modelos, metodologías y estrategias didácticas, para hacer la estadística más asequible a los estudiantes. También como resultado del análisis que arrojan estas investigaciones, se puede concluir, que la presentación realizada de los conceptos estadísticos es descontextualizada, lo que implica que no haya una motivación por parte de los estudiantes y que la actitud de estos, no sea positiva, lo cual conduce a que no se presente una disposición a aprender y a valorar la estadística como una herramienta fundamental en su formación profesional.

La importancia de la enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes en la formación médica ha tenido relevancia para autores como: Nendaz y otros (2006), Nease y Owens (1997), Díaz, De la Fuente y Batanero (2012), entre otros. Como resultado de estas investigaciones, se puede determinar que la enseñanza de la estadística bayesiana es limitada en las escuelas de medicina. Todo esto indica la necesidad de replantear la enseñanza del Teorema de Bayes, donde se utilicen problemas retadores y en contexto, que lleven al estudiante a tener conflictos cognitivos, que le permitan tomar las mejores decisiones. A demás los autores que se destacan en el estado del arte, indican la existencia de intuiciones erróneas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión en la aplicación del Teorema de Bayes, y que su enseñanza no es en ocasiones lo suficientemente amplia, como para superar los obstáculos que presentan, con la propuesta del modelo y la estrategia didáctica en esta tesis, se demostró que estos obstáculos son superados por los estudiantes, lo que conlleva a un cabio de actitud de estos estadística.

Los fundamentos filosóficos para el desarrollo de esta tesis se sustentan en los trabajos de Lakatos (1978), Davis y Hersh (1988). Donde se parte de la posición de Lakatos, en el que demuestra que la actividad matemática se puede construir a partir de un problema y una conjetura. Por su parte Davis y Hersh se refieren a desarrollar una reconstrucción de la matemática, a través de la necesidad histórica.

En lo psicológico se consideran la posición de Piaget, que parte de un pensamiento formal, el cual está presente en la población de estudio de esta investigación, donde se pueden realizar proceso de pensamiento de adaptación, asimilación, acomodación llegando a un equilibrio cognitivo.

En la investigación se asumió la teoría de la resolución de problemas dada por Schoenfeld (1985), en particular las fases para su resolución. Con respecto a la heurística se consideran los elementos planteados por Polya (1965), Ballester y otros (1992), los cuales aportan que los recursos heurísticos están dados por: medios auxiliares heurísticos, procedimientos heurísticos y el programa heurístico general. En el desarrollo de la propuesta didáctica se da relevancia a la utilización del método heurístico, pues se plantea a los estudiantes preguntas que facilitan la búsqueda independiente de la solución de los problemas, lo que les permite construir su propio conocimiento y así llegar una robustez de los conceptos probabilísticos.

Con la investigación se logra realizar un cambio en la actitud de los estudiantes hacia la estadística, pues como se evidenció dentro del estado del arte, los estudiantes no le ven importancia a esta ciencia en su desarrollo profesional. Un aspecto esencial para el cambio de esta mentalidad por parte del estudiante es la Medicina Basada en Evidencia (MBE), ya que por medio de esta se resalta la importancia de la estadística en la investigación médica. En la tesis se toma la MBE como referencia para la elaboración de los problemas planteados en los talleres, lo cual conlleva a que el estudiante evidencie la aplicabilidad de cada uno de los conceptos probabilísticos, para desarrollar un aprendizaje significativo y robusto. Estos resultados se constataron a través de la encuesta de percepción realizada al finalizar la intervención.

La tesis es de tipo cualitativo, con un enfoque de acción participativa, con algunos elementos cuantitativos, para la realización de los análisis de los resultados obtenidos en las dos etapas del proceso investigación. En los resultados finales se realizó una comparación de las pruebas iniciales de la primera etapa y final de la segunda etapa, mediante el cálculo de intervalo de confianza para la diferencia de proporciones y se analizaron los cambios en cada uno de los intervalos. En este proceso se observó, que en cada uno de los conceptos probabilísticos y el manejo del Teorema de Bayes hubo un cambio significativo, lo que indica que la propuesta didáctica sustentada en el modelo posibilitó un dominio del contenido en los estudiantes, pues relaciono e íntegro los conceptos probabilísticos de forma tal que se construyeron redes conceptuales que permitieron la compresión del Teorema de Bayes y de la probabilidad total.

El diagnóstico de la situación inicial se estructuro en la evaluación de los conocimientos a un grupo control, en determinar la actitud de los estudiantes de medicina hacia la estadística y en conocer los criterios de los docentes universitarios que imparten el curso de Bioestadística en las facultades de medicina. La triangulación de estos métodos permitió constatar que:

- La necesidad de crear metodologías necesarias para mejorar la compresión de los conceptos probabilísticos, donde se generen competencias en la lectura de tablas conjuntas, que serán necesarias en la comunicación científica de los futuros médicos.
- Es una necesidad mejorar la actitud negativa que mantienen los estudiantes hacia la estadística, a través de la utilidad del teorema de Bayes, en la formación del futuro médico.
- La necesidad de mejorar la percepción de los docentes que imparten el curso de Bioestadística, pues muchos desconocen la utilidad que puede tener el Teorema de Bayes en la formación del futuro médico, así como en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.

Se presenta un modelo didáctico consta de tres fases interrelacionados entre sí. En la fase 1 se presentan los fundamentos teóricos del modelo, el diagnóstico y la contradicción externa. En la fase 2 se hace referencia a la contradicción interna y al momento de resolución, el cual constituye la esencia del modelo, donde se posibilita la solución de la contradicción y de la problemática inicial. En la fase 3 se explicita la propuesta didáctica y su implementación. El modelo didáctico tiene su salida en la práctica, a través de una propuesta didáctica, que se basa en interrelacionar los conceptos esenciales de probabilidad y de la definición de probabilidad condicional, para permitir la integración de redes conceptuales que facilitan las condiciones para el conocimiento del Teorema de Bayes y de la probabilidad Total.

El estudio de los resultados obtenidos a partir de los talleres revela el carácter multidimensional de las diferentes heurísticas utilizadas por los estudiantes en la solución de los problemas. Cada una de las estrategias propuestas, ha permitido evaluar los diferentes componentes de la probabilidad, encontrando respuestas que permiten, observar los avances de los estudiantes y cómo iban construyendo las redes conceptuales, que los llevaban a ir relacionado los diferentes contenidos para elaborar la demostración del Teorema de Bayes y la probabilidad Total. A partir de estos resultados se ha podido determinar algunos obstáculos que presentaron los estudiantes y como los mismos problemas le permitían superarlos, una de las características de la metodología basada en problemas.

En el desarrollo de los talleres los estudiantes reconocieron las ventajas de utilizar las tablas de contingencia (La cual deviene en un método de trabajo), porque aumenta su capacidad para el autoaprendizaje y su capacidad crítica para analizar la información que les ofrecían cada uno de los problemas. Este método de las tablas de contingencia les permite, encontrar procedimientos y estrategias convenientes, que los involucren como elementos activos de su propio aprendizaje, esto les permite tener mayor seguridad de los conocimientos adquiridos, lo que eleva el nivel de motivación de los estudiantes, llevándolos a un aprendizaje significativo, principios fundamentales del aprendizaje basado en problemas.

Al comparar los resultados de los estudiantes de los dos grupos estudiados, se encontró que, efectivamente, la propuesta didáctica, sustentada en el modelo didáctico supone una mejora del mismo, no sólo por el aumento en la cantidad de estudiantes que utilizan correctamente el Teorema de Bayes y la probabilidad Total, sino también por el manejo de competencias que relacionan todos los conceptos de probabilidad previos. Sin embargo, esta mejoría no se produce de forma proporcional, pues se muestra que los avances se producían tras la creación de las heurísticas por parte de los estudiantes, lo que permitió un enriquecimiento en los procedimientos, definiciones, los argumentos, el lenguaje utilizado y el uso de propiedades, relacionándolos con problemas asociados.

RECOMENDACIONES

La implementación de la propuesta didáctica sustentada en el modelo didáctico para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje del Teorema de Bayes, en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de las aplicaciones a las Pruebas de Diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Profundizar en la aplicación de la propuesta didáctica a otras temáticas de la Bioestadística, como son los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis, en la escuela de medicina.
- Motivar a los estudiantes de medicina por el estudio de la Bioestadística, en particular por la aplicación del teorema de Bayes dentro de la medicina basada en evidencia.

PUBLICACIONES DEL AUTOR.

Pérez, L.; Rojas, O., Monterrey P. La estadística en la formación del médico. *Revista Vidya*, (36)2, 477-490.

Pérez, F.; Monterrey, P. y Rojas, O. (2016). Modelo Didáctico para la Enseñanza del Teorema de Bayes, para Estudiantes de Medicina (en elaboración).

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Álvarez de zayas, C. (1994). *Epistemología de la Pedagogía*. Material en soporte digital. La Habana, Cuba.

Ballester, S. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 225.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada

Batanero, C. y Burrill G. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education.* A joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study

Bayes, T. y Price, R. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Recuperable el 6 de febrero de 2016 en la URL: http://rstl.royalsocietypublishing.org

Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma*, *21*, 11-20.

Butler, R. (1998). On the failure of the widespread use of statistics. *Amstat News*, No. 251, 84

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving? In F. Lester (Ed.), Research and Issues in Teaching Mathematics Through Problem Solving (pp. 241–254). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics.*

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación. p. 21

Davis, J., Herh, R. (1988). *Experiencia Matemática.* Editorial Labor, Barcelona.

Díaz, C, De la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 18(2),* 75-94.

Díaz, C., De la Fuente, E. y Batanero, C. (2012). Statistical inference and experimental research. Should we revise our educational practices? Libro de resúmenes de ICME-10 (p. 15). Copenhague: *International Comission on Mathematical Instruction*.

Escalona, M. (2007). *El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario*. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero", Holguín. p. 65.

Espíndola, A. y et al. (2013). Caracterización del proceso de evaluación del aprendizaje del contenido estadístico en la carrera de Medicina. *Revista de Humanidades Medicas* [online] 2013, vol.13, n.1. pp. 177-192. Recuperable el 11 de abril de 2014 en la URL: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-81202013000100011&lng=es&nrm=iso>

Fernández, P. (1996). *Elementos básicos en el diseño de un estudio*. Cad Aten Primaria; 3:83-85.

Fmiles, S., Price, M., Swift, L., Shepstone, L. y Leinster, S. (2010). Statistics teaching in medical school: opinions of practising doctors. *BMC Medical Education* 2010; 10(75). Recuperable el 25 de junio de 2014 en la URL: http://www.biomedcentral.com/1472-6920/10/75 [access date 20-06-2014] ondo.

García, M. y Nápoles, J. (2015). A dialectical invariant for research in mathematics education. *The Mathematics Enthusiast. Volume 12,* Numbers 1, 2, & 3. Article 33. Recuperable el 3 de diciembre de 2015 de la URL: http://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1358&context=tme

Garfield, J., Hogg, B., Schau, C. y Whittinghill, D. (2002). First Courses in Statistical Science: The Status of Educational Reform Efforts. *Journal of Statistics Education Volume 10,* Number 2. University of Minnesota, University of Iowa, University of New Mexico. (2002). Recuperable el 12 de abril de 2014 en la URL: www.amstat.org/publications/jse/v10n2/garfield.html

Goldin, G. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (*International Journal on Mathematics Education*), 36(2), 56–60.

Gregoria M y Morales A. (1995); *Teoría de la probabilidad: Fundamentos, Evolución y Determinación de Probabilidades*; Tesis Doctoral no publicada; Universidad de Complutense de Madrid.

Hassad, R. (2009). Reform-Oriented Teaching of Introductory Statistics in the Health, Social and Behavioral Sciences - Historical Context and Rationale. *International Journal of Social Sciences 2009; 4(2):*132-137. Recuperable el 21 de junio de 2014 de la URL: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1007/1007.3207.pdf [access date: 20-06-2014].

Hogg, R. (1992). Report of Workshop on Statistics Education in Heeding the Call for Change, ed. L. Steen, MAA Notes No. 22, Washington: *Mathematical Association of American*, 34-43

Indrayan, A. (1986). Changes needed in style and content of teaching statistics to medical undergraduates. Departament of Statistics, The Ohio State University Columbus, Ohio, U.S.A. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Volume 17,* Issue 1, 1986. Recuperable el 03 de abril de 2014 en la URL: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739860170113#.U6r0G_l5OH4

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Versión Española de Carlos Solis.

Lauritzen, S. y Spiegelhalter D. (1988). Local computations with probabilities or graphical structures and their application to expert systems. *Journal of Royal Statistical Society*, Series B.

Leung, W. (2002). *Why and when do we need medical statistics*?. Student BMJ 2002; 10:227-228.

Maestre, J., Ocampo, C., Useche, N. y Trout, G. (2012). *Medicina basada en la evidencia: revisión del concepto.* Duazary, diciembre de 2012, Vol. 9 Nº 2.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Editorial Paidos.

Mohan, A., Srihasam, K., y Sharma, S, (2008). Diagnostic Reasoning: Approach to Clinical Diagnosis Based on Bayes' Theorem. *Medicine Update*, 2008, Vol. 18, pp. 563– 569.

Molinero, A. (2002). El método bayesiano en la investigación médica. Asociación española contra la hipertensión arterial. Recuperable el 21 de junio de 2014 de la URL: http://www.seh-lelha.org/ bayes1.htm

Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas, en Theoria, Vol.13. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/299/29901314.pdf, pp. 145-157.

Nease, R. y Owens, D. (1997). Use of Influence Diagrams to Structure Medical Decisions. En: *Med Decis Making* 1997; 17: 263-276.

Nendaz, M., et al. (2006). Brief Report: Beyond clinical experience: features of data collection and interpretation that contribute to diagnostic accuracy. *J Gen Intern* Med 2006; 21:1302-1305.

Norman, G. y Streiner, D. (1996). *Bioestadística.* 1 ed. Editorial Mosby/Doyma. Madrid.

Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires, Argentina: Eduvim.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Ciudad México: Editorial Trillas.

Rancich, A. y Candreva, A. (1995). Razonamiento Médico: Factores de problemas como estrategia de Enseñanza – Aprendizaje, Educación Médica Salud Vol 29 No. 3-4, Recuperado el 9 de abril de 2014 en la URL: http://hist.library.paho.org/Spanish/EMS/21763.pdf.

Rohn, K. (1984). Consideraciones acerca de la enseñanza problémica en la enseñanza de la Matemática. En *Boletín Sociedad Cubana de Matemática y Computación*. La Habana.

Rossman, A. y Short, T. (1995). Razonamiento Clínico: Su Déficit Actual y la importancia del aprendizaje de un Método durante la formación de la Competencia Clínica del Futuro Médico. *Journal of Statistics Education* v.3, n.2 (1995). Recuperable el 15 de febrero de 2014 en la URL: http://www.amstat.org/PUBLICATIONS/JSE/v3n2/rossman.html

Sackett, D. y Straus, S. (2001). *Medicina basada en la evidencia*, *cómo practicar y enseñar la MBE*. 2 ed. Editorial Harcourt. Madrid. Sackett, D., Rosenberg, W., Muir, J., Brian, R. y Richardson, W. (1988). Medicina Basada en la Evidencia: Lo qué es y lo qué no. Basado en un editorial de

British Medical Journal. BMJ 1996; 312 (13 enero): 71-2. Recuperable el 5 de noviembre de 2014 en la URL: http://www.infodoctor.org/rafabravo/mbe3.html#definicion

Sackett, D., Rosenberg, W., Muir, J., Brian, R. y Richardson, W. (1996). *Medicina Basada en la Evidencia: Lo qué es y lo qué no.* Basado en un editorial de *British Medical Journal*. BMJ 1996; 312 (13 enero): 71-2. Recuperable el 5 de noviembre de 2014 en la URL: http://www.infodoctor.org/rafabravo/mbe3.html#definicion

Sahai, H. (1992). Teaching Bayes Theorem using Examples in Medical Diagnosis. *Theachin Mathematics and its Applications*, Volume 11 No. 4 1992.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving*, Academic Press.

Schoenfeld, A. (1994). *Reflections on doing and teaching mathematics*. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sigarreta, J. (2001). *Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores*. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Cuba, p. 78

Silva, L. y Benavides, A. (2001). El enfoque bayesiano: otra manera de inferir. *Gac Sanit* 2001; 15: 341, 6.

Snee, R. (1990). "Statistical thinking and its contribution to quality" *The American Statistician, 44,* 116-121.

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Tosleson, D. (1990). New pathways in general medical. The New England *Journal of Medicine*, Massachusett Medical Society.

Villarroel, Dos Santos y Hinojosa (2014). Razonamiento clínico: Su déficit actual y la importancia del aprendizaje de un método durante la formación de la competencia clínica del futuro médico. *Revista Científica de Ciencias Médicas 2014; 17(1)*: 29-36

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67(3),* 223- 265.

Zilberstein, J. (2004). Curso de postgrado: aprendizaje desarrollador. Universidad de Matanzas. Matanzas, Cuba

Zilberstein, J. et al. (2003) Preparación pedagógica integral para profesores universitarios. Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”. La Habana.

MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO
Universidad de Los Llanos, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
beatrizave@gmail.com

JOSE SIGARRETA ALMIRA
Director de Tesis
Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco, México
josemariasigarretaalmira@hotmail.com

OSVALDO ROJAS VELÁZQUEZ
Co Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La enseñanza aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja. Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos.

Esta investigación presenta un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, que imbrica dichas teorías con base en tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen una metodología de carácter dinámico que sigue 4 pasos a saber: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación. Cada una de estas etapas contiene problemas que permiten el acercamiento a los conceptos por aproximaciones sucesivas.

En el mismo sentido la metodología propuesta establece el uso de diferentes tipos de software que facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. La implementación de la metodología sustentada en el modelo didáctico propicia darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento y actuación profesional.

Abstract

Most complex numbers teaching learning is done from purely deductive approaches, in many cases starting with definitions or presenting its content as finished knowledge, withholding from the student the opportunity to build-on and apply the underlying concepts to the complex variable function. This situation is not foreign to the Mathematics and Physics Bachelor’s degree at Universidad de los Llanos.

This research presents an innovative model for teaching learning of the complex variable complex through problem solving, which interlays these theories using three fundamental categories of the teaching-learning process, as proposed by Leontiev in his Activity Theory: Orientation Phase, Execution Phase, and Control Phase. Each one has different moments that constitute a dynamic methodology that follows four steps to know: motivation, acquisition, elaboration, and fixation-application. Each of these stages has different problems that allow the approach to the concepts through successive approximations.

In the same sense, the proposed methodology establishes the use of different types of software that facilitates the visualization of points, lines and subsets, situations used by the participating students. The implementation of the methodology based on the didactic model provides the tools for future teachers to carry out their work, since they can put into play abstract ideas and solve problems, besides being able to characterize representations and operations, in order to improve their thinking and professional performance.

INTRODUCCIÓN

Aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser, constituyen pilares básicos del aprendizaje que la educación debe crear y desarrollar (Delors, et. al, 1997). Son múltiples los factores que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, entre ellos: la falta de estrategias didácticas, metodologías, currículos no retadores, modelos educativos poco prácticos, políticas sociales con escasa efectividad, concepciones y creencias erróneas, entre otras.

Las investigaciones en educación matemática, hace más de 50 años, han centrado sus esfuerzos en determinar cómo debe desarrollarse el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en función de lograr la aprehensión y asimilación de los conceptos matemáticos y favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Investigaciones como las de Vinner y Hershkowitz (1980), Tall y Vinner (1981), Grenier (1985), Sfard (1991), Balacheff (1997), Duval (1999), entre otros, han sentado las bases para una *teoría de los conceptos matemáticos*, basados en la relación entre la definición de concepto y su imagen. En esa misma dirección, Duval (1999) y Hitt (2001), establecen que para la construcción de conceptos matemáticos no sólo se deben presentar actividades con un único sistema de representación, sino que además, se debe plantear el paso contrario entre los distintos sistemas, reiterando que es de esta manera se favorece la construcción de los conceptos matemáticos.

En relación a la resolución de problemas, Polya (1965), Falk (1980), Kilpatrick (1985), Schoenfeld (1985, 1987, 1994), Mayer (1986), Krulik, S. y Rudnik, J. (1987), Vergnaud (1990), Fridman (1991), De Guzmán (1991, 2001), Garret (1995), Puig (1996), Campistrous y Rizo (1996), Lester y Kehle (2003), Cruz (2006), Sigarreta (2006), Lesh y de Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros, enriquecen la investigación, ya que establecen que el uso iterativo de tecnicismos, como algoritmos, palabras claves, procedimientos, definiciones y memoria del estudiante, predomina sobre el tratamiento de los conceptos, hecho que impide el planteamiento, análisis y solución de problemas.

Adicional a ello, en dichas investigaciones, se declaran las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de enfrentar un determinado problema y se proponen estrategias, fases y modelos para favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos; sin embargo, las dificultades dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática persisten. Colombia, no es ajena a esta problemática, situación que se refleja en los resultados de las pruebas externas (LLECE, PISA, TIMMS, ver Anexo A) e internas (Saber 3º,5º,9º, Saber 11º y Saber Pro, ver Anexo A).

Dichos resultados se deben a distintos factores entre ellos, la poca habilidad de los estudiantes para analizar y solucionar problemas (ICFES, 2014). Situación que pone de manifiesto la necesidad de asumir e involucrar la resolución de problemas como método integral en la enseñanza-aprendizaje de la matemática; es decir, la resolución de problemas debe ser considerada como transversal a todo el diseño curricular.

Adicional a ello se debe generar un contexto, en el cual los conceptos y las actitudes hacia la matemática puedan ser favorecidos; de modo que los estudiantes sean activos en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades y capacidades, en palabras de Ernest (1989) "... *la resolución de problemas es la visión de las matemáticas como un campo en continua expansión dinámica de la creación y la invención humana, un producto cultural… En esta misma medida la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas, mejora las actitudes, comprensión y flexibilidad de pensamiento*”[17].

Fischbein (1990) establece algunas líneas generales que se pueden desarrollar en torno a la formación de conceptos, en particular, expone un conjunto de indicaciones para el tratamiento de problemas relacionados con conceptos matemáticos, tales como: el infinito actual y potencial, Teoría de números especificando los irracionales y complejos, entre otros. Se coincide con Falk (2015), cuando asevera: “*...en lo concerniente a un concepto matemático el aprendizaje es un proceso de construcción de significado del concepto. El proceso de construcción pasa por etapas donde el significado es construido…. El proceso de construcción de significado se desarrolla en la actividad de la solución de problemas, cada problema nuevo contribuye a mirar el concepto en un nuevo contexto que enriquece su significado... permite establecer las relaciones que cumple el concepto con otros conceptos…*”[18].

En particular, el porqué del tratamiento del concepto de función de variable compleja, se fundamenta en las siguientes razones:

- El tratamiento de los números complejos, determina la continuidad natural de los dominios numéricos; después de los reales, (Kline, 1972; Sigarreta, 2000).
- Crea las bases sobre el tratamiento de conceptos integradores para la compresión de la matemática, como los hiperreales e hipercomplejos.
- Las funciones de variable compleja están presentes en las bases teóricas de toda la matemática superior y en sus aplicaciones prácticas.

De lo antes expuesto se infiere la importancia y necesidad de formar nuevos maestros, que conozcan los fundamentos teóricos que permitan relacionar, de manera exitosa, la resolución de problemas matemáticos y la formación de conceptos y, en particular, aquellos específicos asociados con el concepto de función de variable compleja. La importancia teórico- práctica del tema tratado, se corrobora ya que estas temáticas han sido abordadas en eventos científicos tales como: International Congress on Mathematical Education (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros.

Específicamente, en el ICME (1990), Vergnaud, definió los *campos conceptuales* como conjuntos de situaciones cuyo análisis y

[17] Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art, p. 249*

[18] Falk, M. (2015). Mathematics and Cognition. Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 6

tratamiento requieren de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas; concluye que los maestros requieren de una mejor comprensión de la interconexión entre los conceptos, las competencias, los símbolos y situaciones para el desarrollo del conocimiento matemático a largo plazo.

En el CERME 2013, los trabajos de Fernández, Rico y Ruiz, indagan sobre los significados del concepto de límite finito de una función en un punto. Mota, Rada y Estarada (2013), resaltan la enseñanza del concepto de línea tangente. Hausberger, trabaja sobre el concepto de Homomorfismo. Por último, Schlarmann, se refiere a la comprensión conceptual. Se considera que el aporte de estos trabajos científicos, se dirige a caracterizar diferentes conceptos matemáticos, desde la práctica en el aula, sin establecer una metodología o modelo didáctico específico para el tratamiento de estos tópicos.

Buehler (2014) presenta como Girolamo Cardano, adquiere el concepto de números complejos, haciendo una fuerte crítica a la teoría del desarrollo conceptual de Christopher Peacocke, estableciendo la necesidad de enfrentar contraejemplos, tomando la construcción social del conocimiento, como un marco para la comprensión en la adquisición de conceptos.

Pardo y Gómez (2007) presentan un estudio sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, tomando como modelo el de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Sus resultados establecen que los estudiantes universitarios presentan dificultades e inconsistencias al responder a diferentes tareas planteadas, mostrando que es aconsejable el uso de la historia como un elemento para el aprendizaje del número complejo.

De Vleeschouwer, Gueudet y Lebaud (2013) realizan una investigación acerca de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos en los primeros cursos universitarios. Presentan diferentes tareas haciendo uso de diferentes representaciones; concluyen, que existen dificultades en el tránsito por estos sistemas y en particular con la representación geométrica, sugieren que esta última requiere de una enseñanza específica. En el artículo no se ofrece ningún modelo didáctico para solventar o enfrentar las dificultades encontradas.

Gray y Tall (2001) determinan tres formas de construir conceptos matemáticos que han sido utilizadas en teorías axiomáticas formales: desde la percepción de objetos y sus propiedades; desde las acciones que se simbolizan y sus propiedades; y desde esquemas de actividades y sus propiedades. Sin embargo, estas tres diferentes formas de construcción del concepto, tienen en común su tratamiento, esencialmente, inductivo. Se considera que dichas formas pueden ser integradas, desde el punto de vista metodológico, a través de un tratamiento dentro del proceso de resolución de problemas.

En la literatura revisada, se carece de un modelo didáctico para la formación de conceptos de la teoría de funciones de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. Igualmente en las investigaciones desarrolladas sobre la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja.

Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos; por lo tanto, en ésta investigación, se realiza un estudio para la elaboración y aplicación de un modelo didáctico que favorezca el proceso de formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas, con estudiantes de quinto semestre de dicha licenciatura. El modelo, está sustentado en los aportes que desde el punto de vista teórico ha desarrollado la concepción dialéctica y que en la práctica ha potencializado el Enfoque Histórico Cultural de Vygotsky (1988).

En la literatura científica, son limitados los antecedentes; sin embargo, se han ubicado estudios acerca de la formación de conceptos, la resolución de problemas y la enseñanza-aprendizaje del número complejo y de las funciones de variable compleja. A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación en clase, encuestas a los estudiantes y profesores y la experiencia de la investigadora, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Son limitados los conocimientos previos que poseen los estudiantes acerca del número complejo y por ende de la función de variable compleja.
- Son escasos los sistemas de representación, para la construcción del concepto de número complejo y en consecuencia de la función de variable compleja.
- Es limitado, en general, el empleo de métodos que induzcan a la actuación productiva de los estudiantes para el dominio de conceptos matemáticos.
- Las actividades asignadas en el aula no propician la experimentación, búsqueda y exploración en el estudio del número complejo y el de función de variable compleja, donde se logren procesos metacognitivos.
- La construcción del concepto de función de variable compleja, no se introduce a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida, relacionada con la temática.
- Se carece de una adecuada integración, entre la resolución de problemas y la formación de conceptos para el tratamiento del concepto de función de variable compleja.

Las valoraciones anteriores y el estudio teórico inicialmente realizado, permiten determinar la contradicción en su manifestación externa, entre las prácticas de aula para la formación del concepto de función de variable compleja y la aplicación de un modelo didáctico que integre la resolución de problemas y la formación de conceptos en el tratamiento de dicho concepto. La contradicción conduce al siguiente **problema científico** de la investigación: ¿Cómo utilizar las potencialidades de la resolución de problemas para favorecer el proceso de formación del concepto de función de variable compleja?

El **objeto de estudio** de la investigación es el siguiente: el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja en el nivel universitario. En función de resolver el problema planteado se propone como **objetivo general**: elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas. Se precisa como **campo de acción**: el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas en el nivel universitario. Para el cumplimiento del objetivo, se formulan las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué fundamentos teóricos son necesarios para elaborar una metodología para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas?
- ¿Qué elementos matemáticos y metodológicos de la resolución de problemas y el tratamiento de conceptos matemáticos, son necesarios para elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas?
- ¿Qué modelo didáctico favorece el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través del proceso de resolución de problemas?

- ¿Cómo analizar la viabilidad de dicho modelo didáctico en la práctica docente?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y, en particular, a las preguntas planteadas fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar el estado del arte asociado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la función de variable compleja.
2. Determinar el mapa conceptual asociado al concepto de función de variable compleja, que serán tratados a través del modelo didáctico.
3. Fundamentar epistemológicamente y matemáticamente los procesos de evolución y de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja.
4. Determinar elementos metodológicos asociados a la imbricación entre la resolución de problemas y el tratamiento de los conceptos matemáticos.
5. Elaborar un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.
6. Determinar la viabilidad de un modelo didáctico por medio de una metodología sustentada a través de un sistema de actividades, que permita la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.

El **aporte práctico** radica en una metodología sustentada en el modelo didáctico, que permite la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. La constitución de herramientas y estrategias para la recolección de información y validación de la propuesta. Adicional a ello, se aporta un sistema de actividades dirigido a la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico de carácter holístico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas matemáticos. Es de destacar el carácter integrador del modelo propuesto, debido a que desde el punto de vista teórico ofrece los fundamentos básicos para el desarrollo de futuras investigaciones enfocadas a la formación de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas y viceversa.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte. En el segundo, se explicitan los fundamentos teóricos. En el tercer capítulo, se expone la metodología de la investigación. En el cuarto capítulo se presenta y explica el modelo didáctico y una metodología a partir de un sistema de actividades. En el quinto capítulo se valida el modelo didáctico generado y se realiza una valoración de la implementación del sistema de actividades en la práctica.

En el **CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** se abordan temas relacionados con las relaciones entre: formación de conceptos y la resolución de problemas. En las investigaciones consultadas se encuentra amplia bibliografía sobre la resolución de problemas, la formación de conceptos, teoría de la actividad, procesos de enseñanza-aprendizaje de los números complejos, variable compleja y funciones de variable compleja. Estas investigaciones establecen un marco de referencia en el desarrollo de la investigación; dichas investigaciones se centran en primera instancia a la formación de conceptos; entre ellos Rubinstein (1967) da importancia a los sistemas de representación y el uso de ejemplos y los no ejemplos, situación a la que D' Amore (2001) establece que no sólo a través de múltiples representaciones se logra el aprendizaje de un concepto, sino que además se necesita de la lógica; de igual manera Falk (2015), determina la importancia del proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores.

Otros se centran en la formación de conceptos de diferentes tópicos matemáticos entre ellos, Velázquez, y otros (2004), González (2005); de otra parte investigaciones como las de Schoenfeld (1992), Rodríguez, Sigarreta y Ruesga (2006), permiten determinar la importancia de la resolución de problemas como eje fundamental de las matemáticas. En esa misma dirección Morales, y otros (2014), exponen que la actividad matemática se centra en la resolución de problemas, tomando los aportes del enfoque histórico-cultural, desarrollados dentro de la teoría de la actividad

En adición, autores como Ángel, Polola, Fernández y Bortolotto (2004), Mena, Rojas y Vindas (2011), Bueno, Mora, Álvarez y Nardín (2012) y otros establecen métodos de trabajo en el aula, a través de unidades didácticas o sistemas de actividades que según exponen, permiten facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo uso de la resolución de problemas para la formación de conceptos. Para ellos la resolución de problemas es un proceso transversal que proporciona de contexto a los conceptos, con el fin de favorecer el aprendizaje significativo de estos.

De otra parte investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, realizadas por Pochulu (2012), Duke, y otros (2008) y Yan, y otros (2011), entre otros, se enfocan en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

Cabe destacar que en la revisión de la literatura científica realizada, se carece de un modelo didáctico que permita la formación de conceptos de la función de variable compleja mediante la resolución de problemas; pero aportan en gran medida al planteamiento y puesta en marcha del modelo didáctico propuesto.

En el **CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO** están dado por los fundamentos filosóficos que la concepción dialéctica ofrece, el enfoque histórico-cultural de Vygotsky (1995) en sus fundamentos psicopedagógicos. Metodológicamente por la teoría de la actividad de Leontiev (1983) y la formación de conceptos de Galperin (1995); las cuales permiten enriquecer y determinar la estructura y puesta en escena del modelo en la práctica. Cabe destacar, que en cuanto a la resolución de problemas, se toma como base el trabajo realizado por Polya (1965) y De Guzmán (2001), con quienes la autora concuerda en la definición de problema, categorización y resolución. Los fundamentos matemáticos tienen en cuenta no sólo el concepto y definición de función de variable compleja sino además, los conceptos subordinados, colaterales y superiores, subyacentes a este.

En el **CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION**, se asume el paradigma de investigación que sustenta la tesis, además es donde se precisa la población y la muestra. También se valoran los diferentes métodos a nivel teórico y empírico (Instrumentos y técnicas aplicadas), así como los métodos estadísticos, utilizados en el análisis de los resultados.

La presente investigación se ubica en el paradigma de investigación cualitativo interpretativo, mediante un estudio de caso único descriptivo teniendo en cuenta que se describe la situación observada dentro de un grupo de estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos perteneciente, al curso electivo variable compleja del periodo II del año 2016.

Dentro de los métodos y técnicas de investigación se tienen las siguientes: a nivel teórico; el histórico-lógico, análisis-síntesis, la modelación y el método sistémico-estructural. A nivel empírico; la observación participante, encuestas, entrevistas y los métodos matemáticos estadísticos.

Estos instrumentos y métodos propios de la investigación, permiten establecer el modelo, la metodología y el sistema de actividades.

El **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**; en la consecución del modelo didáctico se tiene en cuenta en primera instancia, los fundamentos filosóficos, psicológicos y matemáticos descritos en el Capítulo 2, además de los referentes teóricos que se tienen acerca de los modelos didácticos y se plantea como modelo didáctico, "*la estructuración sistémico-práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje, para incidir en la formación integral del estudiante*". En la elaboración de este modelo se tuvo en cuenta: como basamento teórico la concepción dialéctica, los fundamentos psicopedagógicos y matemáticos, que constituyen elementos valiosos, donde se sustenta el modelo. En segundo lugar, la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja hacia la búsqueda activa y dinámica del conocimiento en el estudiante, a través de un sistema de actividades, desde posiciones reflexivas que estimulan el desarrollo del pensamiento y la independencia cognoscitiva. En tercer lugar, la metodología sustentada en el modelo didáctico favorece la formación de conceptos sobre función de variable compleja, a través de la resolución de problemas y propicia el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento y el dominio de los contenidos teóricos necesarios, en la medida en que se produce el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. En cuarto lugar el tránsito del nivel actual o inicial que poseen los estudiantes, hasta el nivel que se aspira; así como la estimulación de la necesidad de aprender función de variable compleja, teniendo en cuenta los intereses. Además, el vínculo del contenido función de variable compleja con la práctica social. De igual forma, el elemento dinamizador del modelo se desarrolla en la etapa de ejecución, al interactuar las cuatro categorías presentes en la metodología propicia la construcción de un robusto concepto de función de variable compleja, contribuyendo a la solución del problema científico planteado.

La propuesta de modelo didáctico que se presenta, considera las tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad, a saber: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen parte de la metodología y por ende del modelo a desarrollar.

Desde este punto de vista la aproximación a un concepto superior, se hace de manera paulatina y permanente en forma de "espiral", donde cada concepto subordinado, colateral y superior, alcanza grados de complejidad cada vez más avanzados.

En la Figura 1, se puede observar los diferentes niveles de comprensión de un concepto y cómo a través de aproximaciones sucesivas y cada vez más complejas el estudiante va acercándose al concepto de variable compleja.

Cada uno de estos niveles deja observar el paso de las diferentes ZDP, además del uso del diagnóstico como parte del proceso metodológico; el sistema de actividades como un eje que traspasa de manera ascendente a la metodología; el sistema de evaluación y control que brinda información para el mejoramiento y seguimiento de los conceptos. De igual forma esta metodología posee como eje central el modelo didáctico diseñado, al cual pertenece también la metodología (ver Figura 1).

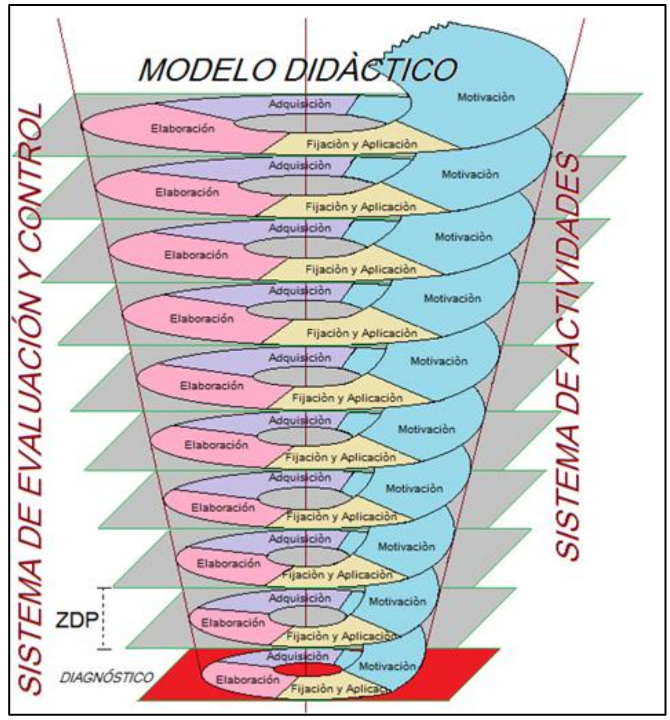


Figura 1. Relación metodológica para la construcción de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Las actividades desarrolladas se encuentran directamente relacionadas con la metodología, es decir, dichas actividades se formulan de la siguiente manera: título de la actividad, objetivo, sugerencia metodológica, motivación, adquisición, elaboración, fijación-aplicación y unas conclusiones de la actividad. La actividad 1 llamada Unidad imaginaria, la actividad 2. Representaciones, la actividad 3. Operaciones, la actividad 4. Potencias, la actividad 5. Raíces la actividad 6. Conjunto de puntos en el plano $\mathbb{C}$ y la actividad 7. Funciones de variable compleja.

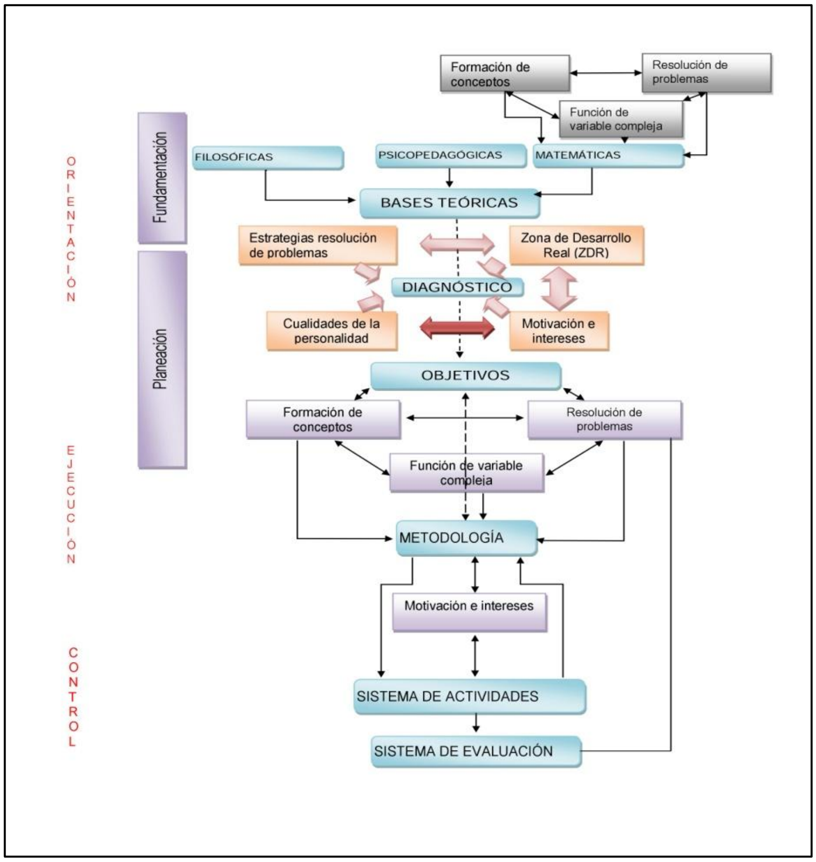


Figura 2. Modelo didáctico para la formación del concepto de variable compleja.

En el **CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS** se presentan los resultados de las actividades realizadas a la luz del modelo didáctico y su metodología; para estructurar la información proveniente del análisis se procedió a enumerar a los estudiantes participantes de (E1, E2, E3,…, E10) y se crearon escalas de valoración cualitativas basadas en la clasificación que realizan Ballester y otros (1992), sobre los niveles de desarrollo de los conceptos, haciendo un aporte sobre las características de éste frente a la resolución de problemas como se muestra a continuación en la tabla 1.

De igual forma se nombraron los problemas como P.M.n, donde M corresponde a la motivación, P.A.n a problemas de adquisición, P.E.n a los de elaboración y P.F.n a los problemas que corresponden a la etapa de fijación-aplicación, la n es el número del problema en cada etapa de la actividad.

Tabla 1. Escalas de valoración cualitativas basadas la caracterización de los niveles de desarrollo de los conceptos mediante la resolución de problemas.

NIVEL DE SOLUCIÓN	CARACTERIZACIÓN
Análisis-Abstracción (A-A).	El estudiante analiza los grupos o conjuntos de objetos en función de sus propiedades comunes; luego determina cuales de esas características son esenciales, forma conjuntos más complejos y elaborados, basándose en las propiedades. La caracterización permite que el estudiante determine la presencia o no del concepto superior y las relaciones existentes con otros conceptos (colaterales y subordinados) en los problemas propuestos.
Discriminación-Identificación (D-I).	El estudiante determina qué propiedades del nivel anterior, pueden extenderse al resto de los elementos de un conjunto, se deducen e inducen las propiedades fundamentales a la totalidad de los elementos del conjunto. Identifica el concepto como parte de la solución de un problema, donde se puede apreciar características necesarias y suficientes o aquellas en donde algunas características sean modificadas de tal manera que el estudiante compara y establece similitudes en cuanto a cada problema y la relación con el concepto.
Síntesis-Concreción (S-C).	El estudiante determina las características esenciales, la estructura o el sistema de la totalidad de los elementos se sintetiza el proceso y puede construir una definición. Aplica el concepto frente a problemas en nuevos contextos, donde el uso de diferentes sistemas de representación permite que el estudiante establezca las relaciones entre los conceptos superiores con los subordinados o colaterales, conduciendo a nuevos problemas en donde se pone a prueba el concepto.

Como se puede observar, en cada actividad hubo una serie de problemas que llevaron al estudiante bajo un hilo conductor a la comprensión de diferentes conceptos asociados al de función de variable compleja como es: unidad imaginaria, representaciones de los números complejos, operaciones con números complejos, potencias, raíces, lugares geométricos y función de variable compleja; todas ellas introducidas desde el punto de vista geométrico y en algunos casos, haciendo uso de videos y diferentes software que permitieron la visualización de la situación.

Durante el desarrollo de las actividades se logró establecer que los estudiantes a medida que resolvían los problemas en cada actividad, mejoraban la comprensión de dos conceptos indispensables, el de número complejo y función de variable compleja, es así, que en el desarrollo de las actividades se preguntaba al final como control, qué concepto tiene sobre número complejo y cuál es el concepto que tiene sobre función de variable compleja. Se pudo observar que el 70% de los estudiantes tuvo una mejoría frente a los conceptos, a partir no sólo de sus escritos sino de sus expresiones verbales y no verbales en el desarrollo de los problemas, solo 3 estudiantes no lograron pasar del nivel de análisis abstracción al de síntesis- concreción, esto debido al bajo compromiso que tenían y a los niveles básicos de matemáticas con los que cuentan. Un análisis de las encuestas realizadas en la etapa de diagnóstico, muestra que estos 3 estudiantes expresaron no dedicar mucho tiempo a la resolución de un problema y ser poco responsables; situaciones que no ayudan al desarrollo de las actividades.

Por otra parte, al analizar las actividades con la aplicación de la estrategia, se identificó que se alcanza a comprender mejor el concepto, pues en cada etapa del proceso de asimilación se trabajaron actividades específicas. Algunos resultados son los siguientes: En la etapa de *motivación:* aunque los estudiantes mostraron gran dinamismo en el desarrollo de las actividades, es en esta etapa donde la mayoría de los estudiantes obtuvieron un nivel de análisis – abstracción, esto debido a que era la primera aproximación al concepto a tratar.

En la etapa de *adquisición:* en esta etapa se orientó el trabajo hacia temas conocidos para la resolución de problemas, que permitieron la discusión sobre las características esenciales del conjunto de los números complejos, en esta etapa se logra alcanzar niveles de síntesis – concreción, debido a que permiten hacer aseveraciones y conclusiones sobre algunos conceptos.

En la etapa de *elaboración:* los 10 estudiantes logran identificar las soluciones a los problemas propuestos, debido a que muchos de ellos permitían establecer comparaciones entre los números complejos y los reales, sin embargo, para algunos es tan arraigado el tema de las funciones en variable real que 3 de ellos en un primer instante no logran comprender el mapeo de muchas funciones, dificultándoseles las actividades.

En la etapa de *fijación-aplicación:* en esta etapa la mayoría de los estudiantes tuvieron éxito en la solución y justificación de los problemas propuestos, como situaciones dentro de la misma matemática y con problemas que relacionaban los números complejos y la física.

De acuerdo a lo establecido, podemos afirmar, que hacer el tratamiento mediante la puesta en práctica de la estrategia, se arrojan elementos que garantizan favorecer los procesos de asimilación, además, las etapas comprendidas en dicho proceso, permiten la evaluación durante el proceso y en caso de ser necesario, reorientar la actividad. De esta manera, podemos afirmar que al llevar acabo el modelo didáctico, mediante la metodología propuesta, se han encontrado elementos que permiten concluir que la estrategia metodológica, favorece los procesos de asimilación de los conceptos, en específico aquellos asociados a las funciones de variable compleja.

CONCLUSIONES

El proceso investigativo sobre la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, corrobora la hipótesis planteada en la tesis y ofrece una respuesta al problema objeto de investigación. Los resultados obtenidos propician destacar algunos elementos que resultan esenciales en éste trabajo, ellos son: que el proceso de enseñanza- aprendizaje del concepto de función de variable compleja, ha sido abordado por diferentes autores desde tres perspectivas:

1. Teórica: la formación de conceptos.
2. Resolutiva–procedimental: la resolución de problemas.
3. Analítico funcional; el estudio de la función de variable compleja desde la Variable Compleja.

Adicional a ello en la literatura revisada se pudo constatar las siguientes regularidades: que el aprendizaje de un concepto se logra a través de múltiples representaciones y de la lógica; se brindan importancia al proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores, además de ello se proponen actividades que favorecen la formación de conceptos mediante la resolución de problemas y se centran su atención en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

Las investigaciones valoradas en el estado del arte sirvieron como base y referentes, pues se toman elementos que imbrican las tres aristas para la presente tesis. También se concluye que son escasos los trabajos que tienen en cuenta las relaciones existentes entre resolución de problemas y formación de conceptos, y se carece desde la teoría de un modelo didáctico para la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

La tesis se sustenta desde el punto de vista filosófico en la concepción dialéctica, pues esta ofrece la teoría, que a través del dialogo y la discusión, permite descubrir el contenido matemático mediante la exposición y confrontación de razonamientos y argumentaciones. Los sustentos psicopedagógicos están dados por el enfoque Histórico-Cultural de Vygotsky y sus seguidores, asumiéndose de este la zona de desarrollo próximo, la ley de la doble formación de las funciones psicológicas y la teoría de la actividad. Ambos fundamentos son básicos en la construcción del modelo didáctico y le brindan robustez.

El trabajo con la formación de conceptos matemáticos es importante para lograr un proceso de enseñanza - aprendizaje robusto de la matemática, en particular de las funciones de variable compleja, pues éste le propicia tratar los conceptos de objeto, de relación y de operaciones, asociados esencialmente al pensamiento abstracto, el cual está basado en conceptos, juicios y razonamientos. Los conceptos en el estudiante no se forman de manera inmediata, son el resultado de un proceso que puede estructurarse, en tres niveles: Análisis-Abstracción, Discriminación-Identificación y Síntesis-Concreción.

La teoría de la resolución de problemas, en particular los problemas retadores constituyen uno de los pilares básicos para el trabajo con la formación del concepto de función de variable compleja. La implementación de la estrategia de Polya (1965) en el momento de resolución de cada uno de los problemas: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y la evaluación de la solución y de la vía; centrada en el apoyo de la heurística, propicia la construcción robusta de dicho concepto.

La investigación se sustenta en el paradigma cualitativo interpretativo. Los instrumentos y métodos utilizados durante el desarrollo de la investigación, permiten establecer el modelo didáctico, elaborar la metodología sustentada en el modelo y elaborar e implementar un sistema de actividades, para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja.

El modelo didáctico propuesto se ha estructurado en función del aprendizaje del alumno, es decir, en ella se prioriza el proceso de asimilación por etapas de los conceptos asociados al de función de variable compleja y se concibe que él mismo, ha asimilado los conceptos si logra establecer una solución a los diferentes problemas propuestos en las etapas de: motivación, adquisición, elaboración y fijación- aplicación. Cada una de las propuestas de solución se analizaron según tres niveles de formación del concepto: Análisis-Abstracción, Discriminación – Identificación o Síntesis- Concreción.

El modelo permite estructurar la formación del concepto de función de variable compleja hacia la búsqueda activa, dinámica y transformadora del conocimiento en el estudiante, mediante un sistema de actividades, donde fundamentalmente se utiliza la tecnología, la historia de las matemáticas como recurso didáctico, la representación geométrica y procedimientos heurísticos, desde posiciones reflexivas que propician el desarrollo del pensamiento matemático y de la independencia cognoscitiva.

El principal resultado alcanzado en esta investigación es la elaboración de un modelo didáctico, para tal fin se diseñó una metodología que permite dinamizar el modelo y un sistema de actividades estructurado en 4 etapas: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación, que conjuntamente con la metodología posibilitaron la concreción del modelo en la práctica, a través de la resolución de problemas para la formación de conceptos.

La realización de cada una de las etapas permite favorecer los procesos de internalización del conocimiento sobre los conceptos asociados al de función de variable compleja. Por esta razón en cada etapa se propusieron actividades que a la vez se corresponden con la elaboración por etapas de las acciones mentales, y para su desarrollo se utilizó una estrategia integradora de resolución de problemas que se apoya en los postulados de la formación de conceptos mediante tres niveles.

La estrategia metodológica acierta frente al diagnóstico realizado, el cual permitió establecer el tipo de problemas frente al contenido matemático del concepto, en él se propone una nueva estructura para el tratamiento del concepto de función de variable compleja, desde el punto de vista geométrico, atendiendo a las relaciones conceptuales de los conceptos asociados (colaterales, subyacentes y superiores) al de función de variable compleja

Las actividades están estructuradas en cuatro etapas, que establecen un orden para la puesta en práctica, de manera que el proceso se hace más estructurado, situación que es necesaria para un buen aprendizaje; además de ello incluye herramientas tecnológicas para la puesta en escena de las representaciones visuales de los problemas, situaciones problema que ponen en juego conocimientos anteriores para la construcción de nuevos conceptos, aplicaciones para facilitar la fijación y la generalización de conceptos y una serie de preguntas que permiten llevar un hilo conductor.

Por otra parte, es necesaria una formación sólida sobre el contenido matemático del concepto, lo que permite entender el sentido de cada una de las actividades que se han propuesto e identificar qué se logra con cada una de ellas, y cómo la resolución de problemas finalmente permite al alumno la formación de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Luego de llevar a cabo el desarrollo de las actividades, se arrojaron elementos que permiten determinar situaciones sobre los procesos de asimilación del concepto de función de variable compleja a través de la puesta en escena de la estrategia metodológica, donde se identificó en los alumnos los siguientes resultados: los procesos de motivación son esenciales cuando se abarcan temas relacionados con la matemática, la incorporación de una vía mixta permite al docente tener diferentes perspectivas frente a cómo abarcar el contenido, el uso de situaciones problema ayuda a los estudiantes a una mejor comprensión de los conceptos, aproximadamente un 70% alcanzó un nivel óptimo frente a la comprensión no solo del concepto de función de variable compleja, sino de los conceptos asociados a este, la evaluación frente al concepto de número complejo, representación y función de variable compleja se puede apreciar a medida que las actividades abarcan problemas de mayor complejidad.

El empleo de las TICs en la formación de conceptos y en especial en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el nivel universitario, ofrece múltiples ventajas en el mejoramiento de los deferentes procesos de asimilación de conceptos, procedimientos que se tratan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, debido a que permiten la visualización y por ende la asimilación de conceptos abstractos sobre la base de imágenes o representaciones que las TICs proporcionan.

El aprendizaje de propiedades geométricas de las funciones en variable compleja, conlleva serias dificultades en la enseñanza tradicional, por lo cual, el uso de diferentes software facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. En el aprendizaje de la matemática universitaria, la tecnología juega un papel importante y más aún en programas de licenciatura, porque permiten darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento.

El uso de un modelo didáctico y una metodología acorde a esta, como la propuesta en esta tesis, mejora los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos mediante la resolución de problemas, no sólo de temas relacionados con las funciones de variable compleja, sino otros temas de las matemáticas, se deja al lector, la posibilidad de aplicar dichas actividades y poner en práctica el modelo propuesto mediante su metodología.

RECOMENDACIONES

La implementación de la metodología y del sistema de actividades sustentado en el modelo didáctico para fortalecer la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones: se debe favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, como por ejemplo el tratamiento que se le da en los textos, requiere tener en cuenta la relación entre los objetos matemáticos y sus aplicaciones utilizando, esencialmente, una determinada definición.

Para lograr mayor éxito al llevar a la práctica la metodología, es necesario un cambio casi total de los paradigmas que prevalecen en los profesores de Matemáticas y más aún de las licenciaturas, pues la metodología tiene varios componentes y elementos que van fundamentalmente, dirigidos al profesor, los cuales deben ser asimilados como requisito fundamental.

El Integrar las TIC en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas al nivel de educación superior, pues coadyuvan en la comprensión y formación de conceptos, también favorece el proceso de la visualización en la resolución de problema, que en el caso del trabajo con variable compleja es necesario debido a su carácter un poco abstracto.

El desarrollo de trabajos conjuntos y el uso de la dialéctica como eje fundamental de los procesos de enseñanza-aprendizaje permiten la formación integral del estudiante y el mejoramiento de aspectos esenciales en la personalidad, tanto del maestro como del alumno, es así, que la responsabilidad, el comunicarse con el otro, el respeto por las opiniones y el conocimiento matemático, se hacen presentes en el desarrollo de las actividades que proponga el maestro.

De igual forma quedan abiertos temas relacionados con la teoría de funciones en variable compleja, el uso de modelos didácticos en los procesos de enseñanza aprendizaje en el nivel universitario, el diseño de modelos de formación docente que permitan a los futuros docentes tener herramientas no sólo matemáticas, sino pedagógicas y didácticas que les permitan desenvolverse como maestros del área.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Ángel, M., Polola, L., Fernández, G. y Bortolotto, M. (2004). Aprendiendo matemática desde los conceptos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17*.

Balacheff, N., Brousseau, G., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990. *Mathematics education library, 19*.

Ballester, S. y otros. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y educación.

Buehler, D. (2014). Incomplete understanding of complex numbers Girolamo Cardano: a case study in the acquisition of mathematical concepts. *Synthese*, 191(17), 4231-4252. Recuperado de: http://bibliotecasenlinea.unillanos.edu.co:2093/ejemplar/378825.

Bueno, S., Mora, J., Nardín, A., Álvarez, A. y Blanco, R. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales.

Campistrous, L. y C. Rizo. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Proyecto TEDI. La Habana: Pueblo y Educación.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. [Barcelona, España]. 27, 51-76. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/402%20contribucion%20al%20debate%20sobre%20conceptos%20y%20objetos.pdf

De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

De Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Red Científica. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html.

De Vleeschouwer, M., Gueudet, G., Lebaud, M. y Britain, U. (2013). Teaching and learning complex numbers in the beginning of the university cursus. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14Posters/WG14_P_%20DeVleeschouwerGueudet_Lebaud.pdf.

Delors, J., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., Gorham, W. y Nanzhao, Z. (1997). *La educación encierra un tesoro: informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo Veintiuno*. Unesco.

Duke, B., Dwyer, J, Wilhelm, J. y Moskal, B. (2008). Complex variables in junior high school: the role and potential impact of an outreach mathematician. *Teaching Mathematics and its Applications, 27(1)*.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizajes*.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art.*

Falk, M. *(1980). La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2015). Mathematics and Cognition. Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015.

Fernández, J., Rico, L. y Ruiz, J. (2013), Meanings of the concept of finite limit of a function at one point: background and advances. *En Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*.

Fischbein, E. (1990). *Introdution (Mathematics and Cognition). En*: P. Neshery J. Kilpatrick (Eds), Mathematics and cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

Flores, C., García, G., Gómez, E., Gutiérrez, M., Hesiquio, H. y Velázquez, S. (2004). La formación del concepto de función en alumnos de educación media superior.

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela* (5).

Galperin P. (1995). *Introducción a la Psicología*. La Habana: Pueblo y Educación..

Garret, R. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. En Revista *Didáctica de las Ciencias Experimentales # 5*, julio, p. 16-26. Alambique, Universidad de Bristol. Gran Bretaña.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en humanidades*, (11).

Gray, E. y Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In *PME CONFERENCE* (Vol. 3).

Grenier, D. (1985). Midle school pupils. Conceptions about reflections according to la task of construction. Procceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations. Noordwijkerhout.

Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo) morphism: a key notion in the learning of abstract algebra. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Hitt, F. (2001). El papel de los Esquemas, las Conexiones y representaciones Internas y Externas Dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*.

ICFES, Informe Pruebas Saber –Matemáticas. Bogotá, D.C., Noviembre de 2014. Recuperable el Marzo 9 de 2015 en la URL: ww.icfes.edu.co.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty–five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.): *Teaching and learning mathematical problema solving: Multiple research perspectives*.

Kline, M. (1972).*Mathematical thought from ancient to modern times*. Nueva York, EE. UU.:Oxford University Press.

Krulik, S. y Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Leontiev, A. (1981). *La actividad en Psicología*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación

Leontiev, A. N. (1983). *Teoría psicológica de la actividad.* Selección de Obras de Psicología, 2, 94-261.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics.* Charlotte, NC: InformationAge Publishing.

Lester, F. y Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Editorial Paidos.

Mena, D., Rojas, L. y Vindas, A. (2011). Introducción a los conceptos básicos de funciones mediante el uso de la Resolución de Problemas. En Memorias del *VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, Cartago, Costa Rica.

Morales A., Dolores C., Nolasco H., Hernández J. y Sigarreta J., (2014). Methodology based on problem solving in the treatment of the concept of limit to infinity. En *International Journal of Research in Education Methodology.Volumen 5, Nº 1*.

Mota, Rada y Estarada, (2013). The teaching of the concept of tangent line using original sources En *Proceedings of the VIII CERME.* Antalya, Turquía.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1).

Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires, Argentina: Eduvim.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España. Editorial Comares.

Rubinstein, J. (1967). Principios de Psicología General. Edición Revolucionaria. Cuba.

Schlarmann, K. (2013), Conceptual Understanding In Linear Algebra - Reconstruction Of Mathematics Students' Mental Structures Of The Concept 'Basis'. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving.* Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1).

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). La contextualización de los problemas matemáticos. *En Revista Matemática y Educación.* Editorial Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1).

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2).

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2).

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980, August). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* México: Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje.*. A. Kozulin (Ed.). Buenos Aires: Paidós.

Yan, Y., Jin, D., Li, Y., Zhao, H. y Li, X. (2011). Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform. In *International Conference on Information Computing and Applications*. Springer Berlin Heidelberg.

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO A TRAVES DE LA HEURISTICA DE LAKATOS EN LA CONSTRUCCION DE DEMOSTRACIONES Y EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

JADER WILSON CORTES AMAYA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
shalom7_43@hotmail.com

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Resumen

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos en la educación matemática. Concretamente, se obtuvieron resultados importantes al considerar dicha heurística junto con la resolución de problemas retadores como metodología en un curso de matemáticas discretas para estudiantes de ingeniería de sistemas y licenciatura en matemáticas. Se lograron resultados en cuanto a la implicación de la heurística en el desarrollo del pensamiento matemático, en la actitud del estudiante, en la construcción de demostraciones matemáticas y como herramienta eficaz para la resolución de problemas.

Por otra parte, la investigación permitió aportar, en el contexto de la educación matemática, al importante debate acerca de si las matemáticas es resolver problemas o demostrar teoremas que considera tanto la postura filosófica de Celucci acerca de la naturaleza de la matemática y la postura científica de Gowers acerca de las dos culturas inmersas en matemáticas, la que prioriza la resolución de problemas y la que privilegia la construcción de teoría, y con ello aclarar el papel que desempeñan y cómo se interrelacionan el entendimiento de teoría, la construcción de demostraciones matemáticas y la resolución de problemas singulares en el ámbito de la educación matemática.

Abstract

This study had as objective analyzing the impact that causes the Lakatos heuristic method in the math education. Specifically, it offered important results when considering this heuristic with the resolution of challenging problems as the methodology used in discrete math for system engineering students and math degree.

Results were achieved about the implication of the heuristic on the development of mathematical thoughts, on the student's attitude, on the construction of mathematical demonstrations and as an effective tool to solve problems.

On the other hand, the study provided, in the mathematical education context, to the important debate about if math is solving problems or demonstrating theorems that consider the philosophical posture of Cellucci about the math nature and the scientific posture of Gowers about the two engaged cultures in math, the one that prioritizes the resolution of problems and the one that favors the theoretical construction, and with that clarify the role that they play and how they relate to the understanding of the theory, the construction of mathematical demonstrations and the resolution of singular problems in the field of mathematical education.

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se consideran centrales las teorías e investigaciones que colocan la resolución de problemas como factor importante dentro del quehacer del matemático, asignando un papel subordinado a aspectos más memorísticos o mecánicos que tradicionalmente han dominado en el salón de clase, considerando que éstos se deben abordar y aprender en el contexto de la resolución de problemas y no como fines en sí mismos. Por ejemplo, el algoritmo de la adición por sí solo puede ser efectuado por una calculadora o computador sin mayor esfuerzo del usuario, pero en el proceso de solución de problemas retadores e interesantes puede suceder que no sólo se ejercita el algoritmo, sino que se buscan y obtienen otros beneficios como analizar, generar estrategias, motivar a pensar, y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Por otra parte, se considera el papel de la demostración en el aprendizaje de la matemática. Se ha evidenciado la gran dificultad que acarrea llevar un proceso de demostración en los estudiantes que aprenden matemáticas; esta dificultad se debe no sólo a la complejidad implícita del proceso sino también a la manera como está constituido el currículo y como el docente aborda la situación de enseñanza. Balacheff afirma al respecto: "¿Cómo se enseña la demostración? Generalmente se hacen demostraciones delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo."[19]

La presente investigación relaciona estos dos aspectos, la resolución de problemas y la demostración, relación que se logra a través de la teoría propuesta por Lakatos, el método heurístico descrito en su obra *Pruebas y refutaciones*. Se resalta la manera en que Lakatos hace notar la forma cómo se construye, se justifica y evoluciona la matemática. Es evidente que su obra tiene implicaciones didácticas; son estas implicaciones las que motivan al autor de esta tesis hacia una investigación que tiene como objetivo analizar la influencia que tiene el método de pruebas y refutaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático, la resolución de problemas y la construcción de demostraciones formales. La investigación se llevará a cabo con estudiantes de licenciatura en matemáticas que se encuentran entre el sexto y octavo semestre y otros estudiantes inscritos en un curso de matemáticas discretas, y para ello se desarrollará un curso completo con un diseño preciso.

Dos aspectos importantes a tener en cuenta en la investigación son el análisis de la relación entre resolución de problemas, el método de pruebas y refutaciones, y el desarrollo del pensamiento matemático, por una parte, y el análisis de la influencia del método de Lakatos en la construcción de una demostración.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: una introducción, un capítulo 1. Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico, un capítulo 3. Modelación y diseño de actividades, un capítulo 4. Análisis y valoración de los resultados, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos

Justificación

"Existe evidencia en la literatura de educación matemática que el método de pruebas y refutaciones de Lakatos puede ser útil para examinar la producción de conjeturas de los estudiantes y los procesos de construcción de la demostración"[20]. Atkins (1997) por otra parte afirma que el método de pruebas y refutaciones proporciona una estrategia motivadora para involucrar a los estudiantes en la solución de problemas creando un ambiente en el cual los estudiantes razonan matemáticamente, comunican matemáticamente, y hacen conexiones matemáticas[21].

Godino (1997) afirma que "el interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de los procesos de validación en la propia matemática, y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones". Desde la experiencia del autor de la presente tesis, tanto en la etapa de estudiante como la de docente de matemáticas, se considera que la construcción de una demostración es una de las tareas más difíciles de llevar a cabo y que esto se debe en buena parte a los procesos cognitivos involucrados, como es el de generalizar y el de abstraer, los cuales considera Tall (1991) pertenecen al pensamiento matemático avanzado.

Varios autores declaran la importancia de vincular la demostración matemática en el currículo, (Balacheff, 1987; Hanna, 2000; Godino, 1997), y el tema sigue siendo de actual importancia en la comunidad de educación matemática. Por ejemplo, se ha abordado en importantes eventos y congresos, tal como en el reciente Estudio ICMI (2009) cuya conferencia tuvo lugar en la ciudad de Taipen (Taiwán) y cuyo título es "*Proof and Proving in Mathematics Education*". La apreciación del propósito o función de la demostración en el aula de clase difiere entre distintos autores. Gila Hanna es enfática en el rol que desempeña la demostración como un vehículo que promueve la comprensión matemática en los estudiantes. Nicolás Balacheff por otra parte se centra en la demostración como un tema esencial y especifico de la matemática y asegura que la mayoría de estudiantes fracasa en la construcción de una demostración. Por otro lado, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) en su publicación *Principles and Standards for School Mathematics* reconoce el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, allí se afirma que desde muy temprana edad los estudiantes deben entender la importancia de justificar cualquier afirmación matemática además de discernir qué argumentos son adecuados y aceptados desde un punto de vista científico.

Es importante resaltar algunos aspectos claves sobre la enseñanza de la demostración. El primero es que existe una preocupación de la comunidad científica en investigar más profundamente el tema. Hanna (2007) argumenta que el rol de la demostración a nivel secundario está perdiendo su importancia y por consiguiente es necesario encontrar diferentes maneras de ayudar a los estudiantes a mejorar sus habilidades y la comprensión que ellos necesitan. En vía contraria a Hanna, hay un acuerdo entre algunos educadores matemáticos en asegurar que la demostración en la escuela aparece únicamente en el

[19] Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

[20] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

[21] Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. School Science and Mathematics, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

estudio de la geometría euclidiana. Y, por otra parte, en ocasiones las metodologías de enseñanza obstaculizan el avance hacia un adecuado y correcto aprendizaje de la demostración. Por ejemplo, como lo anota Balacheff, son muchos los docentes que se han limitado a presentar una demostración formal en el tablero con el propósito de que sus estudiantes imiten el procedimiento. Esto no permite que el estudiante explore, conjeture y descubra, sino es un modelo que se torna difícil de comprender, que pretende tratar la demostración como si fuera un proceso sistemático, y que se aleja del objetivo de desarrollar el pensamiento matemático del estudiante.

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar el proceso de demostrar del estudiante, y una de las hipótesis es que este proceso se mejora ostensiblemente a través de la heurística de Lakatos expuesta en *Pruebas y refutaciones*, la cual contribuye a establecer modelos para la enseñanza de la demostración, el cual a su vez es, como anteriormente se afirmó, un aspecto fundamental de interés para la comunidad de educadores matemáticos.

Ahora bien, otra hipótesis referente a la función de la heurística de *Pruebas y refutaciones* es que se puede ampliarla al campo de la resolución de problemas. La resolución de problemas es una, sino es la más, importante actividad para el desarrollo del pensamiento matemático. El NCTM (2000) afirma que "la resolución de problemas es una parte integral del aprendizaje de las matemáticas", y agrega que la solución de problemas tiene dos funciones en la educación, el primero es ser un vehículo para el aprendizaje y la construcción de conceptos más robustos y el segundo funciona como una herramienta para motivar y comprometer a los estudiantes en el estudio de la matemática. Halmos (1980) escribió que la solución de problemas es el corazón de las matemáticas.

Wong Khonn Yoong (2009) muestra cómo está organizada y pensada el aprendizaje de la matemática en Singapur, un país con altos estándares de calidad en educación y particularmente con resultados entre los más altos en pruebas internacionales reconocidas como es el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA). La estructura general se muestra a través de un pentágono que organiza y relaciona los aspectos considerados los más importantes en el aprendizaje de las matemáticas como se muestra en la Figura 1. El pentágono tiene en su centro la solución de problemas matemáticos rodeada por cinco factores interrelacionados que contribuyen al éxito en la solución de problemas.

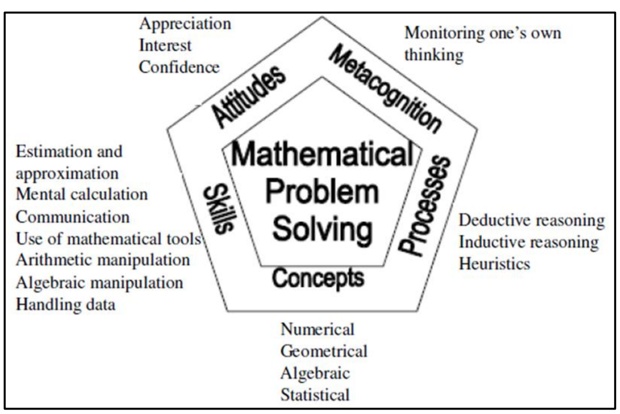


Figura 3. Pentágono actividad matemática Singapur[22]

Polya (1973) asevera que la resolución de problemas es una herramienta para llamar la atención de los estudiantes hacia el estudio de la matemática, y afirma que frente a "cualquier problema por modesto que parezca, si desafía tu intelecto e ingenio y lo logras solucionar, experimentarás la tensión y disfrutarás la victoria del descubrimiento". Schoenfeld (1985) atraído por el libro de Polya *How to solve it*, emprende una investigación que pretende responder a dos cuestiones principales: "¿qué significa pensar matemáticamente? y ¿cómo podemos ayudar a los estudiantes a hacerlo? La investigación fue publicada en el libro *Mathematical problem solving* en el que analiza y describe el comportamiento intelectual en la solución de problemas. Se resalta el hecho de la importancia dada por Schoenfeld a la resolución de problemas, la cual lo dirigió a investigar sobre la actividad intelectual implicada en la resolución de problemas complementando las ideas de Polya.

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar la incidencia de la heurística de Lakatos en la resolución de problemas para responder a la pregunta ¿cuáles son el aporte, las fortalezas y las debilidades de dicha heurística?

El último punto a tener en cuenta en este aparte es el rol que desempeña la matemática discreta en la presente investigación. En primera instancia, el contenido de la asignatura como tal es de aplicación en diferentes ramas del conocimiento como la biología, química, economía, ingeniería de transporte, sistemas e informática, entre otras muchas. Además diferentes autores indican la importancia de investigar acerca de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta (Hart, 2008; Ian Anderson (2004); Debellis Valerie, Rosentein, (2004); Rivera Marrero, (2007)), la cual cubre una temática que proporciona problemas con dos principales características: por una parte, son retadores, interesantes y motivan al estudiante a comprometerse intelectualmente con la matemática; y por otra parte muchos de estos problemas, aunque conserven la característica retadora, no necesitan conocimientos sofisticados para abordarlos. Ahora bien, los problemas de la matemática discreta son apropiados para que el estudiante explore, analice, conjeture y demuestre, tal como lo muestran Denise Grenier y Charles Payan (1999) a través del planteamiento de cuatro problemas de la matemática discreta. En el Capítulo 2 del presente escrito se muestra el desarrollo de dos de los problemas con el fin de visualizar mejor la cualidad anteriormente nombrada.

Problema de investigación

La mayoría de las veces en las matemáticas el producto final de una construcción social e histórica se resume en una demostración. Lakatos muestra y analiza el proceso que está detrás de una demostración formal, a saber, una construcción que implica en ocasiones décadas o siglos para llegar al producto final, hecho que el estudiante ignora ya que la misma presentación de los textos pretende centrarse en un resultado decantado.

Este proceso heurístico que Lakatos llama "pruebas y refutaciones" en el aula se desconoce casi totalmente, y quizás sea por medio de éste que se propicie situaciones que pueden aportar al pensamiento matemático del estudiante y conducirlo a experimentar procesos de construcción de conocimiento análogos a los de los investigadores matemáticos.

Es importante resaltar que en las demostraciones no se sigue sistemáticamente un camino; al contrario, se trata de una total exploración del estudiante de una determinada conjetura. Con ello es posible, dentro de las hipótesis de la presente investigación, que se conduzca al estudiante al desarrollo del pensamiento matemático y le permita una mejor comprensión de los conceptos inmersos en la conjetura.

No se desea presentar un cuadro formal de demostraciones pues lo que se desea es dejar de lado la enseñanza tradicional. El propósito es crear un ambiente de debate social entre estudiantes con una prudente participación del docente, debate cuyo desenlace será la

[22] Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education*: The Singapore journey (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing

responsabilidad de los estudiantes: la conjetura, el contraejemplo, la demostración, así como el idear lo que Lakatos denomina contraejemplos globales. Estos son algunos de los ingredientes necesarios en dicho debate.

Por otra parte, las apreciaciones de autores reconocidos acerca de la demostración justifican el porqué del rumbo de la presente investigación. Balacheff (1987) considera que la demostración debe ocupar un lugar importante en los currículos de Francia. Análogamente Juan Godino (1997) asevera que este interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de ella. Por otra parte, Gila Hanna (1995) afirma que la demostración merece un lugar importante en el currículo de matemáticas. Todo lo anterior lleva a la formulación del siguiente **problema de investigación**:

¿Cómo aporta el método heurístico de "pruebas y refutaciones" de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático, a la solución de problemas y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes en la disciplina matemática discreta?

Preguntas de investigación

- ¿Cómo aporta el método heurístico de "Pruebas y refutaciones" de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes?
- ¿Cuál es la percepción emocional y actitudinal de los estudiantes con respecto a la clase desarrollada a través de los planteamientos de Lakatos?
- ¿Cuál es el aporte del método heurístico de Lakatos en la resolución de problemas?

Objeto de investigación

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

Objetivo general

Explorar, a través de un curso completo de matemática discreta a nivel superior, la repercusión del método heurístico descrito por Lakatos en *Pruebas y refutaciones* en el desarrollo del pensamiento matemático, en la solución de problemas y en la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes, lo cual se condensa en la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza de la matemática discreta.

Este objetivo direcciona la atención al siguiente:

Campo de acción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en la universidad en relación con el desarrollo del pensamiento matemático, la solución de problemas y la construcción de demostraciones.

Objetivos específicos

- Analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos cuando se utiliza para abordar la demostración de una conjetura o la justificación de una solución a un problema significativo.
- Explorar la actitud del estudiante cuando las clases se desarrollan bajo esta perspectiva.
- Analizar profundamente cómo la heurística de Lakatos funciona como una herramienta práctica para la resolución de problemas de matemática discreta.
- Examinar cómo la heurística de Lakatos se convierte en un vehículo eficaz para el entendimiento significativo de una demostración en la matemática discreta.
- Observar de qué manera la heurística de Lakatos fomenta el trabajo autónomo y el compromiso de los estudiantes hacia la actividad matemática

Aporte práctico de la investigación

Diseño de un curso completo de matemática discreta para estudiantes universitarios.

Aporte teórico de la investigación

Análisis de las posiciones de Timothy Gowers y Carlo Cellucci, que enfrentan dos vertientes de la actividad matemática y de la naturaleza de la misma, la de resolver problemas y la de construir teoría (demostrar teoremas) desde la perspectiva de la educación matemática.

Tareas de investigación

Para cumplir los objetivos de la tesis se identificaron y cumplieron las siguientes tareas.

1. Se profundizaron y complementaron los fundamentos teóricos que forman la base de la presente investigación.

2. Se efectuó la búsqueda y análisis de diversas publicaciones e investigaciones que aborden algún aspecto de la presente investigación.

3. Se diseñó e implementó un modelo didáctico; así como, un primer curso de matemáticas discreta dirigido a estudiantes universitarios.

4. Se realizó el diseño de una primera encuesta dirigida a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería.

5. Se recogieron datos a través de la grabación en video y un diario de campo del curso de matemática discreta.

6. Se diseñó y realizó una segunda encuesta a estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.

7. Se diseñó, aplicó y analizó los resultados de una segunda entrevista a los estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.

8. Se replanteó, rediseñó e implementó el curso de matemática discreta de acuerdo al modelo didáctico planteado.

9. Se analizó los resultados obtenidos durante toda la investigación.

Resultados esperados

Como en varias ocasiones se ha comentado existen problemáticas con respecto al aprendizaje y enseñanza de la demostración, a la motivación de los estudiantes y al desconocimiento de las características particulares de los contenidos y los problemas de la matemática discreta. Por lo anterior se espera:

- Obtener información de cómo la heurística de Lakatos mejora el proceso de la construcción de demostraciones matemáticas.
- Contribuir un modelo didáctico que mejore el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en la educación superior.
- Mejorar el aspecto actitudinal de los estudiantes hacia la matemática por medio de la resolución de problemas retadores.
- Aportar al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante específicamente como un mejor resolutor de problemas.
- Obtener información de la heurística de Lakatos como herramienta eficaz en la resolución de problemas.

En el **CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** se describen investigaciones realizadas en tres diferentes áreas de la educación matemática: La enseñanza de la demostración, enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta y la heurística de Lakatos llevada al aula de clase. Con respecto a la enseñanza de la demostración se analizan cuatro artículos. Un primer artículo denominado The Use of Logic in Teaching Proof[23], Este artículo, en términos generales, desarrolla ideas y da sugerencias específicas de cómo llevar al aula de clase la enseñanza de la demostración. El artículo se divide en tres subtemas, a saber: la importancia de los principios lógicos en la enseñanza de la demostración; escribir y re-escribir demostraciones y la importancia de ser cuidadoso al escribirlas; sugerencias para inducir al estudiante a demostrar; es decir, que sienta la necesidad de hacerlo. El segundo artículo*: The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives*[24], esta publicación se enfoca hacia tres cuestiones: ¿por qué enseñar la demostración?, ¿cuáles son los aspectos que el estudiante considera importantes por los cuales se debe llevar a cabo una demostración? y ¿cómo puede el docente promover que el estudiante sienta la necesidad de llevar a cabo una demostración? El tercer artículo, Challenges to the importance of proof [25], Hanna debate las siguientes cuestiones: ¿Dónde ubicamos la demostración en el currículo de matemáticas? ¿Qué papel debe desempeñar la demostración en el currículo? ¿Cómo se debe presentar la demostración a los estudiantes?, ¿de manera formal, informal, visual, etc.? ¿Qué rol debe desempeñar el docente en la enseñanza de la demostración? El último artículo de este grupo: Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof[26], se reporta los puntos de vista de cinco matemáticos que han tenido a cargo el curso "Introduction to mathematical reasoning" que se ofrece en diferentes universidades en los Estados Unidos y que es prerrequisito para que los estudiantes puedan acceder a cursos de alto nivel como análisis matemático y álgebra abstracta.

Con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta se analizaron seis artículos, *Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and modeling*[27]**,** Los autores muestran en primer lugar que la matemática discreta está ausente en el currículo, en la práctica del docente y en los textos escolares de Francia, y por otra parte aseveran que los problemas la matemática discreta son bien importantes ya que se consideran como una herramienta significativa para la enseñanza de la modelación y de la demostración, a través de validar y explorar afirmaciones matemáticas. *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses*[28]**,** La investigación analiza la percepción de los profesores de matemáticas en formación acerca de dos importantes cuestiones: ¿Cómo perciben los profesores en formación la matemática discreta? y ¿Cómo los profesores en formación reaccionan ante la integración de la matemática discreta en el currículo escolar? *Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States*[29]**,** Los autores del artículo presentan una visión de la situación de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en Estados Unidos. *Problem solving with discrete mathematics*[30]**,** Friedler explora la resolución de problemas a través de los tópicos de la matemática discreta a nivel elemental, concretamente en estudiantes de grado 5 del sistema educativo de Estados Unidos, niños cuyas edades oscilan entre los 10 y 11 años. *Teaching Combinatorics through Guided Discovery*[31]**,** Bogart propone una nueva manera de enseñar la combinatoria teniendo en cuenta el guided discovery model. En esta publicación Jane Korey describe la experiencia que se tuvo en dos instituciones en las cuales se enseñó combinatoria a través del método nombrado anteriormente y el método tradicional. *Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics*[32]**,** Gerald Goldin discute en este artículo acerca de las posibilidades que ofrece las matemáticas discretas en el desarrollo del pensamiento matemático y en la parte emocional del estudiante.

Para culminar el capítulo del estado del arte se presentan una serie de publicaciones acerca de las implicaciones de llevar la heurística de Lakatos al aula de clase. *Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: local counterexample and modification of proof*[33]**,** En esta publicación el autor analiza la enseñanza de la demostración a través de las reglas heurísticas de Lakatos; concretamente, estudiantes japoneses entre las edades de 14 y 15 años intentan demostrar el teorema del ángulo inscrito en un arco. *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom*[34]**,** Sean Larsen y Michelle Zandieh presentan un episodio de una clase de teoría de grupos para estudiantes universitarios ilustrando el método de la invención guiada con procesos análogos a los que describe Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones*. *Examining the Method of Proofs and Refutations in Pre-Service Teachers Education*[35] En este estudio Fatih Karakus y Mesut Butun tienen como propósito principal analizar la discusión que tienen profesores en formación entorno a una conjetura, en un ambiente que es estructurado sobre la base del método de Lakatos. *Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit*[36], en este artículo e muestra como estudiantes universitarios intentaron matematizar su

---

[23] Epp, S. S. (2009). *The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*, (74), 313.

[24] Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki, G. (in press). *The need for proof and Proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

[25] Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), pp. 42-49

[26] Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

[27] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of CERME 1,* vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck

[28] Marrero, O. R. (2007). The place of discrete mathematics in the school curriculum: An analysis of preservice teachers' perceptions of the integration of discrete mathematics into secondary level courses (Doctoral dissertation, Doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University).

[29] Debellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *ZDM,* 36(2), 46-55.

[30] Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics. National Council of teachers of mathematics*

[31] Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. *National Science Foundation* Grant Number DUE-0087466

[32] Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60.

[33] Komatsu, K. (2012) Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in Mathematical learning: local-counterexample and modification of proof. En 12th International Congress on Mathematical Education Topic Study Group 14.

[34] Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205-216.

[35] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* 27(45), 215-232.

[36] Swinyard, C.; Larsen, S (2010). Proofs and refutations as a model for defining limit**.** In: annual conference on research in undergraduate mathematics education, 13th, 2010, Raleigh, NC. Proceedings… Raleigh, North Carolina: RUME, 2010. p. 1-12. Available at: <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/>. Accessed at: Nov. 2015.

comprensión informal de límite siguiendo muy de cerca las etapas descritas por Lakatos.

En el **CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO**, se describen las teorías centrales que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de la investigación. El capítulo se divide en cinco partes, la demostración matemática en el aula de clase, el método heurístico de Lakatos, la matemática discreta, la resolución de problemas y dos posturas acerca de lo que son las matemáticas. En la primera parte se discute acerca de la noción de *demostración en matemática* teniendo en cuenta las posturas de diversos autores. En la segunda parte se describe y resume la postura epistemológica de Lakatos desarrollada en su libro "pruebas y refutaciones". En la tercera parte se muestra un plano general de la matemática discreta, sus tópicos, sus aplicaciones y la importancia que tiene dentro del currículo de matemáticas. En la cuarta parte se discuten algunas cuestiones que se consideran alrededor y a partir de la resolución de problemas: ¿qué es un problema?, ¿cuál es su importancia en la educación matemática?, ¿cuál es el rol del docente bajo esta perspectiva?, ¿qué características debe tener un buen resolutor de problemas? Para intentar responder a estas preguntas, se remite a dos autores que han contribuido de manera trascendental a la teoría: George Polya y Miguel de Guzmán, En particular se centra la atención en tres referencias teóricas: *How to solve it* y *Mathematics and plausible reasoning* de Polya y *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán. En la última sección se analizan las posturas del matemático Timothy Gowers y del filósofo Carlo Celucci relacionadas con la cuestión de si el hacer matemáticas y el método fundamental de las matemáticas es resolver problemas o construir teoría (demostrar teoremas). Gowers en su artículo "The Two Cultures of Mathematics" realiza una distinción entre aquellos matemáticos cuyo principal objetivo es resolver problemas y aquellos cuya preocupación primordial es la comprensión y la construcción de teorías. Celucci por otra parte en su artículo "Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?" discute desde un punto filosófico la naturaleza de las matemáticas. En su concepto, decir que la esencia de la matemática es solucionar problemas está fuertemente ligado con (o quizás equivalente a) decir que el método de las matemáticas es el analítico, mientras que asegurar que la matemática es esencialmente demostrar teoremas expresa el punto de vista que el método de las matemáticas es el método axiomático.

En el **CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION** se muestra el escenario de investigación el cual consta de un grupo de estudio estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería de sistemas de la Universidad Antonio Nariño en la ciudad de Bogotá, Colombia, matriculados en el curso de Matemática Discreta ofertado por la Facultad de Ciencias y el programa de Licenciatura en Matemáticas. El curso tiene una duración de un semestre académico con seis horas semanales de clase. Los participantes en el estudio correspondiente fueron en total seis, de los cuales cinco pertenecían al programa de licenciatura en matemáticas y uno al de ingeniería de sistemas. En relación con el enfoque metodológico, la investigación se ajusta a un enfoque cualitativo. E método de investigación es el estudio de casos. Para la recolección de datos re realizaron dos encuestas, una entrevista, diario de campo y todas las clases fueron registradas en video. Se diseñó un curso de matemáticas discretas para ser aplicado en estudiantes universitarios de ingeniería y licenciatura en matemáticas.

El **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**. La presentación y análisis de los resultados incluyen tres partes principales: la primera está relacionada con las etapas de la heurística de Lakatos, la segunda es el análisis de la encuesta número 2 (ver Capítulo 3) aplicada al grupo, y la tercera versa sobre los objetivos general y específicos propuestos en el trabajo de investigación.

Se concluyó puntualmente en este capítulo que la heurística de Lakatos y la resolución de problemas fue un método adecuado para llevar el curso de matemática discretas. Tuvieron un impacto en los estudiantes en cuanto a su actitud, el pensamiento autónomo, la exploración de estrategias y la investigación en matemáticas. Respecto a la demostración, el método de Lakatos fue una herramienta que aportó en cuanto a la función explicativa que ésta debe tener. Por otra parte, los resultados mostraron que el curso de matemáticas discretas llevado a cabo a través del método heurístico de Lakatos y la resolución de problemas también fortalece el pensamiento matemático, la actitud y el compromiso de los estudiantes hacia la matemática, un trabajo autónomo que lo conduce hacia la investigación matemática.

CONCLUSIONES

La posición de Gowers concluye, frente a la naturaleza de "el hacer matemáticas", que en contraposición al dominio de la generación de teorías en el siglo XX, a las dos culturas (priorizar el resolver problemas o el construir teoría) se les debe atribuir la misma importancia. Celucci concluye, desde un punto de vista filosófico frente a la naturaleza de la matemática, que el método de las matemáticas es el analítico y por ende la matemática en esencia es resolución de problemas, aunque tanto el método analítico como el axiomático juegan un papel en ella.

Ahora bien, ¿qué se puede decir desde la perspectiva de la educación matemática? Para responder a ello, es ineludible tener en cuenta la naturaleza de la matemática, de "el aprender matemáticas" y de los objetivos de la educación matemática (la naturaleza de "el conocer matemáticas"). Tanto la primera pregunta como la tercera (ésta última en parte) han sido respondidas a satisfacción del autor de la presente tesis. Celucci ha argumentado convincentemente que el método de la matemática es el analítico. Lakatos ha desarrollado una teoría falibilista y cuasiempírica acerca de la naturaleza del conocimiento matemático lo que implica que el conocer matemáticas involucra un proceso falibilista y cuasiempírica. De este modo queda por avanzar en la respuesta a la pregunta que concierne la naturaleza de "el aprender matemáticas".

Se considerarán algunas cuestiones que son importantes para poder dar una respuesta. ¿Qué es lo prioritario (sin la exclusión del otro) en la educación matemática: el aprendizaje de teoría o la resolución de problemas?, y ¿Cómo trabaja el estudiante a partir de la resolución de problemas y cómo a través de la demostración rigurosa de teoremas matemáticos?

Para abordar estas preguntas, en primer lugar, se tendrá en cuenta las posiciones de Polya y Schoenfeld. Como ya se ha señalado, Polya en su obra "How to solve it" [37] asegura que, si el profesor desafía la curiosidad de sus estudiantes proponiendo problemas proporcionales a su conocimiento, y les proporciona una guía a solucionarlos por medio de preguntas estimulantes, entonces ellos pueden experimentar el pensamiento matemático independiente. Esta postura, y así lo muestra Polya en toda su obra, prioriza la resolución de problemas antes que el entendimiento de teoría, se enfatiza en motivar y desafiar al estudiante con problemas que él pueda abordar. Polya también afirma que la matemática tiene dos caras: la matemática presentada de manera sistemática como ciencia deductiva y la matemática experimental, una ciencia inductiva. En su libro, muestra cómo en la educación matemática se puede abordar esa matemática experimental a través de la descripción de una heurística en la resolución de problemas. En concordancia con lo anterior Polya escribe "*permítame expresar lo que pienso cerca de lo que es la enseñanza. Quizás, el primer punto, el cual es ampliamente aceptado, es que la enseñanza debe ser activa, o mejor, el aprendizaje debe ser activo…el principal objetivo en la enseñanza de la matemática es el desarrollo de estrategias para la*

[37] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

solución de problemas"[38] . Ahora bien, ¿por qué el énfasis de Polya en mostrar una heurística para el descubrimiento matemático? Quizás es debido a que para él la dificultad de entender la matemática no estuvo en la seguir los procesos deductivos de una demostración, sin en pensar como esos resultados fueron descubiertos. Puntualmente Polya, refiriéndose a sí mismo escribe "*yo llegué a las matemáticas muy tarde…cuando me acerqué y comencé a aprender, yo pensé: bien, es cierto, la demostración parece concluyente. ¿Pero cómo es que la gente encuentra esos resultados? Mi dificultad en comprender las matemáticas estuvo en pensar como ella fue descubierta"*[39].

Schoenfeld, siguiendo las ideas de Polya, en su libro "Mathematical Problem Solving" escribe acerca de la comprensión y enseñanza de las habilidades para la solución de problemas. En el texto presenta diferentes problemas desafiantes que requieren un conocimiento básico de la educación secundaria y algunos otros que requieren un conocimiento más sofisticado. No obstante, como él mismo afirma, los problemas sí requieren de un substancial aporte de razonamiento y pensamiento matemático.

Tanto Polya como Schoenfeld enfatizan en el desarrollo del pensamiento matemático, logrado a través de resolución de problemas, más que en el entendimiento de teoría, sin desconocer que éste es un resultado natural de aquél y que se alimentan mutuamente. En este orden de ideas y a través de los resultados obtenidos en la presente investigación, se corrobora la postura de estos dos autores concretando que, en la educación matemática, en el aprender matemáticas, la comprensión de teoría debe jugar el papel de antecedente para el objetivo prioritario que es "hacer matemáticas" o sea, ser un mejor resolutor de problemas y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Un aspecto adicional a considerar es la posición de Gila Hanna en su artículo "Challenges to the importance of proof" en cuanto a la resolución de problemas y al entendimiento de teoría. La autora asegura que la resolución de problemas refuerza el entendimiento de conceptos y la teoría matemática. Aunque Hanna escribe puntualmente sobre el papel de la demostración, es claro que no es aquella demostración que el docente presenta como un producto acabado a través de la deducción de reglas básicas, sino aquella que es una construcción propia del estudiante y que tiene la característica de ser explicativa. Así, la demostración de un teorema se puede ver como la resolución a un problema y como tal refuerza el entendimiento.

Los resultados de la presente investigación permitieron corroborar la priorización de la resolución de problemas en términos de varios parámetros. En primer lugar, frente a la actitud del estudiante bajo este enfoque y bajo el enfoque de la matemática como ciencia deductiva, los estudiantes 3, 5 y 1 comentaron con claridad que un aspecto que diferencia la metodología del curso de matemática discreta realizado fue el enfatizar en la resolución de problemas lo cual motiva más que la metodología de muchos otros cursos que se basan en aplicación de reglas, algoritmos, definiciones, teoremas y propiedades.

En segundo lugar frente al entendimiento de teorías como se mostró en el análisis de resultados, particularmente en la sección 4.5.2

Por otra parte, respecto al aporte práctico de la presente investigación, el aprendizaje centrado en la resolución de problemas que constituyen un reto para el estudiante fue un aspecto de la metodología llevada a cabo durante el curso que aportó para que el estudiante se comprometiera hacia la actividad matemática. En particular, el proponer un problema para ser desarrollado durante todo el semestre académico (conjetura principal), propició un escenario óptimo y de total concordancia con el método heurístico de Lakatos. Los estudiantes exploraron, indagaron, propusieron y socializaron a medida que, de manera independiente, trabajaron motivados en la solución del problema. Esta estrategia innovadora junto con la metodología del curso permitió involucrar al estudiante en una genuina investigación en matemáticas.

El diseño del curso contempló problemas categorizados en diferentes niveles de dificultad, lo cual implicó que, aunque los sujetos de estudio fuesen heterogéneos, en términos de las capacidades y dificultades manifestadas en matemáticas, a cada estudiante se le llevara, y él o ella se esforzara, a lograr su mejor nivel posible, desarrollando de esta forma el pensamiento matemático.

A través de la metodología propuesta para el curso los estudiantes resolvieron 25 de los 31 problemas propuestos y trabajados. De ahí se puede concluir que el método de Lakatos es una muy buena herramienta para abordar problemas de la matemática discreta, los cuales, como se observó, tienen una característica intrínseca de ser motivadores en concordancia con los resultados de diferentes autores que han investigado en este campo de la educación matemática. El método de la heurística de Lakatos es una buena herramienta para que los estudiantes construyan sus propias demostraciones que a su vez permite que el estudiante entienda por qué un teorema se cumple, tal y como lo aconseja Gila Hanna y como siempre buscaba el inigualable matemático Paul Erdős.

La presente investigación también permitió observar cómo el curso de matemáticas discretas para estudiantes universitarios puede llevarse a cabo con resultados favorables a través del método de la heurística de Lakatos. El tópico de matemáticas discretas en los últimos años ha ocupado un lugar importante en el currículo de matemáticas en países como los Estados Unidos, tal como lo expresan autores como Gerald A Goldin, Joseph Rosenstein, Valerie DeBellis entre otros. El NCTM en "Principles and standards for school mathematics (2000)" sostiene la posición que la matemática discreta debe ser parte integral del currículo de matemáticas.

La matemática discreta es una rama de la matemática considerada especialmente apta para desarrollar el pensamiento matemático del estudiante por el tipo de problemas que se pueden proponer para motivar y comprometerlo hacia la actividad matemática. Si bien en los últimos años ha ido cobrando importancia en países como los Estados Unidos, no obstante, en Colombia existen pocas investigaciones sobre la enseñanza de esta rama a nivel primario, secundario o superior. Adicional a esto, los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia (2009) no contemplan estos tópicos para la enseñanza en las escuelas de nivel primario y secundario. Aunado a lo anterior, son pocos los planes de estudio de licenciatura en matemáticas y matemáticas de las universidades colombianas que contemplan esta asignatura, lo cual influye directamente en el poco conocimiento de dichos tópicos al nivel de la educación básica y media.

Ahora bien, los resultados de la presente investigación mostraron que desde la perspectiva de la educación matemática se prioriza la resolución de problemas antes que el entendimiento de teorías y la demostración de teoremas para aprender matemáticas, por lo tanto, es necesario que este enfoque se abarque en los cursos de formación matemática en todos los niveles.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda que los cursos de matemáticas discretas a nivel superior re lleven a cabo bajo una metodología análoga a la que se describe en este estudio.
- Se recomienda que la comunidad de educación matemática en Colombia realice nuevas investigaciones aportando, analizando y obteniendo resultados que evalúan el valor de la matemática

[38] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
[39] Ibidem.

discreta en el currículo escolar, además de investigaciones que muestren la importancia de esta rama para el desarrollo del pensamiento matemático y la formación de actitudes positivas de los estudiantes hacia la matemática.

- Se requieren investigaciones que muestren resultados acerca de la manera en que se puede enseñar este tópico a nivel primario y secundario.
- Es necesario adelantar investigaciones adicionales que analizan la manera de utilizar la heurística de Lakatos como método para la enseñanza-aprendizaje de otros tópicos de la matemática que suelan considerarse más abstractos y formales, tales como el análisis real o el álgebra abstracta, de manera similar pero más a fondo de lo que reportaron Larsen y Swinyard en los artículos que se revisaron en el Capítulo 1
- Se requieren investigaciones que evalúan o valoran la repercusión de la heurística de Lakatos en la enseñanza de la matemática en la educación primaria, secundaria y media.
- Se requieren estudios que muestren con detalles la relación del método heurístico de Lakatos con el pensamiento matemático divergente y con el convergente.

ARTÍCULOS DEL AUTOR EN ELABORACIÓN

La heurística de Lakatos en una clase de Teoría de Grafos.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. *School Science and Mathematics*, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. National Science Foundation Grant Number DUE-0087466

Debellis, V.A. & Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*. 36 (2), 46-55.

De Guzmán Ozámiz, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*.

Epp, S. S. (2009). *The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*, (74), 313.

Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics*. National Council of teachers of mathematics

Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60

Grenier, D., Payan, C. Discrete matheamtics in relation to learning and teaching proof and modelling. In: Schwank, I. eds. (1999) *Proceedings of the Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-1)*. Universität, Osnabrück, pp. 143-155

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-50.

Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

Komatsu, K. (2012). *Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: Local-counterexample and modification of proof*. In Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 2838-2847).

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom.* Educational Studies in Mathematics, 67(3), 205–216..

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* I. Induction and analogy in mathematics. II. Patterns of plausible inference.

Rivera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

Swinyard, C. (2011). *Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-114.

Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education: The Singapore journey* (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & *Winicki*, G. (in press). *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE UN ENFOQUE CUALITATIVO

EDISON CAICEDO PARRA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
edicaicedo@uan.edu.co

GERARDO CHACÓN GUERRERO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
gerardoachg@uan.edu.co

Resumen

El propósito de esta investigación es diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, con un enfoque cualitativo y a través de la resolución de problemas, para establecer una metodología que sea aplicable a los cursos de ecuaciones diferenciales. Se diseñó un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en los métodos cualitativos y basados en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, en el que participaron cinco estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño. Una vez aplicados los planes de clase y las encuestas semi-estructuradas se analizaron desde un enfoque cualitativo.

Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes tienen una gran motivación e interés durante el curso, debido a que la metodología empleada basada en la resolución de problemas, empleando conjeturas desde la construcción del modelo hasta llegar la solución final y el uso de la tecnología para estudiar los métodos cualitativos y numéricos favorecen su comprensión de los contenidos del curso. Por otro lado, el modelo didáctico resultado de la investigación ofrece una ruta y ciertos recursos que promueven la actividad matemática en los cursos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se recomienda que tanto el syllabus del curso como los planes de clase sean revisados, adaptados o ajustados de acuerdo a las necesidades de los estudiantes o docentes que deban impartir el curso.

Abstract

The purpose of this research is to design and evaluate a didactic model for the learning of differential equations, based on the quasi-empirical conception of mathematics, with a qualitative approach and through the resolution of problems, to establish a methodology that is applicable to the courses of differential equations. A complete course of differential equations was designed with emphasis on qualitative methods and based on the quasi-empirical conception of mathematics, in which five engineering students from the Antonio Nariño University participated. Once the class plans and the semi-structured surveys were applied, they were analyzed from a qualitative approach.

The obtained results show that the students have a great motivation and interest during the course, because the methodology used based on problem solving, using conjectures from the construction of the model until arriving at the final solution and the use of the technology to study The qualitative and numerical methods favor their understanding of the course contents. On the other hand, the didactic model resulting from the research offers a route and certain resources that promote mathematical activity in the courses of differential equations. However, it is recommended that both the syllabus of the course and the class plans be reviewed, adapted or adjusted according to the needs of the students or teachers who must teach the course.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge debido a la importancia que tiene la modelación mediante ecuaciones diferenciales tanto en las ciencias básicas como en las humanas y sociales, lo cual es de suma relevancia, ya que desde que Newton logró desarrollar el cálculo, y más importante aún, modelar las leyes de la mecánica clásica valiéndose de las ecuaciones diferenciales, éstas se convirtieron en un importante recurso para la modelación y solución de problemas.

Un obstáculo que presenta el trabajo con las ecuaciones diferenciales tiene que ver con la dificultad o imposibilidad para resolver analíticamente muchas de ellas, situación que ha representado un gran reto para la comunidad matemática. Con el propósito de hacer frente a tal dificultad Henri Poincaré, hacia finales del siglo XIX estableció un nuevo paradigma en la solución de las ecuaciones diferenciales, al tratar el problema de los tres cuerpos (Delshams A. , 2005), que hoy se conoce como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

No obstante, las observaciones anteriores y la gran disponibilidad de recursos tecnológicos con que se cuenta para el aprendizaje de las matemáticas y más específicamente de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, actualmente se observa que algunos de los cursos que abordan estas disciplinas, lo hacen desde una perspectiva netamente algorítmica.

De este modo, el docente se limita a recitar los distintos tipos de ecuaciones que se presentan en los problemas habituales y la respectiva receta o algoritmo que permite resolverla de manera analítica. Así, el curso se reduce a estudiar un libro con un esquema predefinido que no da lugar a la generación de un pensamiento matemático que faculte al estudiante para hacer frente a problemas retadores que encontrará en su práctica profesional (Moreno & Azcárate, 2003).

Un concepto fundamental en educación matemática es el de sistemas de práctica, que se entienden como la actuación o expresión realizada por una persona o institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, 2009). La práctica es, por tanto, una acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Bajo esta perspectiva a continuación, se enuncian una serie de factores vistos inicialmente y considerados como insuficiencias en los sistemas de práctica actuales en relación con la enseñanza – aprendizaje de ecuaciones diferenciales:

- Algunos planes de estudio y libros de texto contemplan la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales bajo un enfoque cualitativo, no obstante el rol protagónico sigue siendo del docente (Unesco, 1996).
- La modelación y la resolución de problemas relacionados con sistemas dinámicos no constituye el eje articulador en los cursos de ecuaciones diferenciales (Moreno & Azcárate, 2003).
- Aunque en la literatura de investigación en educación matemática existen diversos escritos sobre las ecuaciones diferenciales y sus implicaciones, no se cuenta con registros donde se relaten experiencias sobre un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis cualitativo y desde el cuasi-empirismo.

La propuesta de un modelo para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales fundamentada en una concepción cuasi empírica de las matemáticas, promueve sistemas de práctica adecuados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Lakatos, 1978), de manera que los egresados de las carreras de ingeniería estén en mejores posibilidades de aportar soluciones creativas e innovadoras a los problemas retadores y propios de esta disciplina, apoyándose además en la tecnología. Debido a la naturaleza del proyecto, se considera que está en consonancia con las siguientes líneas de investigación del Doctorado en Educación Matemática:

- La enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas
- Cálculo intensivo y uso de la tecnología en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y
- La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas a través de sus aplicaciones.

Por lo cual se plantea como **problema la investigación**: ¿qué implicaciones tiene un modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, para potenciar la actividad matemática en la resolución de problemas retadores?

Se precisa como **objeto de la investigación**: sistemas de prácticas empleados para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería.

El **objetivo general** consiste en diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas con un enfoque cualitativo, a partir del estudio de los sistemas dinámicos, que promueva la actividad matemática orientada hacia la resolución de problemas retadores.

Los **objetivos específicos** son:

1. Determinar los elementos más relevantes que se deben considerar para el diseño de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo.

2. Caracterizar los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, evidenciados en los estudiantes durante las diferentes fases de la valoración del modelo didáctico.

3. Establecer y estudiar los principales aportes que deriven de la valoración del modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático.

El **campo de acción** se enmarca en los sistemas de práctica empleados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Las **preguntas científicas** son:

1. ¿Cuáles son los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para el diseño y valoración de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
2. ¿Cuáles son las principales características de los procesos de aprendizaje de los estudiantes durante las diferentes fases del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
3. ¿Cuáles son los principales aportes y características de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático y su incidencia en la solución de problemas retadores?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Revisar el estado del arte de la investigación dirigida a la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.
2. Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan un modelo didáctico ajustado al proyecto.
3. Elaborar un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para favorecer el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.
4. Análisis de resultados, obtenidos de la validación del modelo.
5. Elaboración de conclusiones y redacción del documento científico.

La tesis se sustenta en investigación cualitativa, a través de métodos teóricos y empíricos, la información recolectada inicialmente es comparada, para luego establecer categorías de significado.

Durante el desarrollo de la investigación se emplearon los siguientes métodos:

Métodos teóricos

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, propiciando una concatenación lógica de las tareas realizadas.

Análisis-síntesis e inducción-deducción. Esta metodología está presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y elaborar las conclusiones y generalizaciones.

Métodos del nivel empírico

La observación científica. Método que permite conocer la realidad mediante la percepción directa en clases, talleres y otras actividades docentes.

Encuesta. Se realizó una encuesta a los profesores y los estudiantes.

Los datos recolectados se analizaron mediante Atlas.ti® y se organizaron para efectuar una codificación en un primer plano. Posteriormente la codificación en un segundo plano permitió comparar categorías y agrupar en temas, con el fin de obtener clasificaciones.

El **aporte teórico** radica en el diseño de un modelo didáctico para implementar el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales con un enfoque cualitativo, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas y orientado a la solución de problemas retadores en sistemas dinámicos. Además, se elaboró el cuerpo de recomendaciones, derivadas del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para su inclusión en los sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo.

Por otro lado, se enuncian algunos elementos teóricos que permitan comprender los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, apoyado en un paquete computacional (Maple®) y sustentado en la resolución de problemas retadores.

El **aporte práctico** consistió en el diseño de un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en el uso de la teoría cualitativa.

Se considera que los aportes novedosos y originales del trabajo tienen que ver con la reflexión acerca de las implicaciones en torno a:

- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo y
- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas.
- La modelación y solución de problemas retadores relacionados con las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, a partir del razonamiento cuasi empírico y desde un enfoque cualitativo.

La estructura de la tesis es la siguiente:

Introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos.

- Introducción, justificación de la investigación.
- Primer capítulo, estado del arte.
- Segundo, fundamentos teóricos sobre la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos en los

sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las matemáticas.

- Tercero, elaboración del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de la matemática, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, así como una metodología fundamentada en una revisión de los sistemas de práctica, que considere el uso de un Maple 18® en aplicaciones prácticas.

Cuarto, aplicación y valoración del modelo formulado y su metodología mediante la aplicación del mismo en cursos regulares de ecuaciones diferenciales en la Universidad Antonio Nariño; la información se recolectará empleando métodos cualitativos.

En el CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE. En la literatura actual, no son muchas las experiencias de aula documentadas acerca del proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, sin embargo, luego de una ardua búsqueda se han logrado recabar ciertos documentos que se refieren en algunos aspectos al tema de la presente investigación.

Los documentos que se analizaron como estado del arte en este estudio se caracterizaron y a partir de dicha caracterización se establecieron tres categorías:

1. Enseñanza - Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con enfoque cualitativo.
2. Enseñanza-Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con uso de la tecnología.
3. Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.

En estas categorías se destacan investigadores como Rasmussen y otros (2011), Nápoles (2004), Blanchard, Devaney y Hall (1994), West y otros (2012), Kwon y otros (2005), entre otros, los cuales hacen referencia a algunos aspectos relacionados con las ecuaciones diferenciales, tales como una reseña histórica acerca del enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales, algunas experiencias de clase con las ecuaciones diferenciales y alusiones al tratamiento de ciertos temas de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y sus implicaciones. Estos trabajos no hacen referencia a la realización de un curso completo de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas y teniendo como eje transversal la resolución de problemas.

En el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO. Dentro del marco teórico para la presente investigación, se consideran los elementos que servirán de fundamentos para el modelo didáctico, y sus implicaciones en diversos órdenes. También se aborda la construcción de modelos como el punto de partida para la comprensión y solución de problemas, la modelación de situaciones problema mediante ecuaciones diferenciales, sus propiedades y características, los fundamentos teóricos del modelo epistemológico de *Pruebas y refutaciones* y de resolución de problemas, para finalmente incluir el uso de la tecnología en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Este capítulo se refiere a los fundamentos sobre los que se basa el modelo didáctico propuesto en la investigación, algunos de los cuales pueden ser genéricos, sin embargo, dichos fundamentos se enmarcan en el contexto de un curso de ecuaciones diferenciales y a su vez permiten caracterizar delimitar este trabajo**.** El marco teórico trata cinco elementos considerados fundamentales en la investigación.

Primero, se exponen los fundamentos epistemológicos, lo cual tiene que ver con la concepción cuasi empírica de las matemáticas (Lakatos, 1978), la cual afirma que las matemáticas no surgen de manera espontánea ni mucho menos tan elaborada como la presentan los libros de texto. Lakatos sugiere que todo parte de una conjetura que debe ser sometida a prueba y sufrir un proceso de transformación hasta culminar en algún teorema.

En segundo lugar, se estudian los sistemas dinámicos y su génesis que data de la segunda mitad del siglo XVII con el advenimiento del cálculo que posibilito el estudio de ciertos fenómenos que cambian en el tiempo. El hecho que marca el inicio de la teoría cualitativa de las ecuaciones de las ecuaciones diferenciales es cuando Henri Poincaré resuelve el problema de los tres cuerpos, el cual, no podría ser tratado con los métodos analíticos conocidos hasta entonces, con lo cual se inicia un novedoso paradigma en lo relacionado con las ecuaciones diferenciales.

Finalmente, se hace mención de los fundamentos metodológicos que son los elementos que estructuran el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, dichos elementos son:

1. Situación inicial de aprendizaje.
2. Marco de trabajo y metas.
3. Contenidos y materiales.
4. Proceso y métodos de trabajo y
5. La evaluación.

Cabe aclarar que este proceso no necesariamente debe ser lineal, es decir, el orden de los componentes puede variar de acuerdo a las circunstancias.

CAPÍTULO 3. MODELO DIDÁCTICO. Aquí se tratan de manera amplia los fundamentos en que se basa el modelo didáctico iniciando con algunos principios básicos:

1. El proceso de enseñanza aprendizaje entendido como un sistema complejo debido a que en el influyen muchas variables: ¿que se aprende?, ¿dónde se aprende? ¿Cuándo y cómo se aprende? todas ellas de vital importancia por lo que deben ser consideradas para la formulación del modelo didáctico.

2. La resolución de problemas como opción metodológica que enmarca la relación docente – alumno - conocimiento matemático. En cuanto al trabajo en aula y la planeación de los problemas, se deben tener presentes ciertas consideraciones. En primer lugar, el estudiante se debe sentir motivado para asumirlo como propio, en segunda instancia requiere contar con las herramientas matemáticas adecuadas para hacer frente al problema, y por último el problema debe representar un reto para quien lo resuelve. Según Schoenfeld (Schoenfeld, 1992), se debe lograr que el estudiante esté en capacidad de diseñar una estrategia de trabajo, de modo que controle sus acciones, las modifique, las refuerce o las ajuste según sea el caso y además se den las condiciones para replicarlas o rediseñarlas en diversos contextos.

3. La resolución de problemas como generadora de la actividad matemática en el aula: Experimentación - conjetura – prueba – refutación – aplicación. En efecto las ecuaciones diferenciales ofrecen diferentes retos, desde la concepción de una hipótesis para plantear un modelo, pasando por las estrategias de resolución del sistema o la ecuación diferencial que derive del modelo, en el mismo análisis cualitativo, hasta la recopilación de todos los resultados obtenidos del proceso. En este punto, se hace necesario tener una estrategia, a partir de la comprensión de una determinada situación, valerse de las heurísticas para proponer o refinar un modelo, validarlo y confrontar las posibles soluciones con datos reales con el fin de probar la eficiencia del método empleado en la resolución del problema.

4. Recursos: Uso de la tecnología. se apela a la incorporación de la tecnología para promover la conexión entre las distintas partes de la

matemática, resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar métodos numéricos, e interpretar líneas de fase y campos de pendientes.

5. Metodología: Circunstancia inicial del alumno. Por sus particularidades ellos tienen sus propias necesidades, demandas y objetivos en relación con la enseñanza y cada alumno puede aprender mejor si identifica el enfoque de aprendizaje que le favorece. Lo anterior determina la metodología y estrategias empleadas para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

6. Marcos: Los marcos tienen que ver con las condiciones que rigen la enseñanza las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, y surgen en diferentes niveles tales como el salón de clase, la universidad, o la comunidad. Dichos marcos influyen en la planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza (Guldbrandt, 2005).

7. Objetivos: Son los propósitos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas (Gulbrandt, 2005).

8. Contenidos/materiales: Se refiere al contenido de la enseñanza, tanto el material como al plan de estudios.

Al decidir sobre el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas se deben encontrar materiales (objetos de aprendizaje) que se supone conducirán al alumno a alcanzar los objetivos (Guldbrandt, 2005).

9. Procesos y métodos de trabajo: Los procesos de trabajo tienen que ver con lo que el profesor y el alumno eligen hacer durante la enseñanza y los métodos son los antecedentes y argumentos para las diferentes elecciones. Incluye tanto consideraciones generales como individuales relacionadas con el carácter didáctico. Este concepto tiene que ver con la relación entre la enseñanza y el aprendizaje (Guldbrandt, 2005).

10. Evaluación

La evaluación de los procedimientos se llevó a cabo en tres diferentes aspectos así:

- Comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden.

Los instrumentos empleados para llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes de los tópicos anteriores son:

- Planes de clase o actividades de trabajo de manera individual y grupal.
- Entrevistas semi-estructuradas.

Se elaborarán tres grupos de actividades basadas en los siguientes tópicos:

- Ecuaciones autónomas de primer orden
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones no lineales

11. Modelo preliminar

En atención a las anteriores consideraciones se elaboró el siguiente esquema, (Figura 1) que recoge de modo simplificado los elementos de un modelo didáctico, que sirve como guía inicial para el diseño del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y es confrontado posteriormente con la experiencia de la aplicación del syllabus y los planes de clase.

***Figura 1*: Modelo didáctico preliminar.**

CAPITULO 4. APLICACIÓN DE LOS PLANES DE CLASE. Durante el segundo semestre del año 2015 y en el curso inter-semestral de comienzo del año 2016, se aplicaron de manera preliminar los planes de clase para el respectivo ajuste. Todo el estudio se llevó a cabo en la universidad Antonio Nariño sede sur en la ciudad de Bogotá. La aplicación definitiva se llevó a cabo durante el primer semestre de 2016 en un curso regular de ecuaciones diferenciales, con un grupo de cinco estudiantes en jornada diurna y una intensidad de cuatro horas semanales para un total de 64 horas presenciales durante el semestre.

Los estudiantes que participan del estudio están cursando cuarto semestre de sus respectivas carreras, y en los tres semestres previos han tomado los cursos de cálculo diferencial y solución de problemas durante el primer semestre, en segundo semestre cálculo diferencial con geometría analítica y en tercer semestre cálculo multivariado con álgebra lineal.

A continuación un ejemplo de los planes de clase aplicados durante la investigación.

Ecuación de Verhulst o Logística

Como se notó el modelo de Malthus no predice adecuadamente la población de los Estados Unidos por lo tanto se debe mejorar si es posible o conjeturar otro que se ajuste a la situación.

Los estudiantes entienden que el crecimiento de una población depende de los recursos y que estos no son ilimitados, pero igual el modelo de Malthus funciona con poblaciones pequeñas; por lo tanto, coinciden en que este modelo debe considerar los recursos y se parte de la siguiente premisa:

$$\frac{dP}{dt} = kPx$$

x debe estar cerca de 1 si la población es pequeña y si la población crece más que los recursos x debe ser negativo. En este punto los estudiantes sufren un bloqueo, de manera que con intervención del profesor se logra concluir que x debe ser:

$$x = 1 - \frac{P}{N}$$

Donde N representa los recursos y P la población, de manera que si $P > N$ x se hace negativo, por tanto la población decrece, pero sí $P < N$ x es positivo de modo que la población crece, así las cosas el modelo quedo así:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Una vez afinado el modelo los estudiantes deben hacer el análisis cualitativo de la ecuación diferencial, es decir, encontrar los puntos o soluciones de equilibrio; Juan rápidamente dice que sí $P = 0$, se tiene una solución de equilibrio, la pregunta que sigue es si hay más soluciones de equilibrio, la respuesta a esta pregunta no surge tan rápidamente como la anterior.

Después de pensarlo algún tiempo Fabio cree que $P = N$ es otra solución de equilibrio, lo cual efectivamente es cierto, ahora cada estudiante debe bosquejar las soluciones junto con las soluciones de equilibrio en el plano $P - t$, a los cinco estudiantes les resulta relativamente fácil bosquejar las soluciones de equilibrio, pero se preguntan ¿cómo bosquejar otras soluciones?

Juan afirma que si la población aumenta haciéndose mayor que N, lo que está en el paréntesis tiene signo negativo, por lo tanto la ecuación diferencial es negativa también, obvio siendo P y K positivos, de manera que la población decrece. Por otro lado si $N > P$, lo que está en paréntesis tiende a 1, lo cual significa que se obtendría nuevamente la ecuación de crecimiento exponencial, que como se vio solo funciona para poblaciones muy pequeñas. David dice que si $0 < P < N$, la población va creciendo hasta acercarse a N. (ver Figuras 2 y 3)

>

$$dfieldplot\left(diff\,(p(t),\,t) = p(t) - p(t)^2, p(t), \mathrm{t} = 0\,..5, \mathrm{p} = -2\,..3\right)$$

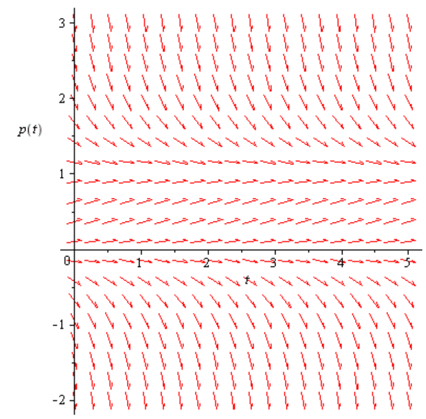
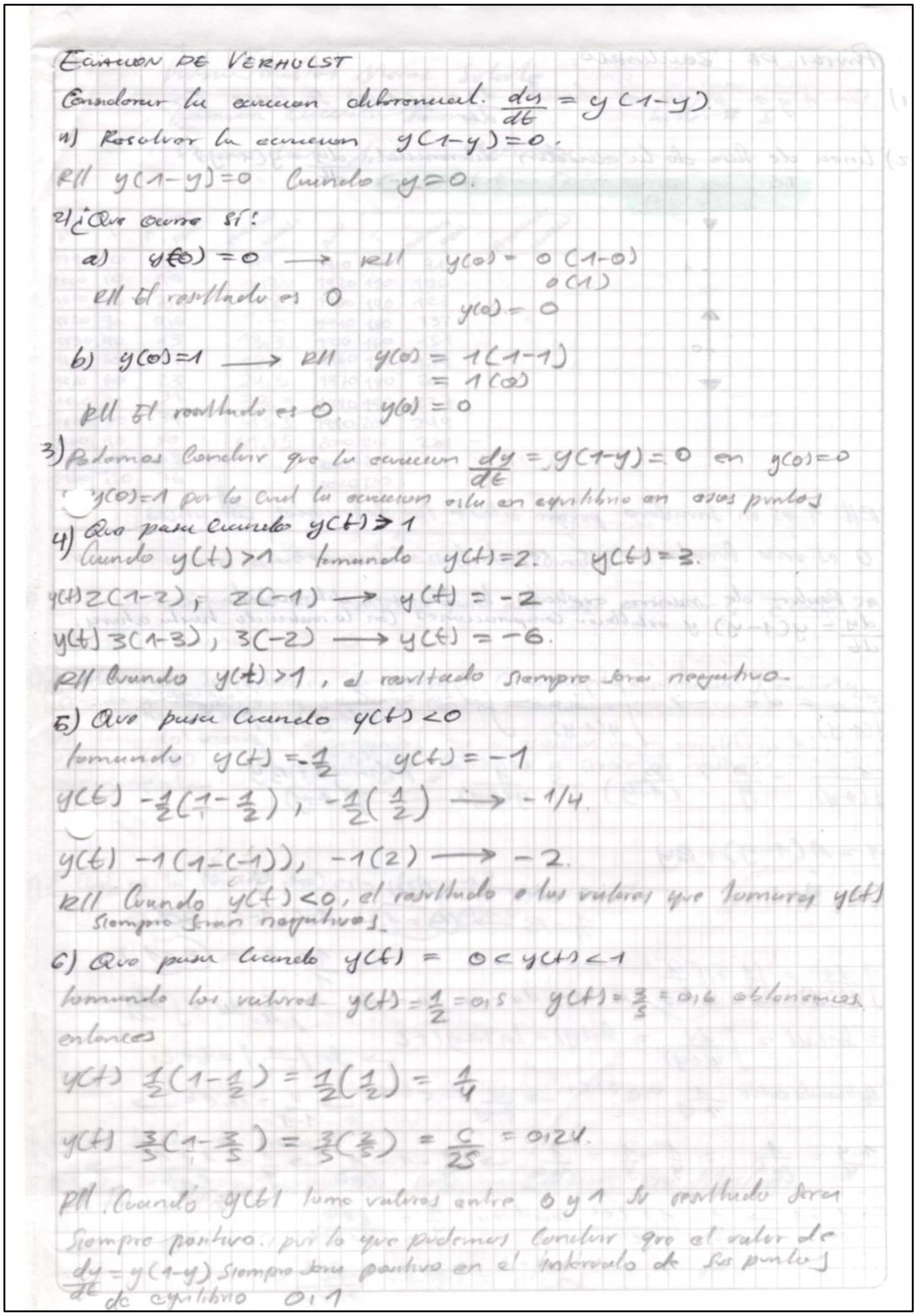


***Figura 2*: Campo de pendientes de la ecuación de Verhulst.**



Ecuación de Verhulst

Considerar la ecuación diferencial. $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$

1) Resolver la ecuación $y(1-y)=0$.

R// $y(1-y)=0$ cuando $y=0$.

2) ¿Qué ocurre si?

a) $y(0)=0 \longrightarrow$ R// $y(0) = 0(1-0)$
$0(1)$
$y(0) = 0$

R// El resultado es 0

b) $y(0)=1 \longrightarrow$ R// $y(0) = 1(1-1)$
$= 1(0)$

R// El resultado es 0 $y(0) = 0$

3) Podemos concluir que la ecuación $\frac{dy}{dt} = y(1-y) = 0$ en $y(0)=0$ y $y(0)=1$ por lo cual la ecuación está en equilibrio en esos puntos

4) Qué pasa cuando $y(t) \geq 1$

Cuando $y(t)>1$ tomando $y(t)=2$. $y(t)=3$.

$y(t)\ 2(1-2),\ 2(-1) \longrightarrow y(t) = -2$

$y(t)\ 3(1-3),\ 3(-2) \longrightarrow y(t) = -6$.

R// Cuando $y(t)>1$, el resultado siempre será negativo.

5) Qué pasa cuando $y(t)<0$

tomando $y(t) = -\frac{1}{2}$ $y(t) = -1$

$y(t)\ -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}),\ -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) \longrightarrow -1/4$.

$y(t)\ -1(1-(-1)),\ -1(2) \longrightarrow -2$.

R// Cuando $y(t)<0$, el resultado o los valores que tomarás $y(t)$ siempre serán negativos.

6) Qué pasa cuando $y(t) = 0<y(t)<1$

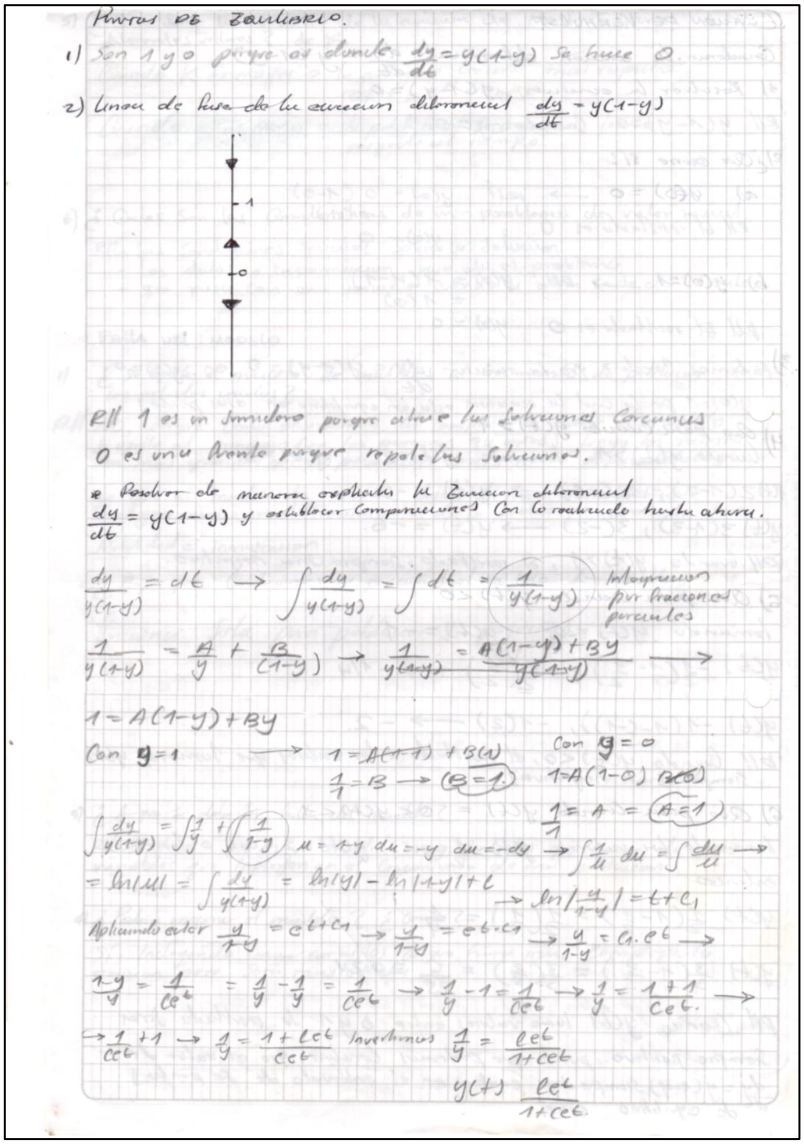
tomando los valores $y(t) = \frac{1}{2} = 0,5$ $y(t) = \frac{3}{5} = 0,6$ obtenemos entonces

$y(t)\ \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$y(t)\ \frac{3}{5}(1-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}(\frac{2}{5}) = \frac{6}{25} = 0,24$.

R// Cuando $y(t)$ toma valores entre 0 y 1 su resultado será siempre positivo. por lo que podemos concluir que el valor de $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ siempre será positivo en el intervalo de sus puntos de equilibrio 0 y 1

***Figura 3*: Análisis de la ecuación de Verhulst.**



Puntos de Equilibrio.

1) Son 1 y 0 porque es donde $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ se hace 0.

2) Linea de fase de la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$

1

0

R// 1 es un sumidero porque atrae las soluciones cercanas

0 es una fuente porque repele las soluciones.

* Resolver de manera explicita la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ y establecer comparaciones con lo realizado hasta ahora.

$\frac{dy}{y(1-y)} = dt \rightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dt = \frac{1}{y(1-y)}$ Integracion por fracciones parciales

$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y)} \rightarrow \frac{1}{y(1-y)} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)} \longrightarrow$

$1 = A(1-y) + By$

Con $y = 1 \longrightarrow 1 = \cancel{A(1-1)} + B(1)$ Con $y = 0$

$\frac{1}{1} = B \rightarrow B = 1$ $1 = A(1-0)\ \cancel{B(0)}$

$\frac{1}{1} = A = A = 1$

$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{1-y}$ $u = 1-y$ $du = -y$ $du = -dy \rightarrow \int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{du}{u} \longrightarrow$

$= \ln|u| = \int \frac{dy}{y(1-y)} = \ln|y| - \ln|1-y| + C$

$\rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C_1$

Aplicando exter $\frac{y}{1-y} = e^{t+C_1} \rightarrow \frac{y}{1-y} = e^{t} \cdot C_1 \rightarrow \frac{y}{1-y} = C_1 \cdot e^{t} \rightarrow$

$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+1}{Ce^{t}} \longrightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{Ce^{t}} + 1 \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+Ce^{t}}{Ce^{t}}$ Invertimos $\frac{1}{y} = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

$y(t)\ \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

Figura 4: Solución analítica de la ecuación de Verhulst.

En este capítulo se tratan de manera detallada los resultados de la aplicación de los planes de clase para un curso de ecuaciones diferenciales, diseñado desde el enfoque cualitativo y bajo la concepción cuasi-empírica, de las matemáticas tomando como eje transversal la resolución de problemas.

Los planes de clase se aplicaron de manera definitiva a un curso de cinco estudiantes, con el fin de valorar las principales características del proceso de aprendizaje, así como las reacciones de los estudiantes frente a un curso de ecuaciones diferenciales con las características ya mencionadas.

CONCLUSIONES

El procesamiento y análisis de la información recolectada durante esta investigación se llevó a cabo con ayuda de ATLAS.ti®, lo cual permitió establecer algunas categorías (códigos) para el análisis de los datos (Ver Figura 5).

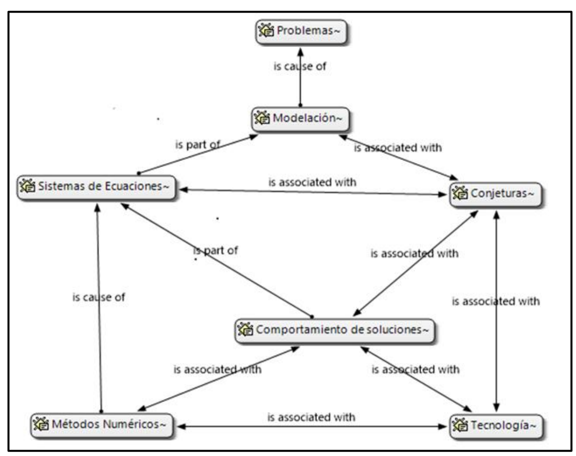


***Figura 5*: Mapa de códigos (categorías).**

A continuación, se explican brevemente las categorías que surgieron como resultado del análisis de los datos.

Solución de Problemas. Este código aparece en el primer nivel básicamente por dos razones, una primera tiene que ver con el hecho de que se estableció como elemento transversal para todo el curso por su pertinencia y de otro lado se interrelaciona permanentemente con la postura teórica el cuasi-empirismo.

Cada plan de clases inicia con una situación problema la cual obliga a que los estudiantes propongan conjeturas y las discutan con sus compañeros y el docente a fin de establecer el modelo que mejor responda al problema. El paso a seguir consiste en resolver la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales, lo cual se hizo desde el enfoque cualitativo y en algunos casos se emplearon los métodos numéricos e incluso los analíticos si es posible, con el fin de obtener un completo panorama del problema en cuestión.

Cabe resaltar que una vez propuesto el problema de cada plan de clase los estudiantes de manera natural se sitúan en las cuatro fases propuestas por Polya. Por ejemplo, para estudiar el crecimiento de una población es necesario comprender plenamente la situación, es decir, clase de población, datos estadísticos o valores iniciales con que se cuentan, que factores inciden en el crecimiento de una población. A continuación, se debe establecer un plan, es decir, la ecuación diferencial que modela el problema. Después se debe resolver la ecuación diferencial, lo cual se hace de manera cualitativa con ayuda de la tecnología (Maple 18®). Contrastar la solución con los datos reales con el fin de verificar la validez del proceso.

Concepción Cuasi-empírica de las Matemáticas. Una vez propuesto el problema inicial de cada plan de clases a partir de preguntas generadoras los estudiantes enuncian valiosas conjeturas que discuten entre ellos mismos y con el docente de modo que se pueda establecer un modelo inicial. Después de plantear la o las ecuaciones diferenciales que modelan el problema se debe proceder a resolver, privilegiando los métodos cualitativos, lo cual también da lugar a conjeturas o experimentación, donde los estudiantes conjeturan acerca de las soluciones, sus características y comportamiento en el tiempo.

Métodos Cualitativos. El curso de ecuaciones diferenciales es orientado con el enfoque cualitativo, lo cual resultó motivante e interesante para los participantes, básicamente por dos razones.

- No es necesario que memoricen las estructuras de las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver analíticamente ni tampoco los algorítmicos de resolución empleados en los cursos habituales.
- Debido a que los métodos cualitativos se basan en el pensamiento geométrico, resulta mucho más sencillo para ellos diagramar un campo de pendientes, una línea de fase o graficar una solución numérica, lo cual además, es más evidente y enriquecedor para ellos que una función que represente la solución de una ecuación diferencial, claro, siempre que esta se pueda encontrar.

Uso de Tecnología. Para esta investigación es indispensable el uso de la tecnología, en este caso para el curso de ecuaciones diferenciales se empleó Maple 18®, debido al potencial que posee para el estudio de las ecuaciones diferenciales y su fácil manejo.

El uso de Maple 18® produjo grandes beneficios, no solamente por lo motivados que se perciben los estudiantes, sino que además les permite conocer el comportamiento de la solución a un sistema dinámico de forma muy ilustrativa, comprensible y rápida.

Lo que se observó cómo debilidad en la prueba de entrada realizada por los estudiantes, en relación con la escasa comprensión del concepto de derivada, se resolvió a lo largo del curso gracias a que el análisis cualitativo apoyado el software termino por ser un ejercicio rutinario y muy enriquecedor para ellos, ya que, de allí se desprendía todo el análisis posterior de las soluciones del problema y sus posibles variaciones. Finalmente se concluye que esta investigación culmino con los siguientes logros:

1. La elaboración de un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo basado en el pseudo-empirismo.
2. Se logró evidenciar de primera mano el proceso de aprendizaje del grupo de cinco estudiantes que participaron del curso, lo cual resulta novedoso, debido a que si bien en otras latitudes existe alguna referencia acerca de algún curso de ecuaciones diferenciales con enfoque cualitativo, no se tienen registros acerca de su implementación completa y desde el pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.
3. El enfoque de solución de problemas es ideal para el curso de ecuaciones diferenciales basado en el pseudo-empirismo, ya que entre ellos se genera una dialéctica, es decir, ante una situación problema se parte de una conjetura para proponer una vía de solución al problema, dicha conjetura se pone a prueba o se socializa, si no soporta la prueba debe ser revisada con el fin de mejorarla o refutarla. Al proponer una solución al problema también se conjetura, si la solución resulta. De la misma manera se debe conjeturar que ocurre con las soluciones con el paso del tiempo, o si se cambian las condiciones o los parámetros.
4. La potencia del concepto de la derivada como la pendiente de la recta tangente se hace latente en el análisis cualitativo, cuando los estudiantes elaboran el campo de pendientes se aprecia en toda su magnitud el comportamiento de las soluciones y con algo de álgebra se puede tener un panorama completo acerca de todas las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.
5. El trabajo exhaustivo y sistemático del método cualitativo complementado con los métodos numéricos y analíticos favorece la comprensión de los estudiantes acerca de cada situación problema y sus soluciones. Además brinda alternativas frente a un atascamiento, es decir, que cuando ellos se encuentran con una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales que surge como modelo para cierto problema y no es posible encontrar una solución analítica, lo cual es frecuente, pueden apelar a los métodos cualitativos y/o numéricos para encontrar una vía de resolución de dicho problema.
6. Por otro lado los estudiantes se hacen conscientes de que los métodos de solución de un problema no son infalibles ni absolutos.
7. Un aspecto determinante que además se considera un importante logro del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basado en el pseudo-empirismo, consiste en que los cinco estudiantes que terminaron el curso y tenían un promedio en sus cursos previos de matemáticas rondando el tres, es decir la nota mínima para aprobar, en el curso de ecuaciones diferenciales obtuvieron un promedio de 3.9.
8. Si bien es cierto que los logros alcanzados luego de la aplicación y valoración de la propuesta son muy positivos, cabe aclarar que en muchos casos los estudiantes se muestran muy inseguros y les cuesta participar durante la clase.
9. Pese a la orientación del curso y los recursos empleados en el mismo, se continúa presentando un porcentaje importante de deserción por parte de los estudiantes.
10. Para muchos estudiantes no es fácil el acceso a un computador y el software empleado en el curso.
11. El uso del software, así como los comandos pese a que no son muchos ni difíciles de manejar, logran poner en aprietos a los estudiantes especialmente al comienzo del curso.

Finalmente, a partir del modelo didáctico preliminar, toda la información recolectada en los planes de clase y su respectivo análisis se concluye presentando de modo esquemático el modelo didáctico final (Ver Figura 6).

NECESIDADES					RESPUESTAS
DESACTUALIZACIÓN	DESCONTEXTUALIZACIÓN		DESMOTIVACIÓN		
	MÉTODOS CUALITATIVOS				
PROBLEMA DISCUSIÓN APLICACIÓN Y PRÁCTICA	LÍNEAS DE FASE Y CAMPOS DE PENDIENTES	SISTEMAS LINEALES	SISTEMAS NO LINEALES Y CAOS	USO DE SOFTWARE MAPLE 18	
FUNDAMENTOS EPISTEMOLOGÍCOS CUASI-EMPIRISMO	FUNDAMENTOS DISCIPLINARES MÉTODOS CUALITATIVOS		FUNDAMENTOS METODOLOGÍCOS RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		

***Figura 6*: Modelo Didáctico Consolidado.**

RECOMENDACIONES

Se espera que este trabajo motive a otros investigadores interesados en el tema a llevar a cabo, estudios que permitan verificar la eficacia de esta propuesta y otras similares para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cualitativo, y se promuevan las reformas necesarias tendientes a mejorar el desempeño académico y profesional de los futuros ingenieros y licenciados en matemáticas. A continuación, se sugieren algunas recomendaciones para posteriores estudios relacionados con el tema en cuestión.

1. En primer lugar, son necesarios nuevas investigaciones que aborden el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basados en el pseudo-empirismo, con el fin de tener otras miradas y así enriquecer, mejorar o proponer modelos didácticos, orientados a suplir las necesidades de aprendizaje de los estudiantes actuales, de manera que estos se sientan motivad y se apropien de los contenidos tratados en los diferentes cursos de ecuaciones diferenciales.

2. Los elementos que sirvieron como medio para la implementación de esta propuesta, es decir el syllabus y los planes de clase, están sujetos a reformas y mejoras, los problemas, las actividades propuestas y las actividades de práctica pueden y deben ser revisadas y mejoradas o adaptadas, de acuerdo con el perfil de los estudiantes que participen en el curso en cuestión. En el mismo sentido, es probable que se trabaje con el mismo syllabus y planes de clase, desde un énfasis diferente al presentado en esta propuesta.

3. Es importante que los estudiantes que participan del curso, dominen al menos de manera básica, algún programa de cómputo que sea útil para el desarrollo del curso. Además, se debe tener acceso a los recursos tecnológicos necesarios para el curso, es decir, que los estudiantes tengan tanto en casa como en la universidad un computador y el software que se emplee en el curso.

4. Como se pudo concluir a través de esta investigación, el enfoque cualitativo permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes, acerca de un fenómeno que cambia con el tiempo, para lo cual se utilizó el software Maple® 18, el cual dejo una grata impresión en los estudiantes por su fácil manejo, así como las ayudas y tutoriales de que se dispone, pero sin embargo bien se podría emplear cualquier otro software que cuente con características similares al Maple® 18.

5. El pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática, fue fundamental para abordar los problemas estudiados durante el curso, así como las cuatro fases de solución de problemas propuestas por Polya, por lo que se recomienda se mantenga como invariantes del modelo el enfoque cualitativo, la solución de problemas y el Pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.

6. Finalmente se recomienda trabajar esta propuesta de manera interdisciplinaria y colaborativa con otros docentes que impartan el curso de ecuaciones diferenciales. Finalmente es importante que esta propuesta se complemente con el estudio de los sistemas dinámicos.

OBRA DEL AUTOR

Caicedo, E. An Early introduction to Differential Equations Systems. *PRIMUS* (TAYLOR AND FRANCIS GROUP. (En proceso de aceptación)

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Abell, M. (2014). *Introductory Differential Equations.* Londres: Elsevier Inc.

Bell, E. (1937). Los grandes matematicos.Buenos Aires: Editorial Losada.(s.f.).

Blanchar, P., Devaney, R., & Hall, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales.* Boston: Springer.

Blanchard, P. (2012). *Ecuaciones Diferenciales.* Boston: Cengage Learning.

Braun, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Nueva York: Springer.

Bravo, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31-46.

Delshams, A. (2005). POINCARÉ, Creador De Los Métodos Todavía Modernos En Las Ecuaciones Diferenciales y La Mecanica Celeste. *Arbor Ciencia Pensamiento y Cultura*, 43-59.

Falk de Losada, M. (2012). *Corrientes del Pensamiento Matemático del Sigo XX*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical System And Introduction To Chaos.* San Diego: Elsevier academic press.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones.* Madrid: Alianza.

Moreno, M., & Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 265-280.

Murphy, G. (1960). *Ordinary Differential Equations and their solutions.* Princeton: D. Van Nostrand Company.

Napoles, J. (2004). Un siglo de Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 59-111.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Jhon Wiley and sons.

Radfor, L. (2008). Connecting theories in mathematics education:. *ZDM Mathematics Education*, 317-327.

Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (1991). *Metodología De La investigación.* Mexico: McGraw Hill.

Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically.* New York: MacMillan.

Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* Nueva York: Springer.

MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

NÉSTOR ALEXANDER HERNÁNDEZ MORENO
Docente investigador, Universidad Manuela Beltrán
nealhemo@gmail.com

GERARDO CHACÓN GUERRERO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
E-mail: gerardoachg@uan.edu.co

Abstract

This research in Mathematics Education called: "DIDACTIC MODEL FOR THE LEARNING OF MATHEMATICAL MODELING THROUGH EQUATIONS IN DIFFERENCES", includes problem solving, equations in differences and the quasi-empirical approach of mathematics as basic elements of the Framework Theoretical. To design the Didactic Model, the socio-cultural political and scientific-technological contexts were interrelated with the epistemological and ethical approaches.

Five groups of activities were applied in students of Systems Engineering of the Pan American University Institution Compensar, who attended the Discrete Mathematics course during the second semester of 2016. In the design and application of each of the didactic activities, the elements of the Theoretical Framework, Didactic Model and Discrete Dynamic Systems were taken into account. Each activity was constituted in three stages: Motivation, Discussion and Practice, which included historical elements, experimentation, data collection, formulation of conjectures and obtaining the mathematical model in discrete variable. The subjects modeled were: Finite Differences, The Game of Life, Towers of Hanoi, Sierpinski Triangle, Newton's Cooling Law, Markov Chains, Tessellated, Discrete Logistic Equation, and Chaotic Processes.

From the results of this research highlights the evidence of the development and improvement of mathematical abilities by the students to model mathematically from the equations in differences.

Resumen

Esta investigación en Educación Matemática denominada: "MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS", incluye la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y el enfoque cuasi empírico de las matemáticas como elementos básicos del Marco Teórico. Para diseñar el Modelo Didáctico se interrelacionaron los contextos sociocultural político y científico tecnológico con los enfoques epistemológicos y éticos. Se aplicaron cinco grupos de actividades en estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar, que cursaron la asignatura Matemáticas Discretas durante el segundo semestre de 2016. En el diseño y aplicación de cada una de las actividades didácticas se tuvieron en cuenta los elementos del Marco Teórico, del Modelo Didáctico y los Sistemas Dinámicos Discretos. Cada actividad se constituyó en tres etapas: Motivación, Discusión y Práctica, en la cual se incluyeron elementos históricos, experimentación, toma de datos, formulación de conjeturas y obtención del modelo matemático en variable discreta. Los temas modelados fueron: Diferencias Finitas, El Juego de la Vida, Torres de Hanói, Triángulo de Sierpinski, Ley de Enfriamiento de Newton, Cadenas de Markov, Teselados, la Ecuación Logística Discreta y los Procesos Caóticos. De los resultados de esta investigación se destaca la evidencia del desarrollo y mejoramiento de habilidades matemáticas por parte de los estudiantes para modelar matemáticamente a partir de las ecuaciones en diferencias.

INTRODUCCIÓN

En nuestro país se cuestiona la calidad de la educación a todo nivel, así como la competencia de los egresados en diferentes profesiones. El Sistema Nacional de Información de la Educación Superior (SNIES), reporta 348 instituciones de Educación Superior activas en Colombia, de las cuales 115 se encuentran en Bogotá, y de éstas se reconocen como universidades 29; es importante resaltar que sólo 9 se encuentran acreditadas con alta calidad. Las Instituciones que ofrecen carreras de Ingeniería son 51, de carácter oficial son 5 y las demás son privadas. Para los egresados de carreras de ingeniería, se reconoce la exigencia de desarrollar el pensamiento científico, es decir la capacidad para relacionar variables, formular conjeturas, preguntas o hipótesis, además de proponer explicaciones y modelos que les permita interpretar diferentes situaciones en su desempeño profesional utilizando la tecnología.

En las pruebas **"SABER PRO"**[40] se evalúa esta competencia transversal a los estudiantes de los diferentes programas de Ingeniería, sólo que en un contexto específico relacionado con la formación dada en cada pregrado. Un indicador del nivel de

[40] www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua

formación matemática de los egresados es la prueba de razonamiento cuantitativo en la cual los más altos puntajes del grupo de las carreras de ingeniería los obtuvieron los estudiantes de las Universidades Nacional de Colombia y Los Andes, según el reporte de los resultados agregados de las pruebas aplicadas en el segundo semestre de 2013. En los resultados entregados por las "PRUEBAS SABER PRO 2013", se estableció sólo el **1,7%** de los estudiantes alcanzó puntajes notables en las competencias relacionadas con el **desarrollo del pensamiento científico en contexto** y las asignaturas de **ciencias básicas** son la plataforma que permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento científico. Tal como lo plantea el ICFES (Módulo de Pensamiento científico Matemáticas y Estadística SABER PRO 2014-2), la formación científica incluye habilidades como: 1) Plantear preguntas y proponer explicaciones o conjeturas que puedan ser abordadas con rigor científico. 2) Establecer estrategias adecuadas para abordar y resolver problemas. 3) Adquirir e interpretar información para abordar y entender una situación problema. 4) Analizar críticamente los resultados y derivar conclusiones. 5) Comprender, comparar, utilizar o proponer modelos que permiten describir, explicar y predecir fenómenos o sistemas. Pese a que en todo estamento de la comunidad educativa universitaria se reconoce las posibilidades que otorga la Educación Matemática, no se han resuelto las dificultades para superar modelos didácticos tradicionales, o propuestas, aisladas de la realidad de los ingenieros y los diferentes sectores industriales y de servicios que los demandan. Desarrollar el pensamiento científico de los estudiantes implica que utilicen las herramientas matemáticas para modelar situaciones relacionadas con otras asignaturas, el desempeño profesional o eventos cotidianos. La modelación matemática se considera un tema implícito en diferentes asignaturas del área matemática de las carreras de ingeniería, en algunos programas se enuncia como uno de sus objetivos pero no se establece la forma de cumplirlo. Algunos profesores de matemáticas consideran que la modelación matemática corresponde al área de las ciencias aplicadas y de las asignaturas específicas de cada ingeniería; otros enfoques se orientan a las aplicaciones que se derivan de cada tema de los cursos de matemáticas. Es notable que para abordar acertadamente la modelación matemática se requiere el aporte de diferentes disciplinas además de las matemáticas, pues el contexto y características de cada situación a modelar deben estar plenamente identificados y establecidos. Otro elemento importante a tener en cuenta en los procesos de modelación es la utilización de los recursos tecnológicos ya sea para procesar datos o para recolectarlos. Las habilidades matemáticas, que requieren los futuros ingenieros están relacionadas con el mundo cambiante y globalizado que afrontamos, el vertiginoso avance tecnológico y las comunicaciones que generan cada vez nuevas situaciones de ingeniería que deben ser analizadas, interpretadas, modeladas, recreadas y explicadas en forma concreta y precisa. Tal como lo plantea Dujet en su conferencia pronunciada en México en el año 2005 "Los ingenieros están destinados a evolucionar en un mundo de complejidad creciente y cada vez más incierto; sin embargo deben llevar a cabo sus proyectos con la mayor eficacia, lograr los resultados más sobresalientes y tomar las decisiones adecuadas con toda la responsabilidad requerida en este contexto" (Dujet, 2007)[41]. Sin embargo, en las prácticas de clase de matemáticas se enfatiza en resolver ejercicios de cálculo, considerando el saber matemático aislado de la vida laboral y cotidiana.

De las diferentes asignaturas que brindan las herramientas para realizar procesos de modelación matemática es de destacar las ecuaciones diferenciales y en diferencias y las matemáticas discretas pues permiten la conjugación y comparación de diferentes métodos de análisis y una mejor comprensión de diversos fenómenos dinámicos. El abordar los sistemas discretos desde las ecuaciones en diferencias permite, en algunas situaciones, obtener modelos más ajustados a la realidad. Con las ecuaciones en diferencias finitas se obtienen estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales, lo que se denomina "*métodos de diferencias finitas".*

Actualmente son muchas las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias, en dinámica de poblaciones, ingeniería, economía, biología y otras. Dicha modelación se hace con el uso de recursos informáticos a través de la simulación. Al comparar las soluciones arrojadas y confrontarlas con las situaciones reales, se encuentra que en las ecuaciones diferenciales se presenta el análisis de las variables continuas y en las ecuaciones en diferencias el de las variables discretas. El comportamiento real de los fenómenos, algunas veces puede ser un punto intermedio entre estas posibilidades, y en estos casos debe abordarse desde los procesos estocásticos.

El "Aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias" es un tema no resuelto en las facultades de ingeniería, pues las actividades didácticas encaminadas a desarrollar la habilidad de modelar matemáticamente diversas situaciones son muy escasas en los cursos de ecuaciones diferenciales y en diferencias y matemáticas discretas. Esto se debe, en parte, a que algunos docentes no dominan las diferentes técnicas de modelación matemática ni utilizan situaciones novedosas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y en diferencias y matemáticas discretas. Otro elemento a tener en cuenta para formular una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática es que los modelos matemáticos construidos con base en las ecuaciones en diferencias, deben servir para motivar y preparar a los estudiantes en el abordaje de las ecuaciones diferenciales y las matemáticas discretas.

La propuesta de promover el "Aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias" está inscrita en las siguientes líneas de investigación en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño: **1)** Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas (especialmente problemas no rutinarios). **2)** Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas a través de sus aplicaciones. **3)** Estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para talentosos).

El **problema de investigación** es el siguiente: ¿Qué características debe tener un Modelo Didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias, que corresponda a las necesidades de formación de los futuros profesionales en ingeniería, que esté acorde a las demandas de la sociedad, industria, innovación, investigación y desarrollo tecnológico en Colombia?

El **objeto de estudio** corresponde a los procesos de aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

El **objetivo general** es diseñar, aplicar y valorar un modelo didáctico que mejore las competencias relacionadas con la modelación matemática y el pensamiento científico en contexto desde las ecuaciones en diferencias para estudiantes de ingeniería. Los objetivos específicos de la tesis son:

1. Establecer las características y contenidos de los cursos que incluyan el tema de las ecuaciones en diferencias para los estudiantes de ingeniería.

2. Identificar la correspondencia entre la forma de abordar los contenidos de las ecuaciones en diferencias y las habilidades que debe adquirir el futuro profesional.

[41] Dujet, C. (05-10-2007). Matemáticas del Mundo Real. Recuperado el 30 de 10 de 2014, de Matemáticas del Mundo Real: http://www.m2real.org/spip.php?article2

3. Reconocer los intereses, las formas como acceden al conocimiento y las ideas de los estudiantes en relación con el contenido de la asignatura: Matemáticas Discretas para estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

4. Proponer y aplicar actividades de aprendizaje que tengan en cuenta la experimentación, conjetura, refutación, formalización, aplicación y que contemplen la evolución de los conocimientos de los estudiantes, la interacción profesor–estudiante y el desarrollo del proyecto didáctico en la asignatura Matemáticas Discretas.

5. Valorar el nivel de desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes para la modelación a través de las ecuaciones en diferencias.

El **campo de acción** se enmarca en el: proceso de aprendizaje de la modelación matemática en los estudiantes de las carreras de ingeniería.

Las **preguntas científicas** de la tesis son las siguientes:

1. ¿Cuáles son las características y contenidos de los cursos que incluyan el tema de las ecuaciones en diferencias para los estudiantes de ingeniería?

2. ¿Qué correspondencia hay entre la forma de abordar los contenidos de las ecuaciones en diferencias y las habilidades que debe adquirir el futuro profesional?

3. ¿Cuáles son los intereses, las formas como acceden al conocimiento y las ideas de los estudiantes en relación con el contenido de la asignatura: Matemáticas Discretas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar?

4. ¿Cómo se lograría que los estudiantes de ingeniería adquieran habilidades en el proceso de modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias?

5. ¿Cómo valorar las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes de la carrera de ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar?

El aporte teórico y práctico del trabajo de investigación, aborda uno de los grandes problemas que poseen los estudiantes de ingeniería, el cual se refiere a los procesos de aprendizaje de la modelación matemática. Las herramientas usadas para mejorar dichos procesos, son las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas. El aporte teórico consiste en una **metodología de trabajo**, basada en las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas, que ayude sustancialmente a mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en la modelación matemática. El aporte práctico es el diseño, implementación y evaluación de un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

Los resultados en los estudiantes son los siguientes: Desarrollo de habilidades matemáticas en el proceso de modelación basadas en las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas; desarrollo de la capacidad para explicar, resolver e inferir acerca de situaciones problémicas planteadas a través de modelos matemáticos; cambio en la concepción de los estudiantes sobre la importancia de la aplicabilidad real en su vida profesional de las matemáticas, específicamente en las ecuaciones en diferencias**;** evolución de preconceptos y desarrollo de heurísticas de los estudiantes para la solución de situaciones problema fundamentados en las ecuaciones en diferencias y resolución de problemas retadores.

La **novedad científica** de este trabajo doctoral se enmarca en: La interrelación de las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas como herramientas de naturalezas epistemológicas diferentes, en el mejoramiento del aprendizaje de la modelación matemática en estudiantes de ingeniería.

Con el propósito de mejorar y desarrollar habilidades matemáticas de los estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de Matemáticas Discretas en la Institución Universitaria Panamericana Compensar, ésta tesis doctoral en Educación Matemática se enmarca dentro del enfoque de la investigación cualitativa. Este tipo de investigación es el más adecuado debido a que se busca explorar y comprender el comportamiento y actitudes de los estudiantes después de aplicar la estrategia didáctica, en aras de adquirir habilidades en el proceso de modelación. [42]"Es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema de estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho investigación al respecto en algún grupo social específico.

A continuación se describen las fases para su desarrollo: En la primera fase se diseñaron los instrumentos y estrategias para recolectar información y analizarla. En la segunda fase se realizó el diseño y aplicación del Modelo Didáctico sustentado en la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y la concepción cuasi empírica de la matemática. La tercera y última fase, correspondió al análisis de datos y resultados que permitieron evaluar el Modelo Didáctico propuesto y formular unos elementos teóricos que describieran y explicaran la forma en que las actividades didácticas impactaron positivamente o no, en cada uno de los estudiantes y con esto aportar en la construcción del aprendizaje de la modelación a través de las ecuaciones en diferencias.

La estructura de la tesis tiene cuatro capítulos. En el capítulo uno, se hizo una revisión del estado del arte. En el capítulo dos, se desarrolló el marco teórico tomando como elementos las ecuaciones en diferencias, la resolución de problemas y la concepción cuasi empírica de las matemáticas. La conjugación de estos tres elementos, llevó a los estudiantes de ingeniería a construir el aprendizaje de la modelación matemática. En el capítulo tres denominado metodología para la construcción del modelo didáctico, se tuvieron en cuenta los tres principios que debe tener el modelo didáctico: aprender matemáticas es igual a hacer matemáticas, la importancia de los modelos discretos y las ecuaciones en diferencias como herramienta de modelación. En el cuarto capítulo, denominado análisis y discusión de resultados, se hizo un recuento de todas las actividades desarrolladas por los estudiantes, haciendo hincapié en los logros, las dificultades, necesidades, posturas teóricas y reacciones de los estudiantes. Finalmente, se formularon las conclusiones y recomendación que surgieron del presente trabajo de investigación.

En el CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE se analizan algunas investigaciones que tienen como eje central la enseñanza aprendizaje de modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

De hecho, en las últimas dos décadas, las ecuaciones en diferencias han tenido una importancia muy relevante debido al desarrollo de las nuevas tecnologías. La educación matemática ha adquirido nuevos enfoques, muchos autores señalan la importancia de contextualizar el quehacer matemático en las ciencias aplicadas en todos los niveles y en todos los campos del saber.

Los autores referenciados en este capítulo, resaltan en sus tesis una visión que permita integrar las matemáticas a los diferentes contextos y demás disciplinas del saber. La modelación matemática como eje central del conocimiento matemático, debe implementarse en todos los cursos de matemáticas, de tal forma que los estudiantes aprendan a plantear y resolver problemas contextualizados, lo cual les debe servir

[42] Hernández Sampieri, R. (2010). *Metodología de la Investigación.* Quinta Edición. Editorial McGraw Hill, México D.F., páginas. 364-365.

para llegar a ser mejores profesionales con un pensamiento autónomo y crítico a la hora de tomar decisiones. Destacamos las siguientes referencias consultadas: **Journal: Advances in Difference Equations**[43], ésta revista especializada en el estudio de las ecuaciones en diferencias, presenta avances en la matemática contemporánea ligadas al área, pero en general no abarca los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en diferencias.

El **Proyecto SIMIODE**[44] es una propuesta dirigida por Brian Winkel, Profesor Emérito del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Academia Militar de Estados Unidos, cuya finalidad es promover el uso de la modelación con ecuaciones diferenciales y en diferencias en el aula de clase. Entre las estrategias utilizadas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, se conforma una comunidad en línea para profesores y estudiantes en la cual se comparten experiencias exitosas que utilizan la modelación, la tecnología y el aprendizaje colaborativo.

SIMIODE ofrece a sus usuarios "escenarios de modelación", conjuntos de datos, videos, y presentaciones entre otros recursos que permiten y motivan el aprendizaje. Otro artículo especialmente relevante es**: La Matemática en el contexto de las ciencias**[45] y las matemáticas en la formación de un ingeniero[46].

Las exigencias de un mundo globalizado y un constante avance tecnológico llevan a las instituciones de educación superior a replantearse los perfiles de sus egresados, los programas académicos y curriculares y por lo tanto las practicas docentes. Una opción a tener en cuenta para la formación de ingenieros es utilizar propuestas metodológicas de enseñanza que desarrollen la creatividad, innovación y el razonamiento orientado a la solución de problemas. En el caso de las matemáticas dirigidas a estudiantes de ingeniería, se expone la propuesta de "La matemática en el contexto de las ciencias" (MCC), teoría que data desde 1982 en el Instituto Politécnico Nacional de México como producto de las reflexiones acerca de la problemática estudiantil asociada a los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos[47].

Esta propuesta pretende superar la dificultad que presentan los estudiantes para interpretar el mundo real, pues no reconocen los conceptos matemáticos como una herramienta para plantear o analizar modelos, y la gran cantidad de información proveniente de otras asignaturas no es relacionada con el conocimiento matemático.

Según la autora (Camarena, 2009), la matemática en el contexto de las ciencias se fundamenta en los siguientes paradigmas:

- "La matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
- Los conocimientos nacen integrados"[48].

En relación a la temática de la modelación matemática destacamos: **Modelación matemática como método de investigación en clases de matemáticas**[49]

Según los autores, la modelación matemática es todo un proceso inmerso en el hallazgo de un modelo. El modelo matemático de un fenómeno reúne una serie de símbolos y formulaciones matemáticas que realizan la traducción del fenómeno en estudio. Dicho modelo no sólo permite hallar una solución particular del problema, sino que también sirve de apoyo para otro tipo de teorías o aplicaciones matemáticas. Existen muchas definiciones de modelo, según cada área del conocimiento.

El artículo termina con la presentación de una aplicación de un problema real al tema de la crianza de pollos, el peso que adquieren durante su vida y las raciones de comida que consumen en función de los días de vida, en la cual se hace todo el proceso de modelación matemática (delimitación del problema, referencial teórico, hipótesis, desarrollo, resolución del problema, interpretación de la solución y validación del modelo). **En referencia al contexto colombiano se revisó:** Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos[50] **.**

Este documento es un avance de investigación en el marco del proyecto *"El proceso de modelación matemática en las aulas escolares del suroeste antioqueño"*[22], en él se desarrollan los referentes teóricos sobre la modelación como recurso didáctico en las clases de matemáticas.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el documento *Lineamientos Curriculares* (1998) expone la importancia de que los estudiantes relacionen los contenidos de aprendizaje con sus experiencias cotidianas; además se afirma que uno de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo del pensamiento matemático.

Las estrategias que se sugieren son "la resolución de problemas" y "la modelación matemática", sustentadas en desarrollar en los estudiantes la habilidad de comunicarse matemáticamente, propiciar la investigación que acompaña al razonamiento matemático, comprender conceptos y procesos matemáticos, e investigar diferentes alternativas a situaciones problémicas.

La modelación se describe como un proceso que permite a los estudiantes construir conceptos matemáticos de una forma significativa ya que a partir de una situación problémica se puede observar, analizar, explicar, inferir, validar el modelo mismo y los conceptos y procesos matemáticos que encierra. **En el** CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO **se recogen** los **referentes teóricos, epistemológicos y conceptuales, en los cuales se soporta el trabajo**

[43] http://www.advancesindifferenceequations.com
[44] https://www.simiode.org/about
[45] Hernández M. Néstor (2012). Acciones didácticas para mejorar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería. Tesis de Maestría Universidad Antonio Nariño. Bogotá
[46] Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*. REDU. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el 25 de abril de 2015 en http://red-u.net
[47] Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa,* Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en el URL: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf
[48] Camarena, P. (2009). *La matemática en el contexto de las ciencias*. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa,* Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en el URL: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf
[49] Hein, N., y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemáticas. [Versión Electrónica]. V Festival Internacional de Matemáticas, 1-25. Recuperado el 10 de mayo de 2012 en el URL: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2Hein.pdf
[50] Villa, J.A. y Ruíz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. "Revista Virtual Universidad del Norte". No 27 (mayo – agosto de 2009, Colombia). Recuperado el 12 de mayo de 2012 en el URL: http://revistavirtual.ucn.edu.co/ 22

a realizarse en la tesis. Inicialmente se refiere a los Modelos Discretos y Continuos[51].

Un modelo es la representación de un proceso, es decir, un cambio en los estados de un sistema a través del tiempo, esta descripción puede ser discreta o continua.

En el caso discreto, se observa un sistema que cambia a intervalos de tiempo regulares finitos, es decir, a cada segundo, minuto, hora, etc., y se relaciona el estado observado del sistema con los estados en los instantes anteriores. Tal sistema puede modelarse en algunas ocasiones con **ecuaciones en diferencias**.

En los casos continuos, se trata el tiempo como un continuo, lo que permite observaciones del sistema en cualquier instante. De tal forma que el modelo puede expresar las relaciones entre las tasas de variación de diversas cantidades. Estos tipos de modelos se representan con las ecuaciones diferenciales.

El abordar los sistemas discretos desde las ecuaciones en diferencias permite, en algunas situaciones, obtener modelos más ajustados a la realidad. Con las ecuaciones en diferencias finitas se obtienen estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales, lo que se denomina "*métodos de diferencias finitas".*

Las **ecuaciones en diferencias** describen la evolución de ciertos fenómenos a través del tiempo. Por ejemplo, al establecer el tamaño de una generación de una población en el tiempo, este valor es una variable discreta, el tamaño de la generación $x(n+1)$ es una función de la generación $x(n)$. Esta relación se expresa como una ecuación en diferencias así:

$$x(n+1) = f(x(n)) \qquad (1)$$

Puede verse esto usando otra notación, si se comienza desde el punto x_0, se genera la secuencia:

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))),....$$

Por conveniencia, se adoptará la notación:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) \quad ; \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \quad etc.$$

$f(x_0)$, es la primera iteración de x_0 sobre f; $f^2(x_0)$ es la segunda iteración de x_0 sobre f, más generalmente, $f^n(x_0)$ es la enésima iteración de x_0 sobre f. El conjunto de todas las iteraciones positivas $f^n(x_0) : n \geq 0$, donde $f^0(x_0) = x_0$, es denominada por definición orbita de x_0 y se denotará por $O(x_0)$. Este proceso iterativo es un ejemplo de un sistema dinámico discreto. Escribiendo $x(n) = f^n(x_0)$, se tiene:

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)),$$

Las ecuaciones en diferencias y los sistemas dinámicos discretos representan las dos caras de la misma moneda. Por ejemplo, cuando los matemáticos hablan de ecuaciones en diferencias, se refieren por lo general a la teoría analítica de la materia y cuando hablan acerca de los sistemas dinámicos discretos, por lo general se refieren a su geometría y aspectos topológicos.

La opción pedagógica asumida en el modelo se basa en la Teoría de la Resolución de Problemas. Pölya (1965) señala que en la solución de un problema, se requiere mínimamente seguir los pasos de la figura 1.

[51] Banasiak J. (2013). *An Introduction via Difference and Differential Equations.* University of KwaZulu-Natal, South Africa Technical University of Lodz. Cambridge University Press.

Figura 1: Pasos para la resolución de un problema[52].

El cumplimiento de las etapas planteadas es un camino en la búsqueda de resultados satisfactorios. Cada enunciado de las actividades didácticas diseñadas como parte de la estrategia para mejorar el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, pueden abordarse bajo la propuesta de *resolución de problemas*.

En el CAPÍTULO 3: CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO se procede a dicha construcción la cual se soporta en los principios básicos:

- Aprender matemática = Hacer matemática
- Importancia de los modelos discretos
- Las ecuaciones en diferencias como herramienta de modelación

A partir de estos principios se construye el **Modelo Didáctico.** Iniciamos con la **definición y consideraciones generales**[53]**.**

En los últimos años, en Colombia se despliega una dinámica de cuestionamiento acerca de la Educación Superior con el fin de lograr una política educativa que garantice el acceso sin restricciones ni discriminaciones a toda la población, una educación superior de calidad y que sea generadora de conocimiento, tecnología e innovación.

Con el fin de lograr este anhelo nacional las Instituciones de Educación Superior se deben someter a diferentes procesos evaluativos ya sea de los entes que vigilan el sistema o de su propia autoevaluación en cuanto al cumplimiento de metas de eficiencia y calidad.

El cuestionamiento de la efectividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje lleva a incentivar la generación de propuestas que superen dificultades ya identificadas en ciertas áreas del conocimiento. En las

[52] Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* (Décimo Quinta Reimpresión). Editorial Trillas, México D.C, p 7-12

[53] Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia. (29 de julio de 2014). *MINEDUCACIÓN.* Recuperado el 3 de diciembre de 2014, de MINEDUCACIÓN: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340678_recurso_1.pdf

asignaturas de matemáticas se observa los mayores índices de pérdida y deserción académica por parte de los estudiantes.

En este contexto del Sistema Educativo Colombiano se delimita la propuesta de diseñar y validar un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

Un modelo didáctico es una representación del proceso enseñanza aprendizaje en un contexto tecnológico-científico y socio-cultural determinado y basado en opciones epistemológicas y éticas específicas.

A partir de visualizar la complejidad de elementos que se deben tener en cuenta al momento de proponer y diseñar un modelo que permita desarrollar en los estudiantes las competencias pertinentes para abordar la modelación matemática usando ecuaciones en diferencias, se describen el contexto tecnológico y científico bajo el cual se aborda la temática de ecuaciones en diferencias y modelos matemáticos, la situación social y cultural de la población estudiantil de las carreras de ingeniería en Colombia; los referentes epistemológicos de la educación matemática que subyace a la propuesta así como el compromiso por una educación superior de calidad.

A continuación se representa en un esquema los elementos que conforman un modelo didáctico:

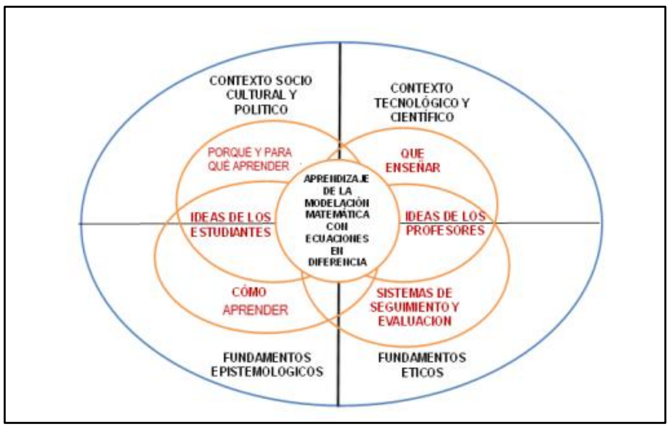


Figura 2: Elementos que conforman el Modelo Didáctico.

Se describen con detalle los contextos tecnológico científico y sociocultural político, así como los fundamentos epistemológicos y éticos que hacen parte del modelo didáctico propuesto en esta investigación.

*Respecto al **Contexto Tecnológico y Científico** específicamente a la **Modelación Matemática,** Según Biembengut*[54]*, un modelo matemático es el conjunto de símbolos, relaciones matemáticas que se utilizan para representar una situación real.*

En el mundo tan cambiante en el que vivimos, globalizado y competitivo, donde no importa el conocimiento como tal sino cómo se puede aplicar y socializar para sacarle el mejor provecho, la modelación matemática definida como el proceso que se involucra directamente en el hallazgo del modelo matemático, viene siendo muy defendida como método de enseñanza, aunque hay algunos docentes que aún consideran que corresponde al área de las ciencias aplicadas y de las asignaturas específicas de cada Ingeniería.

54 Biembengut, M. y Hein, N. (s.f.). Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Matemática CCEN, Universidad Regional de Blumean. Brasil. Recuperado el 03 de Diciembre de 2014 en http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelación_mate2.pdf

*Respecto al **Contexto Socio-Cultural y Político** se destacan las **Exigencias actuales de la formación matemática del profesional y en particular en las carreras de ingeniería.***

En Colombia, al igual que en otros países se percibe que el número de ingenieros no es suficiente. Los retos que impone un mundo globalizado en cuanto al desarrollo tecnológico y científico, las innovaciones y cambios sociales que traen los nuevos acuerdos comerciales entre los países, exigen contar con profesionales debidamente preparados y competitivos.

Los ingenieros son los profesionales que se encargan de analizar los sistemas, organizaciones, situaciones y proponen mejoras, soluciones o innovaciones para el crecimiento del sector productivo y la eficiencia de las empresas. Esto implica la comprensión del entorno, la visión holista y sistemática de cada situación para relacionarla acertadamente con la tecnología. En este panorama es necesario que las facultades de ingeniería a nivel de pregrado, desarrollen en los estudiantes habilidades para practicar la ingeniería de síntesis, es decir enfocarse en proyectos de diseño; así como desempeñarse con habilidades comunicativas y tecnológicas apropiadas al área de competencia y al mercado laboral altamente competitivo.

El **perfil del estudiante** se refiere a su formación previa, sus expectativas, deficiencias, potencialidades, y otras características académicas y sociodemográficas que se deben tener en cuenta al momento de formular una propuesta didáctica. Pese a la importancia que reviste para el desarrollo de un país contar con profesionales ingenieros, socialmente no hay reconocimiento ni valoración de las carreras ingenieriles.

En estudios recientes, se analiza que si bien en Colombia hay una gran oferta de carreras de pregrado en ingeniería, superior a países como Venezuela y Ecuador, no hay una acogida por parte de los jóvenes al momento de decidir su futuro profesional, es alto el nivel de deserción y la insatisfacción de los estudiantes cuando ingresan a las facultades de Ingeniería. Una de las causas de deserción e insatisfacción se relaciona con los programas académicos y la forma como se abordan contenidos en el aula, en especial con las asignaturas del área de ciencias básicas como lo son las matemáticas.

En el sistema educativo colombiano, hay una fuerte tendencia a las prácticas docentes tradicionales, que poco a poco han incorporado recursos de información y comunicación tecnológica, pero que aún mantienen esquemas de enseñanza tradicionales, sin propiciar una participación activa de los estudiantes.

Los Fundamentos Epistemológicos se incorporan al modelo al asumir (a nivel personal y/o institucional) un modo de entender el pensamiento matemático determina la práctica didáctica. Concretamente la concepción de la matemática como ciencia, se ve reflejada en las estrategias didácticas que se desarrollan en el aula. Este postulado obliga al investigador en educación matemática a indicar los referentes de la filosofía de las matemáticas que acompañan el modelo didáctico a desarrollar.

El planteamiento de uno de los matemáticos de nuestra época, Reuben Hersh, es cuestionar la esencia de las matemáticas proponiendo una “filosofía humanista” que se contrapone a los principios del realismo y el nominalismo; bajo esta concepción, las matemáticas se derivan de los contextos históricos y socioculturales; pues son un producto del pensamiento humano, la relación que tiene con su entorno ambiental y social.

Esta visión permite sustentar propuestas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas aplicadas, matemáticas en contexto, la resolución de problemas y la modelación matemática. Además de concebir a las matemáticas como una herramienta útil para las otras ciencias naturales o aplicadas.

*Los **Fundamentos Éticos** se refieren al **Dilema Inclusión – Calidad.** Ante las exigencias y necesidades no satisfechas en materia educativa de una sociedad cambiante, los entes gubernamentales, las instituciones de educación superior y las asociaciones de ingenieros se han propuesto como meta la calidad de la formación para los futuros egresados.*

En el contexto educativo en el cual se interrelacionan la infraestructura universitaria, las aptitudes y habilidades de los estudiantes de pregrado y la formación de los docentes y directivos, el compromiso por brindar una formación de calidad debe hacerse realidad.

Para realizar las mejoras o cambios e innovaciones que se requiere en el caso particular de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es imperante avanzar en las investigaciones o intervenciones educativas para compartir aquellas experiencias exitosas.

La propuesta de un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias, cumple con allanar la búsqueda de la calidad en la formación de los futuros ingenieros, así como la coherencia entre lo que se aprende en el aula de clases y el quehacer del ingeniero.

A continuación se describen los aspectos que se tuvieron en cuenta en el **diseño y evaluación** de un conjunto de actividades didácticas para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

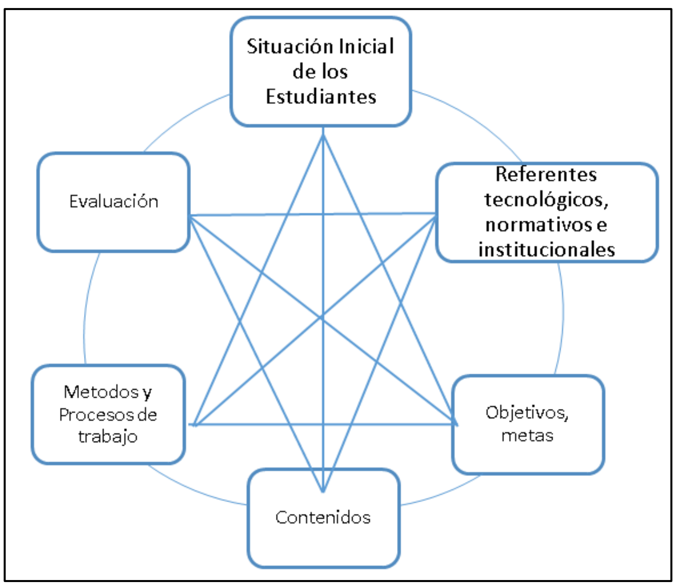


***Figura* 3: Adaptada del Modelo de la Teoría Didáctica definida por Hilde Hiim y Else Hippe[55].**

Finalmente se describen las actividades diseñadas para el desarrollo de esta investigación. Estas se organizaron en seis grupos cuya estructura responde al marco teórico propuesto. Las etapas de cada grupo de actividades son: motivación, discusión y práctica. En la motivación se hace una introducción al tema teniendo en cuenta aspectos históricos. En la discusión, se realiza la experimentación, es decir, los estudiantes toman la información necesaria para el proceso de modelación, hallan la ecuación en diferencias y modelan matemáticamente obteniendo la fórmula cerrada en variable discreta. En la etapa práctica, se proponen ejercicios y problemas para que de forma repetida ejerciten lo planteado en la discusión y así puedan afianzar el conocimiento obtenido.

En el primer grupo se busca motivar a los estudiantes y para esto, se introduce el concepto de modelos dinámicos discretos a través de actividades lúdicas que contienen diferencias finitas, el juego de la vida y las torres de Hanói, que permitan al estudiante experimentar, manipular y conjeturar para obtener relaciones de recurrencia, que después serán formalizadas y resueltas como ecuaciones en diferencias. Al final de este grupo de actividades, se proponen algunos problemas retadores con la finalidad de determinar las habilidades previas que tienen los estudiantes que tomarán el curso de Matemáticas Discretas. (Ver Anexo 1).

El segundo grupo de actividades, incluye el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, que se contextualizan a problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial, dinámica de poblaciones y dosificación de medicamentos.

El tercer grupo de actividades también incluye el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, aplicadas a la ley de enfriamiento de Newton y al triángulo de Sierpinski.

El cuarto grupo de actividades trata el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas, aplicadas a las Cadenas de Markov, donde se modelan movimientos poblacionales, grafos dirigidos y el funcionamiento de Google. El quinto grupo de actividades abarca el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de orden superior con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, contextualizado a problemas de embaldosamiento de retículos "teselación".

El sexto grupo de actividades incluye el tema de las ecuaciones en diferencias no lineales aplicado a la ecuación logística de Verhulst y una introducción a los procesos caóticos de Lorenz.

Para el desarrollo de la investigación, se utilizó un curso compuesto de 32 estudiantes de séptimo semestre de la carrera Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar. Las actividades se aplicaron durante el segundo semestre de 2016 entre los meses de agosto y octubre en la asignatura "Matemáticas Discretas".

En el **CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS** para mostrar cómo los elementos del modelo didáctico propuesto se aplicaron en cada una de las actividades desarrolladas, se ejemplifica con la actividad de dinámica de poblaciones. Para hacer este análisis, se escogió el grupo compuesto por cuatro estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

En la primera etapa de **Motivación**, se hizo una introducción al tema de dinámica de poblaciones, donde se realizó un recorrido histórico de la temática, pasando por sus representantes principales.

En la etapa de Discusión se realizó la experimentación la cual consistió en colocar 50 dados en una bolsa, se agitaron y vaciaron en el suelo, luego se retiraron los que en la parte superior del dado tenían el puntaje 1 o 3 (muertos), después se colocaron nuevamente los sobrevivientes (los que en la parte superior tenían el puntaje 2, 4, 5 o 6) en la bolsa y se adicionaron 10 inmigrantes en cada generación. Se hizo esto, una y otra vez y se registraron los datos obtenidos experimentalmente en una tabla. Ahora, se procedió a analizar los datos recogidos a través de la siguiente secuencia de preguntas: (1) ¿Cuál fue la conjetura que surgió después de realizar este experimento?, (2) Si teóricamente, se asumió que muere (1/3) en cada

[55] Pérez, F. F. (18 de febrero de 2000). *iblio 3W. Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*. Recuperado el 2 de diciembre de 2014, de iblio 3W. Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales: http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm Union, S. –G. (2005). *Getting Started with ODL.*

generación y sobrevivió (2/3) en cada generación, entonces, ¿cuál fue la ecuación que mejor relacionó $b(n+1)\ y\ b(n)$?, (3) Ahora, a partir de la ecuación en diferencias obtenida, se hallaron los valores de $b(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ y se expresaron en función de $b(0)$ y (4) A partir de lo anterior, se dedujo una fórmula razonable para $b(n)$, es decir, se encontró una función discreta en la variable n, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$Para deducir la fórmula cerrada en variable discreta, fue necesario el apoyo del docente. A modo de Práctica en la última etapa de la actividad, se propusieron diversos problemas del tema de crecimiento y decrecimiento exponencial (dinámica de poblaciones) para que los estudiantes los realizaran. Aquí se buscó que ellos afianzaran el conocimiento adquirido en la fase de motivación y discusión.

A continuación, se hace una descripción de lo ocurrido durante la ejecución de una de las actividades didácticas desarrolladas por los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

Nos referiremos a la **Actividad 8: Teselación de Retículos**. En esta actividad, la intención es que los estudiantes modelaran matemáticamente utilizando ecuaciones en diferencias lineales de orden superior.

Los comentarios que hacen los estudiantes durante y después de la actividad de Teselación de Retículos son los siguientes:

1. Bastante didáctico el trabajo con las cartulinas para aprender matemáticas.

2. Experimentar, tomar datos, llegar a una ecuación en diferencias y hallar una generalidad.

3. Aprender a modelar matemáticamente haciendo todo el proceso.

Se presentaron las siguientes dificultades:

1. Encontrar la ecuación en diferencias del teselado del retículo de tamaño n x 1 unidades con baldosas cuadradas que no se superponen, de tamaño 1 x 1 y dobles del mismo color, de tamaño 2 x 1.

2. Obtener la ecuación en diferencias con baldosas de tamaño 1 x 1 y de tamaño 3 x 1, en la rejilla de tamaño n x 1.

3. Al obtener las raíces del polinomio característico, algunos estudiantes tienen aún inconvenientes de tipo algebraico.

4. Hallar la fórmula cerrada para la variable discreta “n”, que sirviera para saber el número de baldosas que se necesitan para cualquier “n”.

Finalmente, a fin de determinar la Percepción de los estudiantes se aplicó un instrumento a 30 estudiantes al final de la investigación, responden lo siguiente. Lo información recolectada permite el Análisis de los datos obtenidos usando las siguientes categorías: Necesidades: Una de las necesidades que se detectaron en esta investigación, es la carencia de contenidos en los curriculums de los cursos de ecuaciones diferenciales y en diferencias, así como en matemáticas discretas, donde no se enfatiza de forma directa la modelación matemática. Se observó que los estudiantes tienen insuficiencias a la hora de modelar matemáticamente, debido a que poseen falencias en algunos temas de asignaturas anteriores a la Matemática Discreta como Algebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales.

Los modelos matemáticos que los estudiantes conocen, son modelos continuos que estudiaron en la asignatura ecuaciones diferenciales y no se habían enfrentado a estudiar los modelos discretos. Respecto a la Postura teórica, En esta investigación se asume como postura teórica el pseudoempirismo (Hersh 1997), el cual se concretó en el diseño de actividades siguiendo la secuencia: motivación, experimentación, discusión y práctica. Esta secuencia se evidencia en cada una de las actividades. Cabe destacar, que los estudiantes se sintieron muy motivados al utilizar la experimentación y toma de datos reales, lo que les permitió formular conjeturas y llegar a modelar matemáticamente.

Las **respuestas** a las necesidades o carencias se dan desde la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y el cuasi empirismo. Según los tres elementos anteriores, las respuestas que pueden darse son las siguientes:

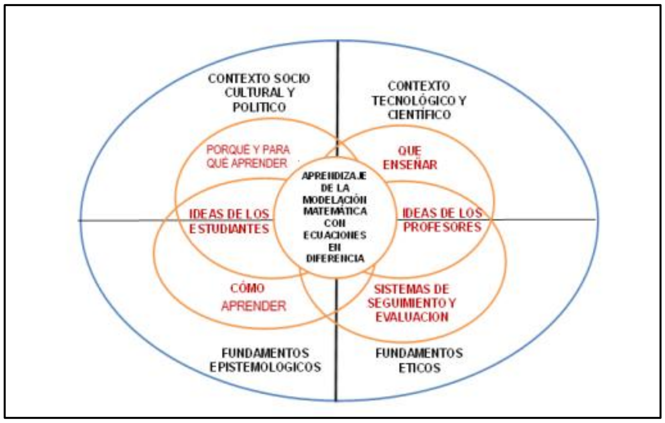
- Se utilizó la metodología de resolución de problemas de Polya, en la que cada una de las actividades comenzó con la motivación, luego la experimentación, la discusión y la práctica (suficientes problemas retadores para que afianzaran su conocimiento).
- La experimentación cuya postura fue el cuasi empirismo de Hersh, en la cual se hizo todo el proceso de modelación matemática, iniciando desde la toma de datos.
- La formulación de conjeturas por parte de los estudiantes, responde a la necesidad de predecir posibles comportamientos de las situaciones planteadas.
- Se presentaron muy diversas situaciones con variable discreta (el juego de la vida, torres de Hanói, teselados, cadenas de Markov, ecuación logística y caos).
- El uso de software matemático como herramienta fundamental en el procesamiento de datos y como método de verificación de soluciones.
- En todas las actividades, se partió de problemas contextualizados en los que se facilitó el hacer matemáticas en un contexto.

Algunas **reacciones** verbales y escritas que tienen los estudiantes después de realizar esta investigación son:

- “Las actividades y experiencias lúdicas realizadas son diferentes a la forma tradicional de enseñar matemáticas y ayudan a que se aprendan las matemáticas de una forma más dinámica. Estas actividades generan recordación y es un método mucho más ameno para entender”.
- “Las actividades me parecieron muy importantes, desarrollé otra lógica de leer las matemáticas aplicadas”.
- “Estas actividades son excelentes, nos permitieron seguir desarrollando la lógica y aplicarla en la solución de problemas cotidianos” .
- “El hecho de realizar las actividades en grupo generaba el intercambio de diferentes puntos de vista, lo cual ayudó a encontrar las soluciones de los problemas. El aplicar a casos, ayuda a diferenciar cómo se ve la matemática aplicada”.
- “Que el docente no haya explicado cómo se resolvían los problemas, nos obligó a que nos esforzáramos más en la búsqueda de las soluciones a los problemas matemáticos”.
- “Las actividades me parecieron muy interesantes porque le veo la esencia a las matemáticas. Utilizar software matemático Maxima, nos ayudó a encontrar las soluciones a los problemas más rápidamente”.
- “Aprender a modelar matemáticamente recogiendo datos experimentales y luego llegar a una fórmula general, me parece que es muy importante en mi formación como ingeniero”.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación, fue elaborar un Modelo Didáctico que mejore las competencias relacionadas con la modelación matemática y el pensamiento científico en contexto desde las ecuaciones en diferencias para estudiantes de ingeniería. A tal efecto, a partir de las observaciones iniciales y de los elementos del Marco Teórico, se elaboró un Modelo Didáctico cuyos componentes quedaron involucrados en las actividades diseñadas y aplicadas.



A partir de la aplicación de los elementos constitutivos del Modelo Didáctico, este se enriquece como queda descrito en las siguientes conclusiones:

- Es importante y motivante, incluir en los cursos de Matemáticas Discretas el concepto de Sistema Dinámico Discreto, las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas y no homogéneas de primer y orden superior y las nociones básicas de Sistemas Caóticos sin usar el cálculo.
- La aplicación de las actividades diseñadas en esta investigación, permitió que los estudiantes adquirieran habilidades para la formulación y aplicación de modelos matemáticos utilizando las ecuaciones en diferencias. Estas habilidades que adquiere el estudiante son de mucha importancia en la formación del futuro profesional de ingeniería, puesto que le aporta elementos necesarios para la toma de mejores decisiones.
- A través de la experimentación, formulación de conjeturas, toma de datos, análisis de gráficas, obtención de la ecuación en diferencias y el hallazgo de la fórmula discreta cerrada en variable discreta para cada una de las situaciones específicas planteadas a lo largo de las actividades, los estudiantes se apropiaron de herramientas fundamentales para la modelación matemática, lo cual sirvió para que construyeran su propio conocimiento.
- Los estudiantes mostraron a lo largo de la aplicación de las actividades motivación e interés en el desarrollo de cada una de ellas por la aplicabilidad que tienen. Además, se evidenció un progreso del grupo en el manejo de los conceptos involucrados y satisfacción por los logros alcanzados a pesar de las dificultades que algunos grupos tuvieron.
- Se resaltan las ecuaciones en diferencias como elemento innovador aplicado a diferentes situaciones: modelado de la evolución de poblaciones, funcionamiento de Google, teselados, procesos caóticos, etc., utilizando el software Maxima como herramienta tecnológica para apoyar el procesamiento de datos y el aprendizaje de la modelación matemática.
- En las actividades se utiliza la concepción cuasi empírica de la matemática de Hersh, teniendo en cuenta que la matemática se aprende haciendo matemáticas. A partir de lo anterior, las actividades incluyen la motivación, conjeturación, experimentación, discusión y práctica, elementos esenciales para aprender a modelar matemáticamente.
- Después de la aplicación de cada una de las actividades, se logró motivar a los estudiantes debido a que el diseño de estas, permitió que ellos aprendieran matemáticas haciendo matemáticas desde la conjeturación y experimentación. El modelo didáctico, permitió abordar el problema de Inclusión-Calidad, el cual busca incluir cada vez más estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de una manera amable, motivadora y contextualizada que haga que los estudiantes se apropien de su conocimiento y esto redunde en su alta calidad como profesional en ingeniería.
- En el sistema educativo colombiano, hay una fuerte tendencia a las prácticas docentes tradicionales, que poco a poco han incorporado recursos de información y comunicación tecnológica, pero que aún mantienen esquemas de enseñanza tradicionales, sin propiciar una participación activa de los estudiantes. La intencionalidad del sistema de actividades didácticas implementado en esta tesis, fue procurar que la participación activa de los estudiantes se hiciera realidad.
- Los estudiantes manifestaron en el instrumento final aplicado su deseo de “más explicación por parte del docente”, pues dentro de la cultura estudiantil se denota un apego al modelo de enseñanza tradicional en el cual para el estudiante, el docente asume un rol paternalista lo que no promueve el aprendizaje autónomo.
- Los estudiantes compararon los métodos de solución en variable discreta (ecuaciones en diferencias) y en variable continua (ecuaciones diferenciales) y comprobaron que los modelos discretos en muchas situaciones son una alternativa adecuada para modelar matemáticamente.
- En relación a los sistemas de seguimiento y evaluación, se manejó un sistema de retroalimentación basado en la observación de los episodios de clase (bitácoras, filmaciones, trabajo de los estudiantes, etc.), lo cual permitió valorar los logros alcanzados.

RECOMENDACIONES

1. Para futuras investigaciones, se recomiendan realizar trabajos en variable discreta aplicada a pre cálculo y matemáticas financieras, en los cuales pueden resolverse problemas contextualizados interesantes sólo utilizando aritmética.
2. Se recomienda aplicar actividades con intervalos de tiempo suficiente, que permita a los estudiantes madurar los conceptos involucrados en cada una de ellas y así poder desarrollar el syllabus de la asignatura matemáticas discretas.
3. El uso de software matemático en el aula hace que los procesos en la resolución de problemas sean más rápidos y además genera en el estudiante una motivación personal que le ayuda para que aprenda matemáticas.
4. Se recomienda que en todos los currículums de matemáticas para estudiantes de ingeniería, se incluya el tema de la modelación matemática que involucre dentro de la estrategia elementos como la experimentación, formulación de conjeturas, comprobación, demostración y aplicación, los cuales le proporcionen al estudiante insumos para aprender a manejar modelos continuos y discretos.
5. En futuros estudios y aplicaciones del modelo didáctico, sería recomendable la participación de equipos de profesores que intercambien ideas y promuevan mejoras en dicho modelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Advances in Difference Equations. 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014).

Agarwal, R.P. (1992). *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York.

Alligood, K., T. Sauer, J. Yorke. (1997). CHAOS: *An Introduction to Dynamical Systems*, Springer–Verlag, New York.

Baldoni, M. W., et al (2009). *Elementary Number Theory, Criptography and Codes.* Universitá di Roma. Springer. Italia.

Banasiak, J (2013). *Mathematical Modelling in One Dimension. An Introduction via Difference and Differential Equations.* Cambridge University Press.

Barrantes, H (2006). Resolución de Problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld.

Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias exactas y naturales UNED. Año . No.1.

Barquero, Bosch y Gascón. La modelización como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 13 de mayo de 2012 en http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2507874

Beeler, R.A. (2015). *How to Count. An introduction to Combinatorics and Its Applications.* Departament of Mathematics and Statistics East Tennessee State University. Springer, Johnson City.

Bender, E. (1978). *An Introduction to Mathematical Modeling.* University of California, San Diego. A Wiley Interscience Publication. EEUU.

Birkhoff, G. (1930). Formal theory of irregular difference equations, *Acta Math.* 54. 205–246.

Brito M.L, Romero I. A, Guerra E.F. (2011). El papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica.* Vol. 14. No. 2, mayo-agosto.

Burger, E., B., Starbird, M. (2001). *The Heart of Mathematics. An invitation of effective thinking.* Williams College, The University of Texas at Austin. John Wiley and Sons, INC. Third Edition.

Camarena, P. (s.f.) (2014). Matemáticas del mundo real. Recuperado el 30 de Octubre de 2014, de Matemáticas del mundo real: http//www..m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_ Gallardo-II.pdf Camarena, P. (s.f.).

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa,* Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en el URL: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf

Devaney, R. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments,* Addison-Wesley, Reading, MA.

Duane Detemple, W. (2014). *Combinatorial Reasoning. An Introduction to the Art of Counting.* Departament of Mathematics Washington State University Pullman, WA. Published by John Wiley & Sons, Inc.

Dujet, C. (2007). Matemáticas del Mundo Real. Recuperado el 30 de Octubre de 2014 en el URL: http://www.m2real.org/spip.php?article2.

Elaydi, S. (2003). Is the world evolving discretely? *Adv.in Appl. Math*. 31(1) 1–9.

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations.* (Third Edition). Springer.

Feigenbaum, M. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Statist. Phys.* 1925–52.

Feldman P. David (2012). *Chaos and Fractals. An elementary introduction.* College of the Atlantic, Bar Harbor, Maine, USA. Primera impresión. OXFORD University Press.

Font Vicent (2003). Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2.

Fractales. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capítulo1/3.html.

Gardner, M. (2001). The Colosal Book of Mathematics. Classic Puzzles, Paradoxes and Problems. Mathematical Institute, University of Warwick. W.W. Norton y Company, Inc.London.

Gardner, M. (1983). Wheels, Life and Other Mathematical Amusements. W.H. Freeman and Company New York.

Gleick, J. (2012). Caos. La creación de una ciencia. Traducido por Juan Antonio Gutiérrez-Larraya. Editado por CRÍTICA, S.L., Diagonal 662-664, 08034 Barcelona (España).

Gordon, S., et al (2004). Functioning in the Real World. A Precalculus Experience. Farmingdale State University of New York. Second Edition. Editorial Pearson. EEUU.

Hein, N., y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemáticas. [Versión Electrónica]. V Festival Internacional de Matemáticas, 1-25.

Hersh R. (1997). What is mathematics Really? Oxford University Press, Inc.

Hernández M. Néstor (2012*). Acciones didácticas para mejorar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería*. Tesis de Maestría Universidad Antonio Nariño. Bogotá.

Hernández Sampieri, R. (2010). *Metodología de la Investigación*. Quinta Edición. Editorial McGraw Hill, México D.F., páginas 364-365.

Kaiser G., et al. (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA 14.* International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling 1. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

Lakatos, Imre (1976). A Reanissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. Published by Oxford University Press on behalf of The British Journal for the Philosophy of Science. Stable URL: http//www.jstor.org/stable/686119.

Lakshmikantham, V. and D. Trigiante (2002). *Theory of Difference Equations:* Numerical Methods and Applications, Second Edition, Marcel Dekker, New York.

Lay David C., y Lay Steven R. (2016*). Linear Algebra and its Applications*. Fifth Edition. Editorial Pearson. University of Maryland, College Park, EEUU.

Ley de Enfriamiento de Newton. Ecuadijaz – Sites – Google. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://sites.google.com/site/ecuadijaz/ley-de-enfriamiento-de-newton.

Ley de Enfriamiento de Newton. Recuperado el (23-05-2016) en el URL: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/estadistica/otros/enfriamiento/enfriamiento.htm

Lewin K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social* Issues, Vol. 2 (4), p - 34-46.

Li, T.Y., and J.A. Yorke. (1975). Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* 82. 985–992.

May, R. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, j. *Revista Nature* 261, 459-467

Mazen Shain (2015). Explorations of Mathematical Models in Biology with Maple. Department of Mathematical Sciences Delaware State University Dover, DE, USA. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Mickens, R. (2000). Applications of nonstandard finite difference schemes, World Scientific, Singapore.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.(p 52)

Neuhauser C. (2011). *Calculus for Biology and Medicine*. Third Edition. University of Minessota. Editorial Prentice Hall, Pearson Education , Inc.

Paul Cull Mary Flahive Robby Robson (2005). *Difference Equations From Rabbits to Chaos.* Editorial Board. Springer Science Business Media, Inc.

Pérez, F.F. (2000). Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales. Recuperado el 2 de diciembre de 2014, de biblio 3w.

http://www.ub.edu/geocrit/b3w-204.htm. Union, S.G.(2005). Getting Started with ODL.

Poincare, H. (1885). Sur les equations lineaires aux differentielles ordinaires et aux differences finites, *Amer. J. Math.* 7. 203–258.

Salinelli E., Tomarelli F. (2014). *Discrete Dynamical Models.* Unitext. Volume 76. Tercera Edición. Springer. Department of Mathematics Trinity University San Antonio, Texas. Editorial Board. Springer Science Business Media, Inc.

Slavit, David; Cooper, Kevin; LoFaro, Tom (2002). *Understandings of solutions to differential equations through contexts,* Web-based simulations, and student discussion. Publicación: School Science and Mathematics. Editorial Blackwell Publishing Ltda. Hoboken, United Kingdom.

Simiode Group (2014). https://www.simiode.org/about

Simiode Group. M&M – Death and Inmigration (Student Version).

Srini D., Lehman E. (2005). Mathematics for Computers Science. *Recurrences. Lecture Notes.* The Towers of Hanói.

Strogatz, S. (2001). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering,* Perseus Books Group.

Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria. REDU*. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el 25 de abril de 2015 en http://red-u.net

Todorova, Tamara Peneva (2013). An Easy Way to Teach First-order Linear Differential and Difference Equations with a Constant Term and a Constant Coefficient. Available at SSRN: http//ssm.com/abstract=2217820 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2217820

Valdez, L. et al (2005). *Implementación de Software para la Enseñanza de las Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales.* Instituto Superior Andalgalá-Catamarca.

Villa, J.A. y Ruíz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad del Norte*. No 27 (mayo – agosto de 2009, Colombia).

Wanmei Soon, Luis Tirtasanjaya Lioe & Brett McInnes (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modeling.

Winkel, B. (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Cross coursing in mathematics: physical modelling in differential equations crossing to discrete dynamical systems.

Mathematical Sciences, United States Military Academy, 646 Swift Road, West Point, NY 10996-1501, USA.

Winkel, B. J. (2013). Browsing Your Way to Better Teaching. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 23(3): 274-290. www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua

Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Juego_de_la_vida.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Teselado.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Las torres de Hanói. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Hanói.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Cadenas de Márkov. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Cadena_de_Márkov.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Ecuación Logística. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-François_Verhulst.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Teoría del Caos. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz.

Yasuyuki Nakamura, Koichi Yasutake and Osamu Yamakawa (2012). IADIS *International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age* (CELDA). Some Aspects of mathematical model of colaborative learning.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS TIPOS DE INSIGHT EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PLANTEADOS EN EL SALON DE CLASES

CARLOS ALBERTO CAÑÓN RINCÓN
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
carloscanon@uan.edu.co

MAURO M. GARCÍA PUPO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
mauro@uan.edu.co

Abstract

This research had as an objective the design of a methodology that would allow appreciating and characterizing the occurrence of Insight in convergent and divergent types of mathematical thinking that are present in the problem solving achieved by students of a course of the bachelor's degree in mathematics teaching in the Antonio Nariño University.

A qualitative approach was used in a case study composed of two experiences, the first experience corresponding to the second academic semester of 2015, and the second, to the first academic semester of 2016. An elective course entitled "Development of mathematical thought through problem solving", was the setting in which this observation was made. This elective course had also the aim of contributing to the formation of the future mathematics professor, in a way that he or she can deepen the mathematical thought used in the process of problem solving.

As part of the analysis and discussion of the results obtained in the two experiments, it was possible to identify and characterize three types of insight in relation to the types of convergent and divergent *mathematical thinking present in the solution of mathematical problems proposed in the classroom, that when they occur allow us to find a successful solution.*

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo diseñar una metodología que permitiera apreciar y caracterizar la ocurrencia del insight en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución de problemas por los estudiantes, propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Se utilizó una metodología con un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos en dos experiencias; la primera correspondiente al segundo semestre de 2015 y la segunda al primer semestre de 2016, por medio de un curso electivo el cual se denominó "Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas", con la finalidad de contribuir a la formación del futuro profesor de matemáticas de tal forma que pueda profundizar en el conocimiento matemático ya adquirido como resultado del pensamiento matemático empleado en el proceso de la solución de problemas.

Como parte del análisis y discusión de los resultados obtenidos en las dos experiencias fue posible identificar y caracterizar tres tipos de insight en relación con los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la solución de problemas matemáticos propuestos en el salón de clases, que cuando ocurren permiten encontrar una solución de forma exitosa.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación *"Contribuciones epistemológicas a la educación matemática"* cuya finalidad es la búsqueda de respuestas aproximadas a tres preguntas estrechamente relacionadas a la solución de problemas matemáticos. Sierpinska y Lerman (1996) proponen éstas:

- ¿Cuáles son los orígenes de los conocimientos científicos?
- ¿Cuáles son los criterios de validez de los conocimientos científicos?
- ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?

Sin embargo, este trabajo también está en relación directa con otra de las líneas de investigación contemplada en los programas de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, la referida a *estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos)*[56].

Sin embargo, se considera que muchos de los aspectos que se manifiestan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas presentan elementos que son de sumo interés lo cual sugiere la realización de un estudio sistemático.

Las relativas al pensamiento matemático encierran una riqueza que al estudiarlas pueden revelar propiedades que permitan enriquecer una parte del estado del arte, en relación a los fenómenos cognitivos que puedan caracterizar el pensamiento matemático.

Existen diferentes clasificaciones para el pensamiento matemático. Se va a tener presente una de ellas, en la que algunos autores clasifican en dos categorías el pensamiento matemático:

1. Pensamiento convergente

[56] Documento del programa de Doctorado en Educación Matemática, 2011.

2. Pensamiento divergente[57]

Para Guilford (1950) el pensamiento convergente se fundamenta en la búsqueda de una respuesta determinada o convencional cuyo resultado lo identifica con una única solución a un problema. Por otro lado, el pensamiento divergente se identifica con una situación en la cual se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor y/o novedosa solución al problema. Además, incluye la creatividad al considerar que todos los individuos poseen ambos tipos de pensamiento, pero no todos tienen la misma capacidad para utilizarlas.

El autor de esta investigación considera que en la construcción de una parte de las contribuciones en las ciencias matemáticas ha prevalecido un pensamiento convergente. Sin embargo, se considera que los grandes aportes, aquellos que marcan nuevos horizontes y que transcienden, han estado soportados por un pensamiento divergente.

Por otra parte, se ha podido constatar directamente que en la construcción de soluciones a problemas matemáticos relevantes o en la solución de problemas de competiciones matemáticas se han presentado experiencias singulares en las cuales, después de transcurrido un cierto tiempo de búsqueda infructuosa de una solución a un problema, ésta ha emergido abruptamente, incluso después de haberse abandonado la búsqueda. Esto puede ocurrir en circunstancias muy ajenas al ambiente académico de la labor matemática; por ejemplo, se puede hacer referencia a Gauss, quien escribía así refiriéndose en una carta a cierto teorema de teoría de números que había tratado de demostrar, sin éxito, durante varios años.

"Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto. Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible… (De una carta comentada en Revue des questions scientifiques, octubre 1886, p. 575. Citado por Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, cap.1)"[58].

En un artículo Miguel de Guzmán (2001) relata un suceso ocurrido en 1858, donde Hamilton describe su hallazgo de la teoría de los cuaternios, tras quince años de infructuosos esfuerzos.

"Mañana será el aniversario quince de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan i, j, k [los nuevos números que hacen el papel de i de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces.... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años" …[4]

Por otra parte, a finales del siglo XIX, Poincaré quiso caracterizar el cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido se puede encontrar descripciones en la literatura de educación matemática vinculada con la solución de problemas, el cual se relaciona a veces con el talento o con la capacidad y con la creatividad de cada individuo, como parte sustancial de sus competencias.

Ahora bien, la definición de problema ofrecida por Campistrous y Rizo (1996):

[57] Términos introducidos por Guilford en 1950.

[58] Guzmán, M. (2001). *La actividad subconsciente en la resolución de problemas.* Recuperado el 2 de abril de 2014 del URL: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/04vida/parapensarmejor/27capitulo.html

"Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"[59], permite relacionar la definición de problema y el proceso de solución de manera directa con el proceso del pensamiento matemático que se puede activar para transformar las situaciones iniciales a que estos autores se refieren.

Podría preguntarse: ¿Son o no los procesos de los dos tipos de pensamiento matemático, ya mencionados, consecuentes con el problema mismo? La respuesta es no. Se tienen ejemplos de sujetos que ante un mismo problema de la matemática elemental presentan diferentes tipos de pensamiento, ya que algunos podrán mostrar sólo una solución correcta, mientras que otros podrán ofrecer varias soluciones, y para otros ninguna solución inmediata. Aquí se puede preguntar ¿en estos últimos existe una ausencia total de pensamiento matemático de cualquiera de los dos tipos?

Planteamiento del problema

En la actualidad se pueden encontrar numerosos trabajos en el campo de la educación matemática dedicados al desarrollo del pensamiento matemático convergente o divergente relacionado con la resolución de problemas desde la escuela hasta la universidad.

Por otra parte, se considera que, durante el proceso de solución de un problema, pueden darse pequeños saltos en el pensamiento, correspondientes a la superación del bloqueo que provoca el mismo problema cuando no se encuentra una solución inmediata. Por lo general, esto ocurre porque es característico del cerebro humano que, después de estudiar cierto problema por un buen tiempo, sin encontrar dicha solución, el subconsciente continúa trabajando a pesar de que se esté realizando otras actividades muy diferentes y que, luego de un tiempo, que puede durar poco o hasta años; aparece de repente la solución del mismo. Esto es lo que se describe como el *insight* (Lisa Aziz-Zadek, (2013), Poincaré (1908)), o la experiencia de **iluminación** que de alguna forma le da una solución a lo que parecía imposible.

Algunos autores, entre ellos Lisa Aziz-Zadek[60], (2013) suponen que este tipo de *fenómeno cognitivo* está asociado al pensamiento divergente que produce una activación alta e inesperada al asociar ideas remotas y que además activa las áreas de placer del cerebro.

El insight se produce cuando se da el desbloqueo interno, dando paso a la aclaración de lo que tan insistentemente se buscaba y de acuerdo a lo que manifestaba Hadamard seguidor de las ideas de Poincaré[61] forma parte de cuatro fases en el proceso creador: i) preparación, ii) incubación; iii) iluminación y iv) verificación.

Davis y Hersh (1980), lo describen como *"destellos de insight",* algo que ha dado paso a la luz, una nueva comprensión de la persona.

Lo anterior sugiere la necesidad de responder:

- ¿Qué tipos de *insight* podrían propiciarse dentro y fuera del aula en el transcurso de los esfuerzos de los estudiantes por resolver problemas no rutinarios?
- ¿Si el pensamiento divergente debe asociarse únicamente a situaciones donde se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor o novedosa solución?
- ¿Se podría asociar el pensamiento divergente sólo con una solución novedosa o excepcional?

Justificación del problema

Actualmente se encuentran diferentes investigaciones sobre el pensamiento divergente y convergente, y que involucran la resolución de problemas en diferentes niveles.

En este trabajo se pretende comprender si en los dos tipos de pensamiento matemático, tanto el convergente como el divergente, pueden describirse diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa.

Durante este proceso, se busca establecer si el *insight* puede ser propiciado en los estudiantes cuando adquieren un nuevo conocimiento a través de la resolución de problemas no rutinarios cuidadosamente construidos.

Por otra parte, en el trabajo de Fauconnier & Turner (1998 y 2002) *"Conceptual Integration Networks"* se sostiene que la integración conceptual en general es una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales, y la categorización conceptual. Los autores presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar, que se denominan *cognitive blending*, la que se considera relacionada con el fenómeno del *insight*. Estos autores describen una estructura de entrada de los espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones. En el Gráfico 1 se ilustra lo explicado por estos autores en sus obras, gráfico en el cual el autor de esta investigación inserta dicho *insight* como mediador de los espacios mentales.

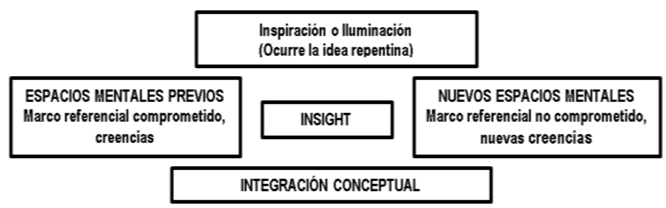


Gráfico 1[62]. Esquema de la ocurrencia de un *insight*.

Es uno de los intereses centrales del presente estudio dar una caracterización a este tipo de *fenómeno cognitivo*[63] en relación con los dos tipos de pensamiento matemático que se pueden presentar en el proceso de solución, a partir de la observación de dos grupos de estudiantes que trabajan en la solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, en dos semestres consecutivos.

Lo anterior induce a formular el siguiente **problema de investigación**:

¿Qué características tienen las ideas que emergen y que se conocen como *insight* cuando ocurren en los tipos de pensamiento convergente o divergente y que se evidencian en los estudiantes en el proceso de solución de problemas matemáticos propuestos en clases?

Objeto de estudio: el pensamiento matemático convergente y divergente en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Se pretende establecer que en estos dos tipos de pensamiento matemático pueden describirse varios tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas

[59] Campistrous l. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.
[60] Aziz-Zadek, Lisa, et.al.(2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci.*,8 (4): pp. 475-480.
[61] Poincaré, H. (1908). *L'Enseignement Mathématique.*

[62] García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. *International Congress of Mathematicians, Seoul, Korea*
[63] Por denominarlo de esta manera.

matemáticos de forma exitosa, cuestión que se explicitará más adelante en la hipótesis de esta investigación. Ahora se propone el siguiente

Objetivo general

Describir las ocurrencias del *insight* en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución por parte de los estudiantes de problemas propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Objetivo específico

Determinar las diferentes dimensiones que deben permitir apreciar el *insight*, así como caracterizar su ocurrencia dentro de los tipos de pensamiento matemático (convergente y divergente) que puedan ocurrir durante el proceso de solución de problemas planteados en clase.

Todo lo anterior direcciona el **campo de acción** como:

El *insight* dentro de los dos tipos de pensamiento matemático, el convergente y el divergente, que se manifiestan en el proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño cuando asisten a cursos relacionados con la resolución de problemas matemáticos.

En adición posibilita formular la siguiente:

Hipótesis de investigación

Se pueden describir diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa y novedosa. (Ver Gráfico 2.)

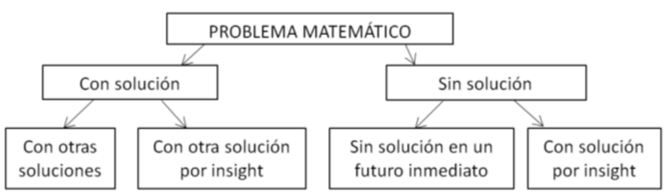


Gráfico 2. Sobre los posibles tipos de insight en la solución de problemas matemáticos.

Tareas

1. Determinar el estado del arte y el marco teórico.

2. Diseñar una metodología de trabajo basada en la observación y seguimiento del comportamiento de aquellos estudiantes a quienes se les pueda presentar el *insight* en el proceso de solución de los problemas matemáticos propuestos.

3. Describir cada situación singular, dentro o fuera del salón de clases como "estudio de casos".

4. Analizar los resultados y descripción de características encontradas en los *insight* en el marco de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente (o en ninguno).

5. Construir argumentos alrededor de la hipótesis o conjetura planteada.

6. Elaborar y presentar el texto científico de esta investigación.

Aporte teórico y práctico

El diseño y fundamentación de un esquema de resolución de problemas que permita apreciar y caracterizar los diferentes tipos de *insight* que puedan ocurrir en los dos tipos de pensamiento matemático estudiados y que pueden estar presentes en el proceso de resolución de problemas no rutinarios en el salón de clases.

Novedad científica

La relación de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente con el proceso o fenómeno denominado *insight*.

Estructura de la tesis

La tesis está estructurada con una introducción, cuatro capítulos: un capítulo 1 Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico; un capítulo 3. Diseño metodológico de la investigación y un capítulo 4. Resultados, discusión y análisis. Además, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE. Para fundamentar esta investigación se analizaron trabajos relacionados con la ocurrencia del *insight* y de factores asociados a él en tres direcciones: I. El *insight* según las ciencias psicológicas. II. Pensamientos convergente y divergente. III. Resolución de problemas y pensamiento matemático.

En el primero, se hace referencia a las siguientes investigaciones: *Creatividad e insight de* Martín, C. (1999), Psicología de la ciencia y creatividad de Romo, M. (2007), *Studying insight problem solving with neuroscientific methods* de Luo, J. Knoblich, G. (2007), *Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving* de Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996), *AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students* de *Liljedahl, P. (2004).* Los anteriores trabajos deben ayudar a una descripción de los posibles *insight* que pueden emerger en transcurso de solución de problemas planteados en el aula.

En el segundo, se destacan: *Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving* de Alamolhodaei, H. (1997), *Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems* de Sak, U. Maker, C. (2005*). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach* de Oh, N. K, Jung S. P., y Jee H. P. (2006). Estos autores relacionan los dos tipos de pensamiento, tanto el convergente, como el divergente, con la fluidez, la originalidad y la flexibilidad.

En el tercero, se destaca la investigación: *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas* de Cruz, M. (2006*), La resolución de problemas. Una revisión teórica* de Blanco, J. (1996), que incursiona sobre aspectos importantes de la enseñanza de las matemáticas a través de la solución de problemas desde el punto de vista de la psicología de la Educación Matemática. Estos trabajos constituyen un buen punto de partida para este estudio de casos.

Al analizar el alcance de los resultados de los trabajos anteriores, se puede concluir que ellos constituyen una buena base para alcanzar, con esta investigación, los objetivos para la caracterización de los posibles *insight* que se puedan apreciar y que surgen en la actividad escolar con estudiantes que son retados a solucionar problemas matemáticos planteados en clases.

La mayoría de las metodologías implementadas en las anteriores investigaciones son cualitativas, lo que sugiere que la implementación de un estudio de casos para la detección de características, de este tipo de fenómeno cognitivo (*insight*), que presumiblemente puedan observarse en los procesos de solución de problemas planteados en el aula de clases es una decisión acertada.

Los resultados de estos trabajos permiten ajustar un marco teórico. Además, debe sugerir un diagrama del flujo que conecte la resolución de problemas con las ocurrencias de *insight*, así como, clarificar la relación de éstos con los pensamientos convergente y divergente.

En el CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO. Se hacen consideraciones psicológicas que, Según Fauconnier & Turner (1998 y 2002) *“Conceptual Integration Networks”* sostienen que la integración conceptual es en general es una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales. Ellos presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar y que denominan *cognitive blending*, las que se consideran relacionadas con el fenómeno del *insight*. Describen una estructura de entrada de espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros y realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones.

Métodos de los cuatro pasos. Polya propone en su primer libro el *“Método de los Cuatro Pasos”*, para resolver cualquier tipo de problema se debe: 1) comprender el problema, 2) concebir un plan, 3) ejecutar el plan y 4) examinar la solución” (Polya, 1965:7-12). Para cada una de estas etapas Polya propone una serie de preguntas y sugerencias; se retomarán las más importantes para esta investigación, ya que potencialmente deben permitir, de alguna forma la ocurrencia de algún tipo de *insight*, en el proceso de solución de problemas en el salón de clases.

Otras consideraciones sobre la resolución de problemas. Polya en su obra *Matemáticas y razonamiento plausible* sostiene que el conocimiento matemático esta soportado por el razonamiento demostrativo y apoya las conjeturas por medio del razonamiento plausible, *ya que una prueba matemática es un razonamiento demostrativo, pero la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible* (Polya, 1954: 13).

Se entiende como un razonamiento conjetural aquel que permite elaborar hipótesis, conjeturas, y así examinar su validez en cualquier momento; además, de contrastarlas y reformularlas según sea el caso y así obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser demostradas.

Polya hace la distinción de estos dos tipos de razonamiento, ya que el demostrativo, es seguro y definitivo, mientras que el plausible es azaroso, discutible y provisional.

Por otro lado, Mason, J, Burton, L. y K. Stacey (1988) en su obra *Pensar Matemáticamente*, describen los procesos que rigen el pensamiento matemático en general, el objetivo es mostrar cómo acometer cualquier problema; es decir, cómo atacarlo de un modo eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Ellos sugieren tres fases:

1) *El abordaje*. En esta fase se basa en las respuestas a tres preguntas: ¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo que puedo utilizar?

2) *El ataque*. En esta fase el estudiante siente que se ha apropiado el problema, los estados de ánimo que se asocian se describen en ¡Atascado! y ¡Ajá!, y el proceso que debe tener lugar es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente.

3) *La revisión*. Es el momento de mirar hacia atrás, revisar el trabajo hecho, para mejorar y ampliar su capacidad de razonamiento; así como, para lograr de cierta forma situar la resolución en un contexto más amplio. Esta fase se caracteriza en tres momentos: I) *Comprobar la solución*. II) *Reflexionar en las ideas y momentos claves*. III) *Generalizar a un contexto más amplio*.

De lo anterior se propone una integración de una relación de las dimensiones: la psicológica y la didáctica como soporte teórico de esta investigación en el siguiente diagrama de flujos:

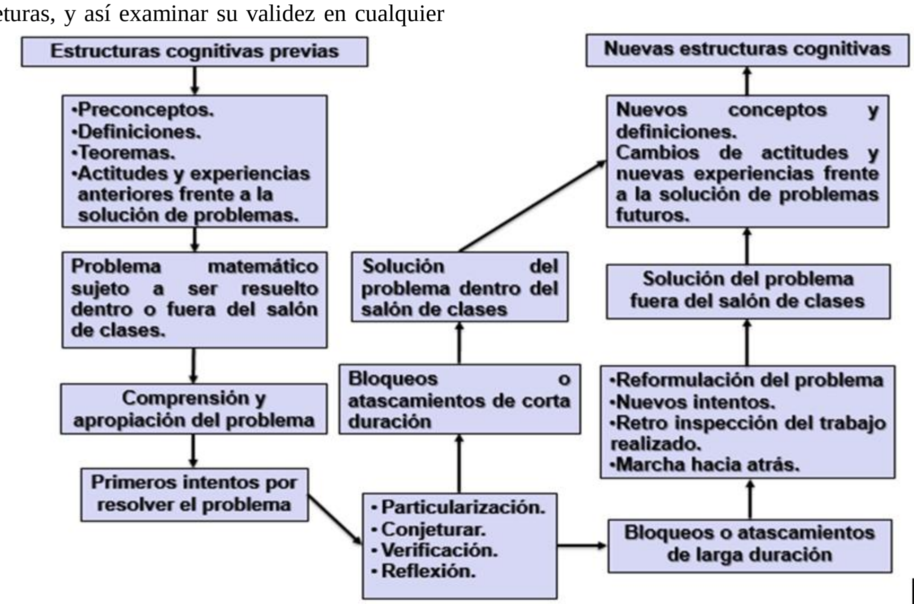


Gráfico 3: Diagrama teórico de la investigación.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Dada la naturaleza del fenómeno cognitivo que se pretende estudiar, es necesario una metodología de investigación fundamentada en el paradigma cualitativo que, según Fraenkel, J., Wallen, N. (1996); las características básicas para este tipo de estudio son:

1. El ambiente natural y el contexto en que se da el problema, es la fuente directa y primaria y la labor del investigador son los instrumentos claves en la investigación.

2. La recolección de los datos es más verbal que cuantitativa.

3. Los investigadores enfatizan tanto en los procesos como en los resultados.

4. El análisis de los datos se da modo inductivo.

5. Interesa saber cómo piensan los sujetos en una investigación y qué significado poseen sus perspectivas en el asunto que se investiga.

El estudio se implementó en un curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño correspondientes a dos semestres el 2-2015 y el 1-2016. Se hizo un seguimiento sistemático a cinco estudiantes, dos (**E1 y E2**) y tres (**E3, E4 y E5**) respectivamente, en ambos semestres se relató, entrevistó, grabó y filmó las sesiones de clase para su posterior análisis.

La sistematicidad de estas acciones facilitó una descripción de los hábitos, actitudes, habilidades y capacidades en la solución de los problemas matemáticos diseñados. En particular, se hizo una observación de cada uno de los estudiantes, para poder captar las posibles ocurrencias y singularidades que posibilitaran una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que pudieran presentarse y su relación con ambos tipos de pensamiento. Para cada clase, se propusieron actividades con dos problemas relacionados con las temáticas de geometría, algebra, desigualdades y cálculo. Cada estudiante trabajó en forma individual, se dieron algunas generalidades al inicio de cada uno de estos temas. Se presenta un esquema de la metodología diseñada para este estudio:

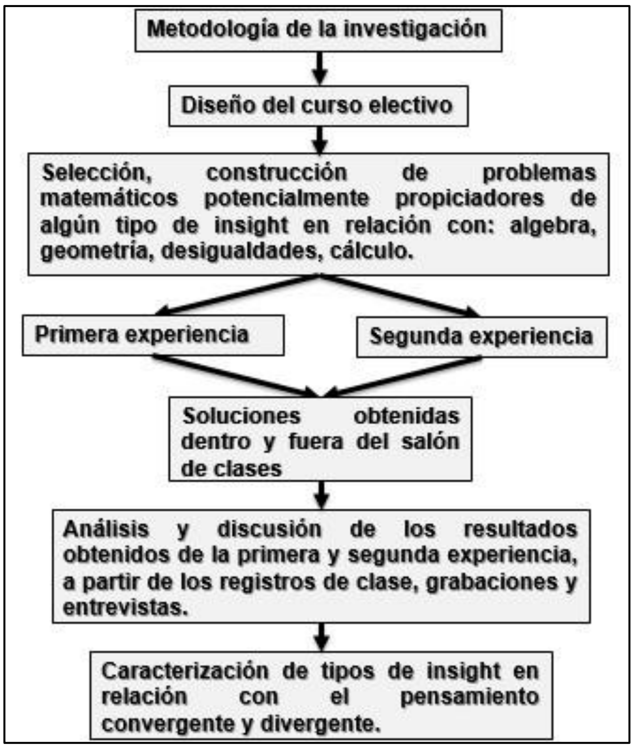


Gráfico 4: Esquema para una metodología de la investigación.

Se considera que la metodología implementada y un adecuado diseño de las actividades deban permitir la ocurrencia de diferentes tipos de *insight* y, por tanto, la posibilidad de poder apreciar y caracterizar diferentes estadios de los mismos. **CAPITULO 4. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.** A partir de la observación del comportamiento de los estudiantes, el análisis de cada una de las clases y el seguimiento que se le dio a cada uno de los que experimentaron este fenómeno cognitivo, se apreciaron ciertas regularidades en las soluciones dadas. Se muestran dos problemas con soluciones asociadas y representativas de dos de los insight caracterizados. Para ello, se presentan dos problemas y las soluciones asociadas. Un primer problema permite caracterizar esta experiencia como un *insight inmediato.*

Problema 1: Para medir la altura de las nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permita calcular la altura h de las nubes.

El estudiante **E2** resuelve el problema. Una rápida interpretación del mismo fue determinante para su solución. El planteamiento del problema no ofreció ilustración grafica alguna. **E2** en sus primeros intentos logra mostrar adecuadamente la solución.

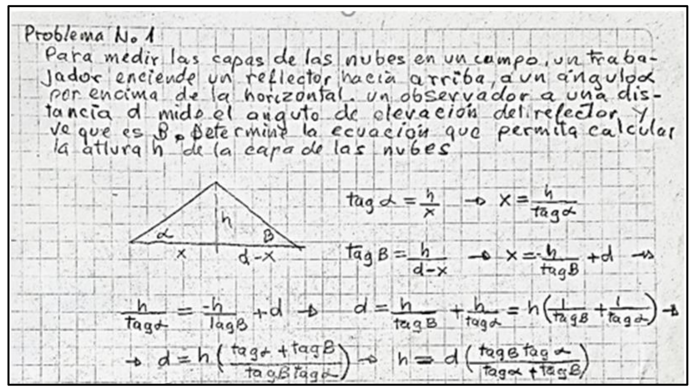


***Figura* 1. Solución del estudiante E2 del problema 1 de la actividad 1 de 2015.**

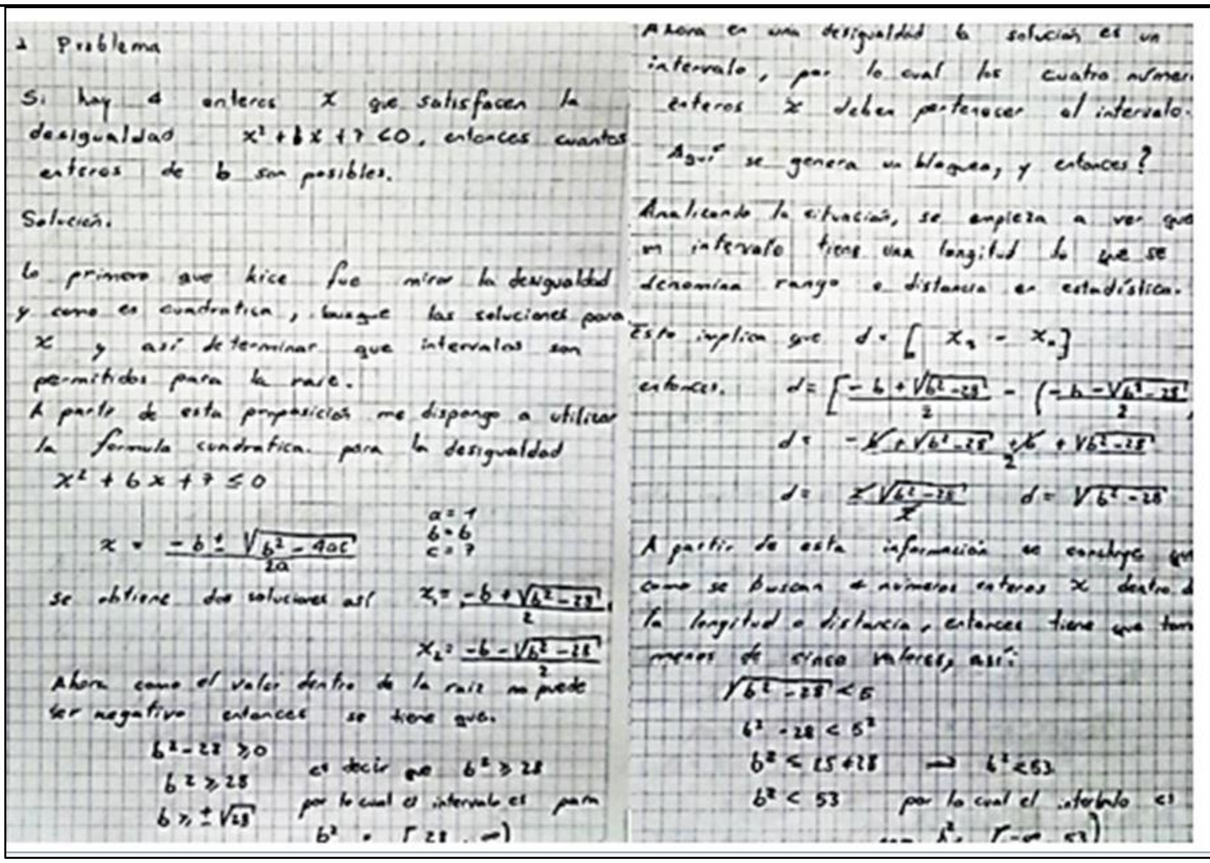
Sin embargo, los problemas cuyas soluciones fueron obtenidas posteriormente fuera del salón de clases requirieron una apropiación e interés del estudiante por resolverlos, propició la descripción de lo que se denominó un *insight a posteriori*.

Tal es el caso que proporciona el segundo problema:

Problema 2: Si hay exactamente 4 enteros x, que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$ ¿Cuántos valores enteros de b son posibles?

A partir de la solución de la ecuación cuadrática, el estudiante se percata del intervalo donde están todas las soluciones de la desigualdad en términos de la variable desconocida b, al calcular la longitud del intervalo encuentra la expresión $d = \sqrt{b^2 - 28}$, con la cual pudo inferir y demostrar que $b^2 \in (28{,}53)$, de esta forma los únicos enteros que satisfacían esa condición son $-7, -6, 6\ y\ 7$.

Se presenta un problema resuelto posterior a esa actividad por el estudiante **E2**, que le requirió varias horas de trabajo.



2 Problema

Si hay 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2+bx+7<0$, entonces cuantos enteros de b son posibles.

Solución.

Lo primero que hice fue mirar la desigualdad y como es cuadratica, busque las soluciones para x y así determinar que intervalos son permitidos para la raíz.

A partir de esta proposición me dispongo a utilizar la formula cuadratica para la desigualdad

$x^2+6x+7\le 0$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $a=1$ $b=6$ $c=7$

se obtiene dos soluciones así $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-28}}{2}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-28}}{2}$

Ahora como el valor dentro de la raiz no puede ser negativo entonces se tiene que:

$b^2-28\ge 0$ es decir que $b^2\ge 28$

$b^2\ge 28$ por lo cual el intervalo es para

$b\ge\pm\sqrt{28}$ $b^2 \in [28, \infty)$

Ahora en una desigualdad la solución es un intervalo, por lo cual los cuatro números enteros x deben pertenecer al intervalo.

Aquí se genera un bloqueo, y entonces?

Analizando la situación, se empieza a ver que un intervalo tiene una longitud lo que se denomina rango o distancia en estadística.

Esto implica que $d=[x_1-x_2]$

entonces, $d=\left[\frac{-b+\sqrt{b^2-28}}{2}-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-28}}{2}\right)\right]$

$d=\frac{-b+\sqrt{b^2-28}+b+\sqrt{b^2-28}}{2}$

$d=\frac{2\sqrt{b^2-28}}{2}$ $d=\sqrt{b^2-28}$

A partir de esta información se concluye que como se buscan 4 números enteros x dentro de la longitud o distancia, entonces tiene que tomar menos de cinco valores, así:

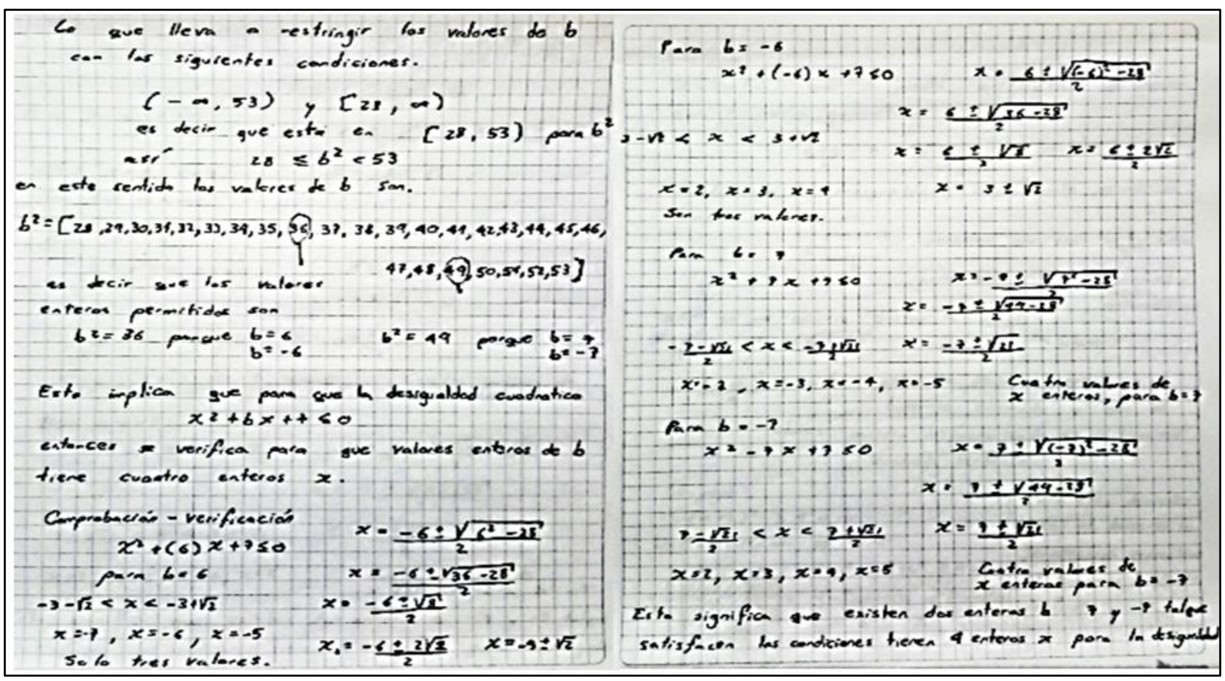
$\sqrt{b^2-28}<5$

$b^2-28<5^2$

$b^2<25+28 \rightarrow b^2<53$

$b^2<53$ por lo cual el intervalo es para $b^2 \in (-\infty, 53)$

***Figura* 2 (hoja 1): Solución del estudiante E2 al problema 2 de la actividad 8 de 2015.**



Lo que lleva a restringir los valores de b con las siguientes condiciones.

$(-\infty, 53)$ y $[28, \infty)$

es decir que está en $[28, 53)$ para b^2

así $28\le b^2<53$

en este sentido los valores de b son.

$b^2=[28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53]$

es decir que los valores enteros permitidos son

$b^2=36$ porque $b=6$, $b=-6$ $b^2=49$ porque $b=7$, $b=-7$

Esto implica que para que la desigualdad cuadratica $x^2+bx+7<0$ entonces se verifica para que valores enteros de b tiene cuatro enteros x.

Comprobación – verificación

$x^2+(6)x+7\le 0$ para $b=6$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-28}}{2}$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-28}}{2}$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{8}}{2}$

$x_1=\frac{-6\pm 2\sqrt{2}}{2}$ $x=-3\pm\sqrt{2}$

$-3-\sqrt{2}<x<-3+\sqrt{2}$

$x=-7$, $x=-6$, $x=-5$

Solo tres valores.

Para $b=-6$

$x^2+(-6)x+7\le 0$ $x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-28}}{2}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}$ $x=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2}$

$3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$ $x=3\pm\sqrt{2}$

$x=2$, $x=3$, $x=4$

Son tres valores.

Para $b=7$

$x^2+7x+7\le 0$ $x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-28}}{2}$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-28}}{2}$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{21}}{2}$

$\frac{-7-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{-7+\sqrt{21}}{2}$

$x=-2$, $x=-3$, $x=-4$, $x=-5$ Cuatro valores de x enteros, para $b=7$

Para $b=-7$

$x^2-7x+7\le 0$ $x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-28}}{2}$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49-28}}{2}$

$x=\frac{7\pm\sqrt{21}}{2}$

$\frac{7-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{21}}{2}$

$x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$ Cuatro valores de x enteros para $b=-7$

Esto significa que existen dos enteros b 7 y -7 tales que satisfacen las condiciones tienen 4 enteros x para la desigualdad

***Figura* 3 (hoja 2): Solución del estudiante E2 al problema 1 de la actividad 10 de 2015**.

En resumen, dentro del proceso de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, y la observación a los estudiantes, se pueden identificar, caracterizar y asociar estos tres tipos de *insight* y su relación con los pensamientos matemático convergente o divergente, que cuando suceden permiten solucionar un problema matemático de forma exitosa. Para cada uno de ellos se identificaron con características propias.

Una aproximación descriptiva del insight inmediato. El estudiante en sus primeros intentos madura algunas ideas que le permiten lograr la solución del problema matemático en el salón de clases, los atascamientos o bloqueos que presenta el estudiante son de corta duración:

1. Por lo general comprende y se apropia del problema, en estos intentos por llegar a una solución, con instancias que permiten apreciar regularidades, invariantes que puedan conducir a una solución.

2. El estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.

3. Un factor indispensable en la solución de la mayoría de los problemas son los preconceptos que tiene el estudiante con las diferentes temáticas abordadas, además de la identificación de lo que se quiere determinar con el problema.

4. Este *insight* está en relación al tipo de pensamiento convergente en el estudiante ya que éste llega a la solución del problema de forma casi inmediata, sus soluciones son convencionales y no requieren grandes esfuerzos en su construcción.

Es de resaltar que, en algunos de los problemas, el estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.

Hay un esfuerzo considerable de presentar sus soluciones de una manera clara y convincente.

Una aproximación descriptiva del *insight a posteriori*.

El estudiante en sus primeros intentos por resolver el problema no tiene avance alguno, los momentos de atascamiento o bloqueo son prolongados y en la mayoría de los casos pueden tomar bastante tiempo. Por lo general el estudiante se siente motivado a buscarle solución, además de asumir el problema con seriedad; se maduran nuevas ideas que pueden tardar un buen tiempo en desarrollarse. Precisamente, esto es lo que se le ha denominado *incubación.* A veces, emerge una solución cuando menos la espera. Pero es frecuente que la obtengan al hacer una retro inspección de su trabajo, que les permitió comprender mejor la situación.

Un factor identificado en los estudiantes es las diferentes percepciones del problema mismo, que de alguna manera maduran nuevas ideas, que se encadenan repentinamente; en fin, para llegar a una solución del mismo.

Se manifiesta una sensación de descanso, alegría, felicidad al romper la frustración que causaba el no poder darle solución al mismo.

Una aproximación descriptiva del *insight por comprensión*.

Se identifica cuando el estudiante encuentra otra solución posteriormente al problema; el estudiante genera ideas que le permiten encontrar una nueva vía de solución que puede ser más novedosa que la primera, lo cual puede darse dentro o fuera de salón de clases. Por lo general presenta las siguientes características:

1. Los bloqueos o atascamientos pueden ser de corta o larga duración.
2. Las soluciones presentadas por los estudiantes son distintas a las esperadas.
3. Hay un buen entendimiento y apropiación del problema.
4. Hay novedad en la segunda solución.

Consideraciones sobre la relación del *insight* y los tipos de pensamientos convergente y divergente

De los resultados correspondientes a la primera y segunda experiencia, los tres tipos de *insight* identificados se relacionan con los tipos de pensamiento convergente y divergente de la siguiente forma:

El pensamiento convergente es un proceso mental fundamentado en la búsqueda de una solución convencional o determinada a un problema que no requiere un gran esfuerzo, solución que se puede alcanzar con la información disponible que descansa en espacios mentales previos, constituido por conceptos, definiciones, resultados, y experiencias anteriores. Es por ello que el *insight inmediato* se relaciona con este pensamiento. Se puede resumir que:

- Por lo general ocurre dentro del salón de clases.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.

Es de resaltar que en la gran mayoría de los problemas resueltos dentro del salón de clases los bloqueos son de corta duración y en los primeros intentos por resolverlos emergen y se desarrollan las ideas que se constituyen en la solución de los mismos. Sin embargo, se conocen situaciones de estudiantes que han experimentado este tipo de insight, con una solución muy novedosa y una explicación fuera de lo común que, muy bien puede asociarse a un pensamiento divergente.

El *insight a posteriori* y el *insight por comprensión* se relacionan con el pensamiento divergente de la siguiente forma:

El pensamiento divergente es un proceso mental que no necesariamente debe estar ligado a múltiples vías de solución de un problema; las soluciones requieren de un gran esfuerzo y tiempo en desarrollarse, además debe incluir perspicacia, fluidez, y novedad por parte del estudiante.

Se puede resumir que:

- Los bloqueos o atascamientos son de larga duración.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.
- El estudiante requiere hacer cortas pausas para reanudar el problema.
- El estudiante intenta verificar sus conjeturas de una forma rigurosa.
- El problema es asumido con compromiso y seriedad.
- Las soluciones de los problemas son presentadas de una forma clara, fluida, en algunas ocasiones hay novedad.

El bloqueo del problema es superado por el estudiante cuando hace una retro inspección de su trabajo y hace una marcha hacia atrás, dando paso a nuevas ideas que, al desarrollarlas, permiten alcanzar la solución del problema.

Los diferentes insight en el proceso de la resolución de problemas. Basados en las contribuciones de Fauconnier y Turner, así como, las de Polya, Mason, Burton y Stacey en relación con la resolución de problemas y el lugar que ocupa una posible ocurrencia del *insight,* Se integran en el siguiente esquema los tres tipos de *insight* que se acaban de caracterizar:

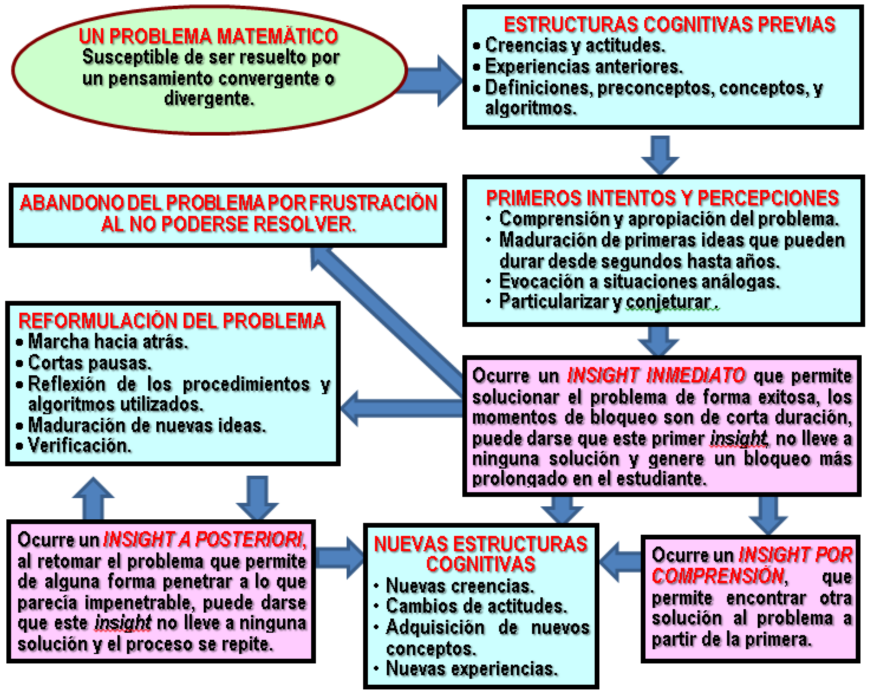


Gráfico 5: Un esquema que describe el lugar que ocupa una solución por insight en el proceso del desarrollo de la resolución de problemas.

CONCLUSIONES

Se describieron las características que permitieron diferenciar a cada uno de los tres tipos de *insight*. Esto fue posible al apreciar la ocurrencia de éstos bajo una estricta observación a los cinco estudiantes en los dos semestres.

Está muy claro que, en los procesos de solución de problemas, además de los tres tipos de insight, existen dos diferentes niveles de *insight*. No es lo mismo aquellos que están muy bien documentados en la literatura y que permitieron y están permitiendo aportes a las matemáticas y por tanto de una cierta o gran magnitud y además de trascendencia científica por lo que han significado y significan. Muchos de ellos marcan un antes y un después en las Ciencias Matemáticas cada vez que ocurrieron. Es conveniente diferenciar los mismos atendiendo a dicha trascendencia.

Se deben diferenciar estas dos categorías o niveles de *insight*. La primera se identifica como la **científica** y la segunda la **escolar**. Claro está, la **científica** es aquella cuyo resultado se ha heredado y construido en ese edificio que llamamos Ciencias Matemáticas. La **escolar** es aquella que, sin grandes pretensiones, los estudiantes la experimentan en sus clases de matemáticas y que pueden conducirlos a enriquecer no sólo su pensamiento matemático sino a profundizar en esta importante rama de las ciencias y empoderarlos para que puedan experimentar, en el futuro, *insight* científicos. Los tres tipos de *insight* caracterizados en este estudio deben agruparse en la categoría **escolar**. Algunos *insight* **científicos** fueron relatados en la introducción.

Es seguro que la **escolar** precede a la **científica**, no se puede descartar que los grandes matemáticos no la hayan experimentado en el proceso de desarrollo de la construcción de sus conocimientos desde una etapa escolar temprana. Son muchos los ejemplos al respecto. Se considera que la mayoría de los matemáticos creadores de teorías también los hayan experimentado, así como, aquellas personas que se han destacado en competiciones matemáticas.

Se diseñó una metodología netamente cualitativa a manera de estudio de casos en la cual se le hizo un seguimiento continuo a cinco estudiantes, que permitió identificar las ocurrencias de estos tipos de *insight* en el proceso de resolución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

Los esquemas de resolución de problemas propuestos en el marco teórico fueron acertados en el sentido que les propició a los estudiantes nuevos horizontes para la resolución de problemas futuros, además de incentivar el desarrollo del pensamiento matemático que puede ser utilizado en su ejercicio profesional, ya que los mismos se están formando como docentes en la carrera de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño.

En cuanto a la hipótesis de la investigación planteada se puede asegurar que significó una buena ruta de trabajo para toda la investigación ya que se pudo describir tres diferentes tipos de *insight.*

Se relacionan dimensiones didácticas y psicológicas que derivaron en un esquema de resolución de problemas donde se pudiera apreciar la ocurrencia de los *insight*. Además, se logró establecer una relación de éstos con el pensamiento convergente, divergente.

El éxito o no en la solución de problemas matemáticos presentados en el salón de clases depende en gran medida del nivel de conocimiento y desarrollo del pensamiento que tenga cada estudiante, ya que para algún estudiante el problema le puede generar un *insight inmediato*, y para otro un *insight a posteriori*.

Los problemas escogidos para implementar las actividades, se diseñaron y adaptaron cuidadosamente para que potencialmente elevaran el interés en la obtención de su solución. Era deseable que los estudiantes se apropiaran del problema y lo asumieran con seriedad. Sin embargo, esto no fue suficiente, ya que muchos de los problemas no fueron solucionados.

Una dificultad presentada en desarrollo de las actividades fue la comunicación de los resultados obtenidos, ya que en algunas ocasiones los estudiantes no hacen un buen uso de un vocabulario matemático adecuado, haciéndoles perder las ideas que pretendían expresar. Sin embargo, la claridad de las soluciones fue mejorando en el transcurso del desarrollo de las actividades.

Por todo lo anterior se tiene la certeza del cumplimiento de los objetivos propuestos para este estudio.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda que se utilicen los resultados de esta tesis en la investigación de temas relacionados con el pensamiento convergente o divergente.
2. Se recomienda los enfoques de resolución de problemas propuesto por Mason, Burton y Stacey, en su obra "Pensar matemáticamente", ya que a los estudiantes les permite ver nuevos horizontes.
3. Los problemas para implementar actividades de esta naturaleza se deben diseñar y/o adaptar bajo una concepción extremadamente cuidadosa, para que potencialmente logren el interés en la obtención de su solución por parte de los estudiantes y que además puedan causar bloqueos de corta o larga duración con consiguientes momentos de ***insight*** dentro o fuera de salón de clases.

OBRA DEL AUTOR

Cañón, C., García, M. (2015). Una caracterización preliminar de los tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en el aula. *COMPUMAT 2015*. Universidad de las Ciencias Informáticas. Noviembre 23 al 27 de 2015. La Habana.

Cañón, C., García, M. (2017).Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en el salón de clases. *Revista Ciencias Holguín*. (Artículo presentado para su publicación)

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Alamolhodaei, H. (1997). Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving. *Journal of science and mathematics education* in s.e. Asia vol. xxiv, no. 2.

Aziz-Zadek, L. et.al. (2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci.*,8 (4):475-480.

Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista SUMA* N° 21. P11-20. Disponible en URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas.* Órgano editor Educación Cubana.

Davis, P., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhauser.

Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996). Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving. Underwood, Geoffrey D. M. (Ed), (1996). *Implicit cognition*. , (pp. 257-296). New York, NY, US: Oxford University Press.

Fauconnier, G. & Turner, M. (1998). Conceptual Integration Networks. *Cognitive Science*, 22(2), 133-187.

Fauconnier, G. & Turner, M. (2002). *The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexity.* Basic Books. NY.

Fraenkel Jr, Wallen Ne. 1996. How to design and evaluate research in education (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. *International Congress of Mathematicians*, Seoul, Korea.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, 5: 444-454.

Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Recuperado el 10 de febrero de 2014 del URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html.

Hadamard (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Liljedahl, P. (2004). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.

Luo, J., Knoblich, G. (2007). Studying insight problem solving with neuroscientific methods. ScienceDirect. Pp. 77-86. Available online at www.sciencedirect.com.

Martín, C (1999). Creatividad e Insight. ISSN 1136-8136, Nº. 7, 1999, págs. 63-84 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476241

Mason, J, Burton, L. y K. Stacey (1988*). Pensar Matemáticamente*, MEC-Labor, Barcelona.

Poincaré, H (1914). *Science and method*. Translated from French. Tomas Nelson and sons. New York.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton : Princeton University Press. New Jersey.

Romo, M. (2007). Psicología de la ciencia y creatividad. *Revista creatividad y sociedad.* Nº 10, pp 7-31, marzo de 2007, disponible en http://www.creatividadysociedad.com/articulos/14/Creatividad%20y%20Sociedad.% 20Psicologia%20de%20la%20ciencia%20y%20la%20creatividad.pdf.

Sak, U. Maker, C. (2005). Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 2005, 6(2), 252-260. http://iej.cjb.net.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática*, CINVESTAV, IPN, México.

AVANCES EN LA CARACTERIZACION DEL PENSAMIENTO COMBINATORIO

JOSÉ CIRO ANZOLA CALDAS
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
ciro.anzola@gmail.com

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Abstract

This research is based on the analysis of the manifestations of mathematical thinking that arise during the solution of significant problems, mathematical and context in the framework of combinatorial analysis, and the corresponding construction of meanings of the concepts implicit in them with the aim of Characterize and consolidate a way of thinking that was called combinatorial thinking.

The study was carried out with an experimental design in two phases, one under action research and the other under investigation of grounded theory, involving the design of a didactic unit, consisting of eight activities based on the basic principles of counting, instrument which was implemented and developed with first-year students of engineering careers, in the course of Problem Solving.

For its part, this research left the methodological and research proposal consolidated in the "Methodological Model" « I.C.O.R. ». Thus, on the structure of the model was made the didactic research, which concludes that the findings provided sufficient evidence that was consolidated in a systematic way, evidencing that in the process of construction and development of mathematical thinking during problem solving of combinatorial analysis, there are structures that are implemented with the support of fundamental operations of cognitive activity. These recognized structures correspond to the structure of representation, the structure of relation and connection, the conceptual structure, the combinatorial structure and the combinatorial generalization structure. The type of mathematical thinking implicit in them was characterized on this structure scheme, obtaining the description of the generation and structuring of the forms of understanding and the combinatorial ways of thinking and the interrelation between them, which originates the new ways of understanding combinatorial. The latter provides novel and valuable elements for the characterization of combinatorial thinking.

Resumen

Esta investigación se fundamenta en el análisis de las manifestaciones del pensamiento matemático que surgen durante la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto en el marco del análisis combinatorio, y la correspondiente construcción de significados de los conceptos implícitos en las mismas con el objetivo de caracterizar y consolidar un modo de pensar que se denominó pensamiento combinatorio.

El estudio se realizó con un diseño experimental en dos fases, una bajo la investigación-acción y la otra bajo la investigación de la teoría fundamentada, implicando el diseño de una unidad didáctica, constituida por ocho actividades fundamentadas en los principios básicos de conteo, instrumento que se implementó y se desarrolló con los estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería, en el curso de Solución de Problemas.

Por su parte esta investigación dejó la propuesta metodológica y de investigación consolidada en el "Modelo Metodológico « I.C.O.R.»". De esta forma, sobre la estructura del modelo se hizo la investigación didáctica, con la cual se concluye que los hallazgos proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática, evidenciándose que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la estructura de representación, la estructura de relación y conexión, la estructura conceptual, la estructura combinatoria y la estructura de generalización combinatoria. Sobre este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, logrando la descripción de la generación y estructuración de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias. Esto último aporta elementos novedosos y valiosos a la caracterización del pensamiento combinatorio.

INTRODUCCION

La Educación Matemática «EM», ubicada como una ciencia cognitiva y social, tiene entre sus objetivos y fines investigativos la caracterización del pensamiento matemático, la construcción y validación de modelos didácticos y la propuesta de estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se abordarán éstos, vistos desde la interacción de los elementos de la «EM» (*las matemáticas, los estudiantes, los profesores, las instituciones, las sociedades y las culturas*) y fundamentadas desde su aspecto epistemológico, ontológico, filosófico, psicológico y cognitivo.

Esto es propuesto y expuesto por varios autores. Schoenfeld (2000) ve en la educación matemática dos objetivos. El primero es el objetivo puro propuesto para la ciencia básica, el cual tiene como finalidad comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje. El segundo objetivo, es el objetivo propio formulado para las ciencias aplicadas, cuyo fin es mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática sobre la base de la comprensión de la finalidad del objetivo anterior. Desde su quehacer el autor de la presente investigación ve que hay un tercer objetivo, el objetivo futuro en el cual la educación matemática debe seguir construyendo teorías y modelos que la consoliden como ciencia, para lo cual espera y propone a los investigadores en «EM» trabajar en la construcción de teorías que permitan comprender y caracterizar el pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. A la par deben emerger y afianzarse los modelos, siendo éstos los mediadores entre lo teórico y lo práctico.

De otra parte Font (2002) dice que la investigación en educación matemática se focaliza de manera explícita o implícita en aspectos como: 1) la ontología general, 2) la epistemología general, 3) las teorías sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) la teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) la definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) una metodología de investigación.

En Godino (1991) se hace una introducción de la evolución de la educación matemática «EM» como una ciencia tendiente a formalizar y construir teorías que explican la existencia e interacción de los elementos mencionados anteriormente.

Así mismo Miguel de Guzmán (2007) plantea algunos puntos de vista con respecto a las tendencias innovadoras en los trabajos y tareas de la educación matemática como ciencia naciente. En cuanto a la filosofía de la matemática actual, dice que ésta ha dejado de preocuparse por los problemas de fundamentación de la matemática como en el siglo XIX, especialmente después los resultados de Gödel a principios del siglo pasado, indicando que desde entonces la filosofía de la matemática ha enfocado su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática propuesta por Lakatos. En cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, considera la matemática como un subsistema cultural, viendo así la «EM» como un proceso de "interculturación"- "proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático"[64]-. Consideración sobre la cual se centran algunas las investigaciones en la actualidad. Y por otro lado revisa las investigaciones sobre los procesos de pensamiento propios de la matemática, viendo en ellas, más que una transferencia de contenidos, la matemática como un saber hacer y como una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido.

Estos puntos de vista han provocado en los matemáticos consideraciones importantes en el entender y sentir las matemáticas, y en el significado de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, influenciando el futuro investigativo de la «EM», para que éste se dé en procesos de pensamiento matemático, en trabajos sobre la intuición directa en lo concreto, el formalismo, la importancia de la motivación desde lo histórico-cultural, y el impacto de las nuevas tecnologías sobre la matemática.

De esta forma estos cambios visiónales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su objetivo por desarrollar el pensamiento matemático con permeabilidad y aplicabilidad sobre todas las ciencias también se han visto reflejados en el contexto social colombiano, primero desde los Lineamientos Curriculares (1998), y luego por los Estándares Básicos de competencias (2006), documentos emitidos por el MEN. En ellos se reconoce y establece la importancia de un cambio frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática motivado por una nueva concepción que es el aprendizaje por competencias; pensado desde la utilización del pensamiento lógico y matemático y sus herramientas como un medio para comprensión e interacción con un contexto. Además, en ello se deja explícito que las competencias matemáticas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por la solución de problemas significativos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia cada vez más complejos, es decir que construyan nuevos y más robustos significados de los conceptos matemáticos. Para ello se propone ver la matemática como un conjunto de cinco tipos de pensamiento. El pensamiento numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Así estos fines de tipo personal, cultural, social y político de la educación matemática, abren nuevos horizontes y refuerzan las razones para justificar la contribución de la formación matemática con respecto a los fines de la educación.

Lo anterior deja a la luz que una de las responsabilidades de la comunidad de educadores matemáticos es lograr la caracterización del pensamiento matemático desde sus diferentes líneas de trabajo como lo son la lógica, la aritmética, la geometría, el álgebra, la estadística, y la probabilidad, entre otras.

En este punto se puede percibir una falencia al omitir la importancia y necesidad de considerar el estudio de la combinatoria como otro de los tipos de pensamiento matemático, ya que el tratamiento que se le da en esta postura no lo asume como tal, sino como una temática implícita dentro de los demás tipos de pensamiento.

Esta situación se sigue reflejando después de haber realizado una revisión del estado del arte concerniente a la caracterización del pensamiento matemático; se evidencia que estos trabajos e investigaciones tienen como eje la aritmética, el álgebra, la geometría, el análisis de datos (estadística) y cálculo de probabilidades, desarrollados en diferentes poblaciones que van desde los inicios de la actividad escolar hasta la universitaria, dejando ver que el trabajo en *combinatoria* ha sido poco explorado como lo afirma Lockwood, E. (2013).

Es ahí, donde se ve la necesidad de direccionar investigación de la «EM» sobre esta área del conocimiento matemático. Área que, como dice De Guzmán (2007), es el área hacia la cual se está desplazando la matemática actual, después del apogeo del análisis del continuo. Este fenómeno se debe al avance tecnológico y su estrecho ligamento con las ciencias de la computación e informática, que ahora permiten hacer el análisis de grandes cantidades de información, análisis que tiene una tendencia a lo cualitativo y descriptivo. Por este motivo se hace importante la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, al permitir que se consolide como una nueva forma de pensar cuya caracterización y desarrollo debe tenerse en consideración entre los fines de la «EM», el pensamiento combinatorio.

En la actualidad este tipo de pensamiento está siendo desaprovechado ya que, por un lado, se puede implementar como instrumento para lograr que los estudiantes desarrollen procesos de generalización, como por ejemplo, al utilizarlo en la transición del pensamiento aritmético, geométrico y probabilístico hacia el algebraico, mediante la generalización en modelos combinatorios. Y por otro lado, en la mayoría de los casos, al pensamiento combinatorio se le está limitando a un procedimiento intermedio para hacer cálculo de probabilidades. En cierto sentido se está subutilizando al ser un factor que permite evidenciar la estructuración del pensamiento formal en el adolescente, porque permite trabajar desde lo concreto para luego pasar a la generalización en una misma situación. En efecto, el estudiante transita progresivamente de lo particular a lo general mediante la construcción de modelos basados en la teoría de la combinatoria. Como lo afirma Restrepo P. (2010) "*la combinatoria enumerativa busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual consiste en encontrar su cardinal y lograr contar sin contar; es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno*" [65]. Es decir, a partir del análisis sobre algunos casos particulares de los elementos de un conjunto, se puede construir un modelo que permitirá construir y conocer todos los elementos del conjunto.

En concordancia con la descripción realizada anteriormente, en cuanto a los objetivos de la «EM», la responsabilidad de los educadores matemáticos, las exigencias modernas ante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la necesidad de evidenciar y consolidar el pensamiento combinatorio como otro tipo de pensamiento matemático, surge esta investigación, para la cual se plantea como pregunta orientadora de la misma **¿Cuáles son las características propias del pensamiento combinatorio?,** ya que

[64] Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Iberoamericana de Educación. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.

[65] Restrepo Mesa Pascual. Un Recorrido por la Combinatoria I. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. 2010

conociendo estas características, se puede evidenciar su existencia, fortaleciendo y aportando herramientas para su consolidación como un tipo pensamiento matemático a tener en cuenta, reconocido e implementado por la comunidad de educadores matemáticos.

Además, estas características se utilizarán como insumo para crear e implementar nuevas metodologías y didácticas, que serán replicadas en los procesos y experiencias de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en general, permitiendo una mejor orientación y aplicabilidad de las mismas. Al mismo tiempo permitirán mostrar las ventajas de la combinatoria como herramienta interdisciplinar dentro de la misma matemática, dejando ver la necesidad de su aprendizaje y enseñanza, e inclusión en los currículos.

Este proyecto de investigación se desarrolla en el marco de las líneas de investigación del programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en particular en la línea de la enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la solución de problemas (especialmente problemas no rutinarios) y en las estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos), lo cual dio el aval de orden académico y científico para su ejecución.

En este orden de ideas, se da la importancia y reconocimiento a esta investigación, la cual se centra en describir las características del pensamiento que los estudiantes evidencian durante la solución de problemas significativos de combinatoria, a partir de las cuales se logra avances en la caracterización del pensamiento combinatorio. Se implementa en el marco de la solución de problemas matemáticos y de contexto abarcando la elaboración de significado de conceptos de conteo y la generalización en modelos.

Se organiza y propone la presente investigación, de carácter cualitativo, teniendo en cuenta las insuficiencias mencionadas anteriormente, siendo las que marcaron la elección del tipo de metodología de investigación científica necesaria para desarrollar la idea de investigación. En el Capítulo 3 se describe el modelo de investigación cualitativo y sus fases de desarrollo, a partir de las cuales se presenta la construcción y desarrollo de la investigación.

Problema de investigación

¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado robusto de los conceptos propios del análisis combinatorio?

Interiorizado el problema de esta investigación, es claro que el resultado de la investigación es de orden conceptual descriptivo requiriendo de una indagación profunda para apropiarse de mayores evidencias o soportes que permitieron conocerlo y comprenderlo, logrando definirlo y describirlo para avanzar en la caracterización; para así construir el resultado final y dar respuesta al interrogante planteado.

Lo anterior permite delimitar el problema dentro del **objeto de estudio** denominado proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis combinatorio que será manifestado en el transcurso de la solución de problemas significativos y no rutinarios del análisis combinatorio. La población participante se conformó por estudiantes (hombres y mujeres) del ciclo de fundamentación en carreras de ingeniería (primer año de carrera) de la Universidad Antonio Nariño, sede Bogotá con edades entre los 15 y 25 años.

Para hacer realidad esta investigación y tomar un horizonte que permitiera dar solución parcial o total al problema planteado se fija el siguiente objetivo general.

Objetivo general

Lograr avances en la caracterización del pensamiento combinatorio implícito en la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto y en la correspondiente elaboración de significado de los conceptos del análisis combinatorio en estudiantes que están en la transición del pensamiento concreto al abstracto.

Se entiende la caracterización como la descripción de las formas de entender y las formas de pensar combinatoriamente de los estudiantes, su interacción y su consolidación en la construcción del significado de los conceptos de conteo, proceso que se llevará a cabo durante el desarrollo de las clases de matemáticas en el contexto de solución de problemas. De esta manera queda direccionado como **campo de acción** el proceso de enseñanza y aprendizaje del conteo.

El proceso se desarrolla en el curso de Solución de Problemas para las carreras de ingeniería, en la Universidad Antonio Nariño, Sede Sur, de Bogotá, siendo éste la **unidad de análisis**.

Para tal fin, se formulan cinco preguntas científicas que permitieron direccionar la investigación. Sobre las preguntas se generaron las tareas de investigación, la planificación de éstas, y el cronograma, que se construyó sobre la base de las fases de la metodología de investigación científica, definida para este caso. Ésta a su vez es el medio organizador que permite ejecutar las tareas propuestas y entrelazar los resultados obtenidos en cada una de ellas, alcanzándose el objetivo propuesto en la investigación.

Preguntas científicas

P1. ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?

P2 ¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?

P3 ¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?

P4 ¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué características tiene?

P5 ¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?

La estructura del documento memoria de esta tesis está constituido por la introducción, cinco capítulos, las conclusiones, las recomendaciones, las referencias bibliográficas y los anexos.

Los resultados de las primeras fases se reflejaron en una primera revisión del estado del arte contenido en el Capítulo 1 de este documento. A su vez esta revisión permite construir la respuesta a **P1,** pues con la búsqueda de respuestas a este interrogante se proyectó la revisión de los antecedentes al problema de investigación. Con la realización de este estudio se consolida el estado del arte, se fundamenta el marco teórico y referencial, y se construye el marco metodológico con el cual se realiza la investigación.

El Capítulo 2 dedicado al marco teórico, construido en sí, para fundamentar los cuatro componentes del modelo metodológico propuesto. Siendo estos el componente de educación matemática –pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo-.

En el Capítulo 3 se consolida la revisión del estado del arte, del marco teórico y referencial, dando como resultado la creación y construcción del modelo metodológico «I.C.O.R.». Propuesta que en adelante se asume como el eje director de la metodología, recolección de la información y análisis de los resultados.

En el Capítulo 4 se reportan el análisis de los resultados de la revisión de la información recolectada en los diferentes instrumentos, sobre la base de la solución de las actividades diseñada para tal fin. Análisis que en primera instancia se consigna en las relatorías de clase y a partir de este se definieron y consolidaron las categorías y variables de análisis. Estos resultados se emplean para construir las respuestas a las preguntas de investigación.

En el Capítulo 5, Discusión de los resultados, sobre la base del análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior y las bases teóricas definidas para tal fin, se da respuesta a las preguntas de investigación **P2, P3, P4** y **P5.,** proporcionando un significado propio al entendimiento del problema planteado que repercute directamente sobre las conclusiones, las recomendaciones e implicaciones que surgieron de la investigación. Se describen los resultados y aportes que son de orden teórico, práctico y científico logrados al culminar esta investigación.

De este modo se da una respuesta clara, objetiva y contundente sobre el objetivo y preguntas de investigación, al igual que se logra consolidar una solución al problema de investigación. De igual manera, se dejaron abiertas nuevas preguntas de investigación para desarrollar en próximos trabajos.

En el CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE se presenta un resumen de las investigaciones más relevantes en relación con el problema de investigación, clasificadas de acuerdo a sus enfoques y líneas de investigación, ya que a partir de ellas se construye el estado del arte que soporta el trabajo. De éstas destacamos sus apartes referidos a la definición de combinatoria, los antecedentes referentes a la investigación en esta línea, la metodología de investigación (su población y muestra), sus conclusiones y/o aportes a la educación matemática. Cabe señalar que la revisión del estado del arte se orientó a partir de la primera pregunta de investigación: P1 ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?, interrogante que se tomó como la hoja de ruta para iniciar la búsqueda de los antecedentes al problema de investigación. A partir de ésta se subdividió la revisión en los siguientes aspectos: 1) caracterización del pensamiento combinatorio, 2) modelos de pensamiento combinatorio y 3) Otras investigaciones orientadas al estudio del conteo.

Realizada la búsqueda, la investigación concluye que no se encuentran modelos específicamente enfocados al estudio de la caracterización del pensamiento combinatorio que determinen particularidades al respecto. Precisa advertir, en todo caso, que existen trabajos científicos en los cuales se analiza el razonamiento combinatorio, sin que éstos describan específicamente las características del pensamiento combinatorio, que hace parte del objetivo de la presente investigación.

Los siguientes son algunos de los referentes consultados, observándose que estas investigaciones están enfocadas especialmente a revisar aspectos como: 1) Los errores más frecuentes y sus causas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de conteo. 2) Las estrategias propuestas a los estudiantes para desarrollar problemas de conteo, más no a estudiar el tipo de estrategias que los estudiantes desarrollan de forma autónoma cuando se enfrentan a la búsqueda de una solución a un problema combinatorio. 3) El tipo de problemas rutinario que se presentan a los estudiantes, los cuales terminan convirtiéndose en ejercicios de combinatoria repetitivos en cuanto a estrategia de solución y a estructura del mismo problema.

En Dubois, (1984) se destacan las condiciones que permiten tipificar los problemas, permitiendo encontrar estrategias para abordar cada problema, situación que con la experiencia se convierte en rutinaria, dejando de lado el desarrollo del pensamiento.

Entre tanto, se puede mencionar trabajos como el presentado por Kavousian, S. (2005): "*The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students"* donde se investiga el desarrollo del razonamiento combinatorio y se examina las dificultades presentadas en la solución de diferentes problemas combinatorios, estudio que finaliza con asociar los errores en las soluciones a un tipo de problema, para lo cual proponen clasificar los problemas combinatorios según el tipo de solución convencional, antes de ser presentados a los estudiantes. Se concluye que en este estudio no se propone ni se usa ningún modelo que permita hacer un estudio sobre el pensamiento combinatorio o su caracterización.

Rezaie M, Gooya Z. (2011) exponen en " What do I mean by combinatorial thinking? los cuatro niveles de comprensión del pensamiento combinatorio. Es así como mencionan la exploración de la configuración dada para contar en casos particulares, obtención de todos los arreglos posibles en el conteo, uso de casos de "*n* elementos" en lugar de un número finito dado de elementos, y conversión de un problema en otro problema de combinatoria. Este estudio se basó en explorar cómo los estudiantes usaban los niveles de comprensión en la solución de problema rutinarios de conteo, sin implementar algún tipo de modelo y sin hacer descripciones de los razonamientos realizados por los estudiantes.

Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (2011) toman como referente en la investigación "Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms" el aprendizaje individual que el estudiante alcanza y luego comparte en comunidad. Consideran que los estudiantes son participantes activos en la construcción y justificación de su conocimiento matemático que los llevó a la construcción de otros nuevos.

Lockwood, E. (2013) propone en la investigación "*A model of students' combinatorial thinking"* que la caracterización del pensamiento combinatorio se puede convertir en un "modelo" basado en sistemas. En el modelo que construyó a partir del análisis conceptual, describe y explica los aspectos comunes y significativos en el proceso de conteo, más no los procesos de razonamiento que el estudiante realiza durante esta actividad.

En el CAPITULO 2. MARCO TEORICO se presentan los referentes teóricos que se utilizaron en el análisis de los resultados que permitieron formalizar y establecer el resultado de la investigación, al igual que los fundamentos teóricos del modelo metodológico propuesto desde la postura de cuatro componentes, el componente de educación matemática –pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo.

En el componente de educación matemática: Pensamiento Matemático se concibe desde la base teórica de la propuesta realizada por Guershon Harel (2008 a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este aparte se resaltan los aspectos más influyentes para esta investigación destacando que esta propuesta es el resultado de un profundo estudio realizado por Harel sobre la demostración matemática. La obra completa se puede consultar en http://www.math.ucsd.edu/~harel/. En su trabajo Harel (2008 a) plantea que el fin de la educación matemática es desarrollar el razonamiento matemático del estudiante, razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. Esta postura pedagógica la desarrolla Harel desde un marco teórico que ha denominado "DNR de las matemáticas". Por sus iniciales corresponden a tres componentes tomados en el marco de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son la Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R). Para su comprensión, a continuación se expone esta posición teórica, producto de la revisión realizada a los documentos que ese autor ha presentado para describir y definir el modelo. Esta postura de Harel surge como fruto del debate en la búsqueda de respuestas a las preguntas "¿Cuál es la matemática que debemos enseñar en las escuelas? y ¿Cómo la debemos enseñar?"

En componente disciplinar matemático: Combinatoria se trabajó sobre la base teórica de la definición de combinatoria enumerativa y los principios fundamentales de conteo. De este modo se puede considerar que la definición de combinatoria se ha ido complementando a través de las nuevas aplicaciones encontradas, sin perder su esencia que es *contar*, como lo dice Restrepo (2010) "la *combinatoria enumerativa* busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual concurre en encontrar su cardinal, teniendo como objetivo el "contar sin contar", es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno", pasando por relaciones de recurrencia, funciones generatrices, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos y teoría de juegos entre otras temáticas que se incluyen en el grandioso campo de la combinatoria.

La definición presentada anteriormente permitió tomar una posición al respecto, alrededor de la cual se desarrolló el componente disciplinar utilizado en esta investigación.

Para determinar los tópicos a incluir se puede ver, por ejemplo, una publicación reciente en combinatoria, "How to Count" de Robert A. Beeler (2015), publicada por Springer, en la cual se puede ver la dimensión y aplicabilidad que ha ido ganando la combinatoria a nivel mundial, mientras que en el medio colombiano solamente se desarrollan algunos apartes de unos dos o tres capítulos de este referente, lo cual deja ver la falta de importancia que se le está dando a este campo.

Por otra parte, algunos de estos tópicos deberían haber sido tratados en la formación escolar del estudiante, pero en el contexto colombiano solamente se tratan en la universidad, y de manera muy superficial. Con lo anterior se quiere evidenciar que la combinatoria no solamente son las técnicas básicas de conteo, que en ocasiones son restringidas aún más, a solamente las permutaciones y combinaciones y como elementos requeridos para hacer una introducción al estudio de las probabilidades.

En el componente metodológico: Solución de Problemas se desarrolla a partir de una triangulación entre las teorías de solución de problemas propuestas por Polya (1965), Schoenfeld (1985, 1992) y Miguel de Guzmán (1985). Esta permitió consolidar parte de la metodología que está implícita en los instrumentos que se elaboraron para recoger la información, la que deja evidenciar el avance en la consolidación de las formas de entender a las formas de pensar y viceversa. Otra parte de la metodología se marca por los resultados metodológicos de la propuesta de Lakatos (1978). Sobre estos referentes no se hacen análisis y comentarios en este documento por su amplia consolidación en el ámbito de la educación matemática. Además, hicieron parte, como elementos metodológicos e interpretativos de los procesos y resultados obtenidos, las consideraciones dadas por Gowers (2000), en su trabajo "Dos Culturas Matemáticas".

El componente cognitivo: Teorías del Desarrollo Cognitivo se soporta sobre los aportes teóricos pertinentes para nuestra investigación, tomados de las teorías del desarrollo cognitivo y del aprendizaje más destacadas de autores como Piaget y Fischbein. Sobre los aportes del primer autor no se hace referencia en este documento por su amplio reconocimiento dentro de la comunidad de educadores matemáticos. Con respecto al segundo autor se presentan algunos apartes de su teoría de esquemas e intuiciones.

En el CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACION se desarrolló desde dos enfoques; por un lado, está la metodología de investigación cualitativa propuesta por Hernández Sampieri et al (2014). La cual fue el hilo conductor del proceso investigativo en general. Por otro lado, se desarrolló una metodología de investigación en didáctica, para lo cual se construyó, desarrolló e implementó el modelo metodológico «I.C.O.R.», constituyéndose éste en un espacio conceptual y metodológico que facilitó y organizó la comprensión del problema de investigación. De este modo se permitió establecer las relaciones y características de los elementos objeto de estudio. Sobre la base del modelo se diseñó y construyó la unidad didáctica, compuesta por ocho actividades que contenían los problemas cuya solución tiene implícita un concepto de conteo, al igual que se diseñaron y planificaron las dieciséis clases necesarias para desarrollar la unidad didáctica. Estos instrumentos sirvieron para obtener y recoger los datos e información necesaria para dar sustento a las respuestas de las preguntas de investigación.

Por otro lado, se hizo el diseño experimental en dos fases, una basada en la investigación-acción y la otra en los elementos de la teoría fundamentada, de manera que con estos diseños se validaron los instrumentos y la propuesta teórico-práctica del modelo metodológico «I.C.O.R.»:

La postura que permitió fundamentar el modelo metodológico fue considerar la investigación en educación matemática «EM» como un universo formado por cuatro componentes: uno de educación matemática, uno disciplinar, uno metodológico y otro cognitivo. Es oportuno ahora indicar que estos componentes se articularon y estructuraron bajo dos directrices, una de ellas es la ciencia del diseño tratada por Lesh y Sriraman (2005) en la reconceptualización de la educación matemática como una ciencia del diseño. La otra está dada por la adaptación de las fases del diseño instruccional[66], tomadas de las cinco fases del modelo genérico de procesos de diseño instruccional ADDIE, de sus siglas en ingles *Analysis* (análisis), *Design* (diseño), *Development* (desarrollo), *Implementation* (implementación) y *Evaluation* (evaluación), implementadas para dar la secuencialidad direccional a la construcción de cada uno de los módulos que estructuran el modelo.

La estructura del modelo metodológico inicia con la definición del primer módulo, el módulo de las *bases generales*, el cual es un *componente invariante* de la estructura general del modelo, quedando éste conformado por los cuatro componentes mencionados anteriormente.

El primer componente responde al [*¿para qué*?] o a el porqué del objeto investigado. Este da la directriz para definir la finalidad y el fundamento en el desarrollo e implementación del modelo, aplicado sobre un sujeto. El segundo componente concierne a un campo o rama del saber de las matemáticas según la clasificación que históricamente se le han dado, proporcionando el cuerpo a la intencionalidad, la cual responde a [*¿el qué*?] del objeto investigado. El tercer componente recoge el método o heurística [*¿el cómo*?] el cual permite definir y construir los instrumentos apropiados para el contexto del objeto y sujeto investigado. El cuarto componente recae sobre el sujeto, siendo éste el facilitador o participante sobre el cual se indagan sus opiniones, sus saberes y su subjetividad frente al fenómeno en estudio según sea el objetivo de investigación, el [¿a quién?].

Establecidas las bases generales del modelo, éstas se irán delimitando de forma progresiva en dos sentidos. Un primer sentido es el transversal guiado por las fases del diseño instruccional adaptadas al modelo lo cual permite concretar y consolidar un enfoque de lo general a lo particular sobre el objeto de estudio. El segundo sentido es el longitudinal, que estará direccionado por los componentes del

[66] Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje.* Disponible en URL: http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISE%C3%91O+INSTRUCCIONAL.pdf [Consulta 2 de octubre de 2015]

módulo de las bases generales. Esto implica afianzar el desarrollo integral y coherente de los nuevos módulos que completarán la estructura del modelo. Cada uno de éstos yace como el producto del diseño y la ejecución de cada una de las fases.

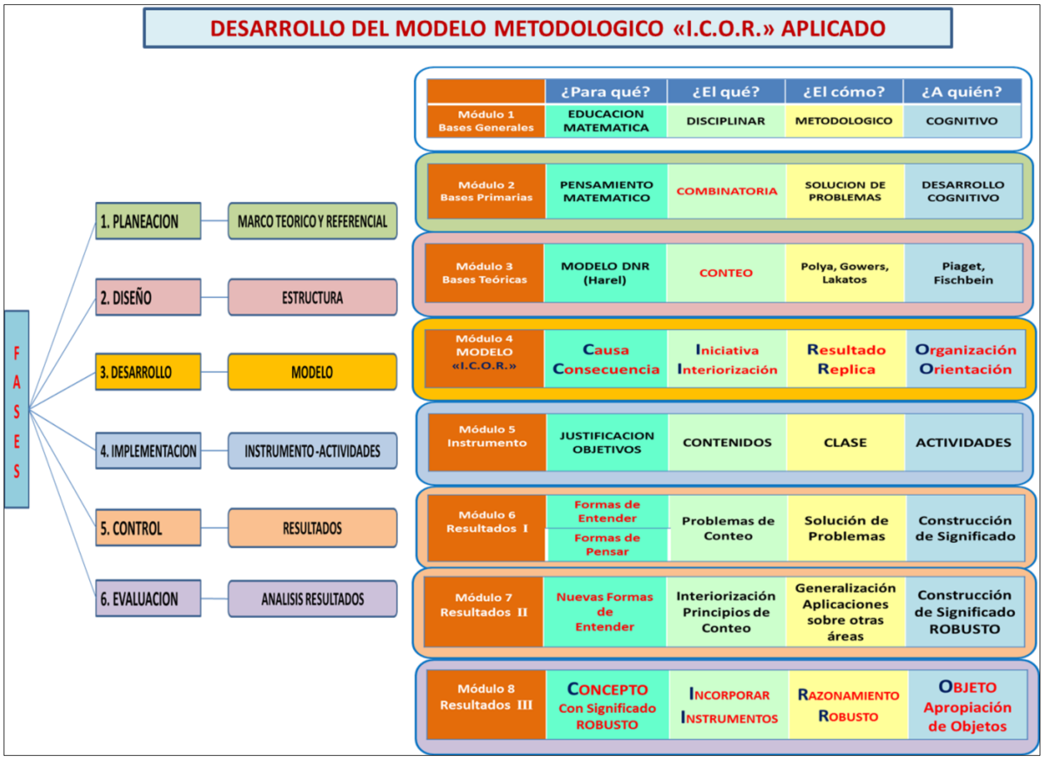


Figura 1. Desarrollo del Modelo Metodológico «I.C.O.R.» aplicado a la caracterización del pensamiento combinatorio

Lo explicado anteriormente corresponde al desarrollo e implementación del modelo metodológico «I.C.O.R.» de forma general. En la Figura 1, se presenta este desarrollo aplicado a la caracterización del pensamiento combinatorio sobre la base conceptual de los principios fundamentales de conteo. Además, se observa que el componente disciplinar es la única variante en toda la estructura, situación que deja abierta la posibilidad de ser implementado en los otros campos de la matemática.

La fase de implementación se da con la concreción del quinto módulo, el módulo del instrumento. Dadas las condiciones espacio-tiempo en las que se planificó esta investigación se asume y define que el instrumento pertinente para recoger la información, tener el control sobre ella y que cumple con las especificaciones dadas por el modelo para cada componente es una *unidad didáctica.*

El diseño y construcción de este instrumento metodológico y didáctico se dio bajo la adaptación de la estructura general de una unidad didáctica a los requerimientos del modelo. Esta estructura está compuesta por un título, una justificación y unos objetivos, elementos que responden al primer componente; unos contenidos (los principios fundamentales de conteo) que responden al segundo componente; una metodología (propia del modelo « I.C.O.R.») que responde al tercer componente; y unas actividades que responden al cuarto componente.

En el Anexo 1 se podrá ver como ejemplo del diseño de las clases C1 y C2, correspondientes al desarrollo de la actividad A1, la cual se presenta en el Anexo 2.

En este CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES se presenta el análisis de los resultados bajo un enfoque de focalización progresiva (Mertens, 2010)[67] en la cual se hace una descripción progresiva de las situaciones. Para esta investigación se realizó el análisis de una forma exterior hacia una interior, es decir, de los resultados grupales a los particulares, siguiendo la estructura del modelo metodológico «"I.C.O.R."», la cual permitió establecer los componentes y fases de análisis, como se muestra en la Figura 2.

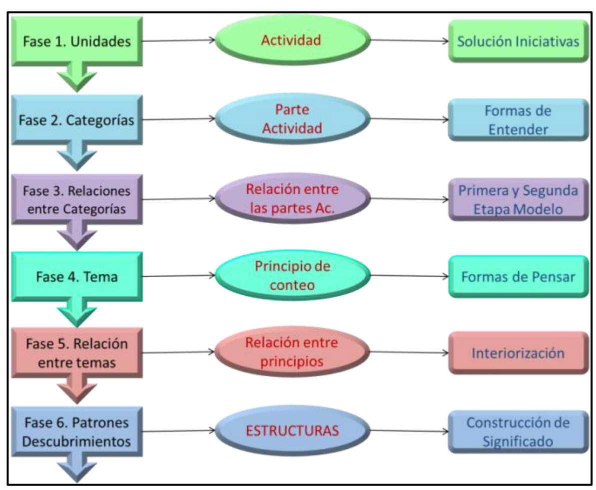


Figura 2. Estructura de Análisis. Enfoque de Focalización Progresiva

[67] Mertens, D. M. (2010) Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

El insumo utilizado para tal fin son las relatorías de clase que se realizaron con el material producido por los estudiantes durante las 16 secciones de clase, al desarrollar las 8 actividades. Es de aclarar que para comenzar el punto se análisis se focalizó sobre el número de soluciones dadas a los diferentes problemas (iniciativas).

Antes cabe precisar dos aspectos. Un primer aspecto a considerar es que los resultados y las discusiones que se presentan a continuación están dados sobre la base de la consolidación del análisis de los resultados expuestos en el capítulo 4 del documento original de esta investigación. El segundo aspecto a considerar es que no se debe asociar los resultados al número de respuestas correctas o incorrectas dadas por los estudiantes, sino lo que se debe considerar es que estas cifras representan el número de soluciones (completas, parciales y no correctas) que fueron desarrolladas por los estudiantes. De éstas se analizó paso a paso el razonamiento manifestado y presentado de forma escrita por cada uno de los estudiantes participantes en la investigación. Además, éstas se cuantificaron para mostrar y evidenciar las tendencias y comportamientos encontrados en el análisis de los mismos.

De esta forma se puede estimar que las ocho actividades desarrolladas por el grupo de 23 estudiantes del curso de Solución de Problemas (sujetos), conformaron la unidad didáctica (instrumento) que agrupó 97 iniciativas (problemas), de las cuales se espera obtener 2231 soluciones (muestra objetivo). En la Figura 3 se presenta la distribución de este resultado, del cual se puede ver que el 60,8% de estas soluciones se utilizó en el análisis de los resultados, siendo ésta la muestra real.

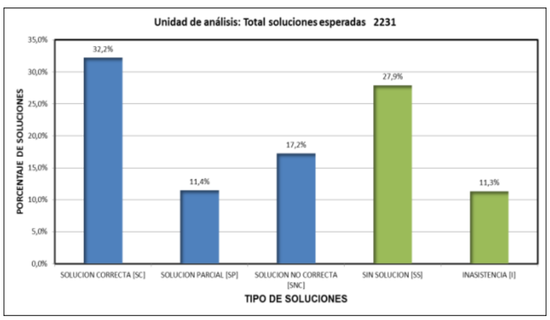


Figura3. Distribución del total de soluciones esperadas en la muestra objetivo

Como se puede observar en la Figura 4, realmente el aporte de la información analizada corresponde al 71.7% de la muestra real. Resultado que se da, ya que se excluyeron del análisis las soluciones no correctas, que realmente no hacían ningún aporte al objetivo de investigación. De otro modo si había algún aporte se consideraron soluciones parciales. Además, se presenta en la distribución el aporte tomado en cada una de las partes de las actividades, evidenciándose que en la medida en que se avanzaba en el desarrollo de cada una de las partes de la actividad, el aporte fue más significativo.

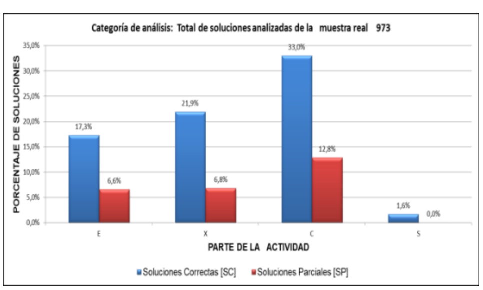


Figura4. Distribución de la muestra real de análisis

Por otro lado, se pudo suponer que si el proceso llevado a cabo fuese equitativo a lo largo del desarrollo de las ocho actividades, cada una de ellas debería haber aportado un 12.5% de información en promedio. Al comparar este valor con los presentados en la Figura 5 se puede considerar que el proceso fue homogéneo ya que los valores experimentales están alrededor del valor teórico con una mínima diferencia que en parte se debe a la inasistencia de los estudiantes, ya que el faltar al desarrollo de una de las dos partes de la actividad presencial en el aula, afectaba el desarrollo de las otras partes de la actividad. Esta situación se evidenció especialmente en la A3, ocasión en la cual faltaron más estudiantes, mientras que se presentó el caso contrario en la A1 y A8.

Estos resultados a su vez dejan ver como la propuesta metodológica basada en la estructura del modelo «I.C.O.R.» logró equilibrar el proceso de aprendizaje de los principios fundamentales de conteo, ya que en general los resultados de las dieciséis clases fueron similares como se muestra en la Figura 5

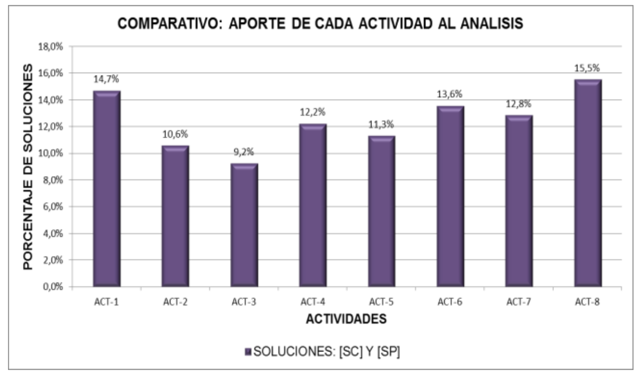


Figura 5. Distribución del aporte de cada actividad ala análisis

En el CAPITULO 5. DISCUSION DE LOS RESULTADOS se da respuesta a las preguntas científicas que se plantearon para direccionar esta investigación, conducentes a alcanzar el objetivo general y dar solución al problema de investigación planteado. Se recuerda que para las preguntas P1 se dio respuesta en las conclusiones del resumen del capítulo 1.

En cuanto a la **P2** *¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?*

Para este investigador, esta situación se ha de considerar como lo ideal en el abordaje inicial del problema, ya que en esencia si el estudiante logra reconocer el conjunto o conjuntos iniciales, y con éstos construye un arreglo (configuración), en particular está interpretando las condiciones dadas sobre los elementos. Esta acción le permitirá hacer una relación y conexión con sus preconceptos o experiencias en el área, permitiéndole iniciar la construcción de sus primeras formas de entender combinatorias. Una manifestación de éstas son las relaciones de similitud que establece con otro problema que presenta una estructura muy similar, siendo ésta una característica del pensamiento combinatorio.

De esta forma en lo que respecta a lo evidenciado se ve que, en su mayoría, los estudiantes hacen algún tipo de arreglo inicial, situación que refleja la comprensión y distinción de las condiciones iniciales sobre los elementos. Estas condiciones posteriormente les permitirán construir significado del concepto de conteo implícito en la solución del problema, ya que éstas corresponden a los atributos propios del concepto.

En cuanto a los conceptos previos explicitados por los estudiantes ante su primer enfrentamiento a cada una de las actividades, se analizó si el estudiante los manejaba de forma natural (no formal) pero análoga a la noción de conteo implícita en la solución de los problemas que conformaron cada una de las actividades. Por ejemplo, en la Actividad 2, se iniciaba la construcción del significado del concepto de permutación (inmerso en el principio de la permutación) y los estudiantes, bajo el principio del producto, lograron construir el principio, identificando las características que distinguen este concepto, a saber, arreglos con orden y sin repetición.

En cuanto a **P3** *¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?*

Se observó la utilización de diversas estrategias, entre ellas tenemos la estrategia de listas, que fue implementada especialmente en las primeras actividades, y además se observó que se dejaba como último recurso después de explorar e intentar hacer la solución mediante razonamientos basados en algún concepto combinatorio (formas de entender combinatorias). El diagrama de árbol fue muy poco implementado por el grupo de estudiantes, dado que en su mayoría encontraron unas estrategias menos dispendiosas, como lo fueron los símbolos o el diagrama de casillas. Los símbolos se entenderán como la asignación de una letra, un número u otro símbolo para representar los elementos involucrados en la solución, simplificando de esta forma su escritura y facilitando un control en la elaboración de las configuraciones. Las casillas por su parte son espacios representados por rectángulos o guiones, que representan las posiciones de cada uno de los elementos dentro de una configuración, esquema que permitió visualizar las relaciones a considerar (análisis de las condiciones sobre los elementos –formas de entender-).

Por otro lado, se analizó que otro grupo de estrategias empleadas por los estudiantes en la solución de los problemas propuestos fueron sus formas de proceder, las cuales estaban directamente asociadas a una estructura conceptual de formación previa o en proceso de construcción.

En primera instancia tenemos el conteo sistemático, basado en alguna de las estrategias de representación expuestas anteriormente, representación sobre la cual el estudiante hace el análisis (identificación de los atributos propios del concepto combinatorio pertinente, basado en el análisis realizado a partir de las condiciones dadas sobre los elementos del conjunto inicial), logrando establecer una relación y conexión conceptual, que le permite identificar un concepto previo apropiado o adaptable, siendo esta acción una forma de entender. Esta, mediante puentes cognitivos propios de la cognición del estudiante, se organiza y orienta en la construcción del nuevo significado al concepto aplicado, acción que estará relacionada a un proceder dado por una forma de pensar la cual está asociada al principio de conteo que concierne dicho concepto. Por otro lado, se puede ver que la construcción de este nuevo significado puede ser la formación de un nuevo concepto, es decir de una nueva forma de entender.

El proceder descrito anteriormente se considera por parte del investigador como la evolución de las estructuras el pensamiento combinatorio, que traen consigo mismas la evolución entre las formas de entender combinatorias y las nuevas formas de entender (formas de entender más robustas), asociadas a una forma de pensar que permite la transferencia o el cambio de la una a la otra. Por ejemplo, una forma de entender asociada al concepto de la permutación, influenciada por el proceder del principio del producto, se transforma en una nueva forma de entender combinatoria, formando el concepto de la variación.

En cuanto a la **P4** *¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué características tiene?*

Antes de continuar, es de aclarar lo que significa para este investigador el "caracterizar el pensamiento combinatorio". Entre las cosas que se buscaron fue entender y describir como el estudiante realiza las operaciones fundamentales de la actividad mental, entre ellas la abstracción, provocadas y orientadas a partir de las acciones mentales generadas durante el proceso de interpretación que él realiza cuando se enfrenta o se reta a solucionar un problema significativo, matemático (en este caso del análisis combinatorio) o de contexto. Se aclara que la investigación se enfocó en examinar el pensamiento que utilizaron los estudiantes en la solución de los problemas planteados en las actividades diseñadas para tal fin y en consecuencia se podrán ver los resultados como un avance significativo en la caracterización del pensamiento combinatorio, realizada sobre la base del marco teorico y metodologico construido para tal propósito.

En este sentido los resultados experimentales de la investigación llevaron a concluir y proponer una caracterización del pensamiento combinatorio suscitado por el análisis hecho por los estudiantes de las situaciones y preguntas planteadas. Esta caracterización se presenta de manera general en la Figura 6.

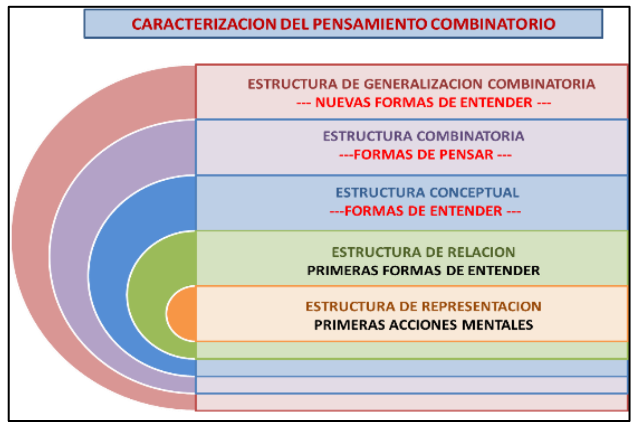


Figura 4. Estructura de la caracterización del pensamiento combinatorio

En la estructura de representación la característica principal del pensamiento combinatorio es el reconocimiento de las configuraciones (análisis de las condiciones dadas sobre los elementos de un conjunto o los conjuntos iniciales), acción que se realiza mediante el uso de las estrategias de representación y la interacción de operaciones mentales como la clasificación y organización.

En la estructura de relación y conexión se da la evocación de las formas de entender combinatorias, asociadas a la aprehensión que se generó sobre la representación y basadas en el análisis (realización de procesos mentales como la observación, comparación, distinción, entre otros) realizado a las condiciones dadas sobre los elementos. De esta forma se permite la identificación de la existencia, o no existencia, de los atributos combinatorios propios de las condiciones como: orden, repetición, distinción y posición de los elementos, las cuales están directamente inmersas en los conceptos combinatorios, acción que permite la construcción de nuevos significados del concepto o conceptos involucrados.

En la estructura conceptual se producen las formas de pensar combinatorias, como consecuencia de la síntesis realizada al proceso de la estructura anterior, síntesis en la que se activan procesos mentales como la integración y la orientación del conocimiento, que se materializa bajo un proceder asociado a alguno principio del análisis combinatorio. Esta es la característica del pensamiento combinatorio en esta etapa, el paso de una forma de entender combinatoria a una forma de pensar combinatoria.

En la estructura combinatoria, el pensamiento combinatorio se caracteriza en su etapa de formal, basada en la abstracción y la conceptualización. Es decir, se considera que el estudiante que alcanza esta estructura, ha construido e interiorizado un concepto combinatorio, acción que le permite realizar las dos primeras estructuras internamente (forma mental y abstracta), para ser exteriorizadas directamente en formas de pensar estructuradas y formalizadas. Además, como otra característica de esta estructura, está el razonamiento a la inversa que puede realizar el estudiante.

En la estructura de generalización combinatoria el pensamiento combinatorio se caracteriza por alcanzar resultados generales a partir de resultados particulares y producir nuevos modelos combinatorios sobre la base de los modelos ya conocidos, siendo las características principales la transformación y la generalización.

De igual manera se deja claridad que este grupo de características se evidenciaron y convalidaron durante el proceso dado en la solución de problemas del análisis combinatorio, por lo cual se consideran que constituyen un tipo de pensamiento, ya que pone de manifiesto la existencia y el uso de operaciones cognitivas generales del pensamiento, que se lograron caracterizar desde el caso particular de la combinatoria, consolidándose este tipo de pensamiento, que se ha denominado pensamiento combinatorio y alcanzándose así una solución satisfactoria al problema de investigación.

En cuanto a **P5** *¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?*

De acuerdo a lo manifestado por los estudiantes, se observa que en su mayoría están fuertemente de acuerdo en los aspectos más relevantes de la investigación como la metodología, como el aprendizaje a través de la solución de problemas, como el espacio de trabajo colaborativo y el aporte que el pensamiento combinatorio puede traer a ellos en diferentes aspectos. Además, en el plano personal, se destacan algunas de las opiniones dadas por los mismos estudiantes.

- "Conocer un tema que era desconocido y evaluarme en qué nivel de comprensión estoy en la solución de problemas",
- "Me dejó un nuevo método de análisis de solución de problemas. Ya no tengo el pensamiento arcaico de enumerar todo, por el contrario, puedo desarrollar el problema y crear formas generales",
- "Interpretar diferentes situaciones con compromiso y disciplina",
- "Cambió la manera en las que veía los problemas. Me siento capacitado para implementar este tipo de pensamiento en mi vida laboral, pues en mi empleo las relaciones de materiales se llevan a cabo por conteo, uno a uno. Con los nuevos conocimientos se pueden hacer planteamientos para generar un cambio significativo".

Por otro lado, está el rol de estudiante y su visión de la naturaleza de la matemática, ante lo cual opinaron:

- "Ya no veo la matemática de manera operativa-repetitiva",
- "Encontré mejores herramientas para la solución de problemas matemáticos",
- "Buenas metodologías que nos sacaron del área de confort y lo reta, lo enseña y a la vez amplios métodos, iniciativas y principios de pensamiento",
- "Nuevas formas de comprender el planteamiento de problemas y sus posibles soluciones. No sólo en las matemáticas sino en la ciencia que se aplique",
- "Conocimientos nuevos para atender otros cursos".

Lo anterior es una evidencia, más que natural muy sincera, por parte de los estudiantes quienes sintieron gratificación con los resultados y aportes dados por el curso, tanto en metodologías para solucionar problemas como en conocimientos y estrategias para implementar en lo personal, lo laboral y lo académico.

CONCLUSIONES

Se pretende poner en perspectiva la anterior discusión de los resultados. En cuanto al objetivo general, se aclara que la investigación no tenía el objetivo de hacer una caracterización exhaustiva, sino hacer avances significativos en la caracterización del pensamiento combinatorio, sobre la base de la solución de problemas significativos, de matemáticas y de contexto, con la correspondiente construcción de significado de conceptos del análisis combinatorio. Se estima que este resultado se alcanzó satisfactoriamente, como se puede evidenciar en la contestación a las preguntas dos, tres y cuatro dada en el Capítulo 5.

Frente al problema de investigación: "¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado de los conceptos propios del análisis combinatorio?", se puede concluir que los resultados proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática. Es decir, deja ver que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la representación, a la de relación y conexión, a la conceptual, a la combinatoria y a la de generalización combinatoria.

Con este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, sobre la base de describir la formación de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias.

Este grupo de características se convalidó y fundamento a partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en la solución de problemas del análisis combinatorio. De esta forma se logró consolidar en los estudiantes un tipo de pensamiento matemático, que se le ha denominado pensamiento combinatorio. Este proceso que se desarrolló a través de la unidad didáctica diseñada para tal fin; hecho que permitió hacer un aporte satisfactorio a la solución del problema de investigación. La descripción detallada de cada una de las estructuras identificadas se hizo en los resultados de la Pregunta 4 de investigación presentados en el Capítulo 5.

Al evaluar los resultados de la investigación con respecto a los objetivos de la educación matemática «EM», se dio con el cumplimiento de dos de ellos. Uno relativo a la caracterización del pensamiento matemático, propósito que se ratificó con la contribución realizada a la caracterización y consolidación del pensamiento combinatorio, como un tipo de pensamiento propio de las matemáticas. Por otro lado, está el modelo metodológico «I.C.O.R.», construido como herramienta de metodología de investigación, pero que a su vez puede servir como modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de otras ramas de las matemáticas.

En cuanto a lo teórico, está la fusión que se logró con los fundamentos del pensamiento de Harel y el análisis de Gowers, que permitió estructurar el marco teórico sobre el cual se construyó el modelo metodológico «I.C.O.R.», modelo que se presenta como un esquema aplicable al estudio de los diferentes fenómenos y problemáticas subyacentes en la «EM»; permitiendo su comprensión y análisis. En este sentido, el modelo es un espacio conceptual y metodológico que facilitará y organizará la comprensión de la realidad compleja inmersa en la «EM», ya que permite seleccionar el conjunto de elementos objeto de estudio, y descubre y caracteriza la relación entre ellos; además, profundiza en las implicaciones que emergen con la práctica. De este modo, aporta y deriva nuevos elementos para investigar, nuevos conocimientos, nuevas metodologías y nuevas experiencias. Éstas deben enriquecer la calidad de la dinámica del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, se tiene la innovación dada con la ampliación del DNR al DDNR, denominado así dentro del modelo metodológico el "DOBLE DNR" (DDNR), siendo ésta la base desarrollada en la segunda etapa del modelo, la etapa de la Réplica. Además, se resalta que en el modelo DNR se enuncia la existencia de las formas de entender y las formas de pensar, sin describir en detalle las características que tienen cada una de ellas dentro del pensamiento matemático ni precisar las formas en que interactúan. Esta particularidad se desarrolló en la caracterización del pensamiento combinatorio llevada a cabo en esta investigación.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria la estrategia de trabajo del modelo metodológico «I.C.O.R.» se considera muy significativa; ya que, tanto para el autor como para los estudiantes, la enseñanza a través de la solución de problemas, fue una experiencia novedosa.

En cuanto a su aporte práctico, esta investigación dejó como resultado la construcción y consolidación de la unidad didáctica basada en el modelo, que podrá ser implementada dentro del syllabus de los cursos que desarrollen la unidad temática de los principios fundamentales de conteo. Ésta incluye el diseño metodológico de clases y la elaboración de las actividades implementadas sobre la base teórica de los principios fundamentales de conteo, de la suma, del producto; de la permutación, variación, combinación, el trasfondo del conteo contenido en el teorema de binomio y el principio de inclusión - exclusión.

Finalmente, es claro que la investigación arrojó unos resultados que podrán exponerse en ponencias y publicaciones científicas.

RECOMENDACIONES

A continuación se dejan algunas recomendaciones para futuras investigaciones en educación matemática, y en general para toda la comunidad de educadores matemáticos.

En cuanto al objetivo de la caracterización del pensamiento combinatorio, por un lado, es necesario continuar con ello ya que la presente investigación pretendió lograr unos primeros avances. Esto puede hacerse en especial frente a otros tópicos de la combinatoria, con el objetivo de ratificar, precisar y complementar la caracterización lograda y enriquecer la descripción alcanzada en las diferentes estructuras propuestas, y, por otro lado, de consolidar de manera general la caracterización del pensamiento combinatorio. Esta consolidación permitirá darle la importancia y status al pensamiento combinatorio dentro de los currículos, igual que el status que tienen otros tipos de pensamiento matemático como el algebraico o el geométrico.

En cuanto a los objetivos de la educación matemática, se debe implementar el modelo metodológico «I.C.O.R.» en nuevas investigaciones que impliquen la caracterización de otros tipos de pensamiento matemático. En otras palabras, se debe repetir esta experiencia con otras unidades temáticas, con el fin de refinar el modelo y ponerlo a prueba, de tal forma que se pueda consolidar como un enfoque teórico de carácter universal.

En cuanto a los aportes prácticos se sugiere al Departamento de Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño incluir total o parcialmente la unidad didáctica construida para esta investigación, como parte del material didáctico utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad temática desarrollada –combinatoria básica, en particular los principios fundamentales de conteo-, implementación que se puede hacer en los diferentes cursos que en sus syllabus incluyen esta temática.

En cuanto al curso de Solución de Problemas utilizado como contexto para esta investigación se propone que se elabore en su totalidad con una metodología similar a la implementada en este trabajo, teniendo como objetivos desarrollar el pensamiento aritmético, el pensamiento métrico, el pensamiento geométrico, el pensamiento algebraico y el pensamiento combinatorio. Esta situación deja dos sugerencias. Una primera sugerencia es la ampliación de la intensidad horaria del curso. Esto porque la experiencia vivida durante el curso exigió la utilización de dieciséis clases, por un lado, y, por otro lado, porque se requiere de suficiente tiempo que permita hacer el debate y discusión sobre las formas de entender y de pensar de los estudiantes, las cuales son la base para la consolidación y desarrollo de cada uno de los tipos de pensamiento. La segunda sugerencia es la capacitación al grupo de docentes que dirigen estos cursos con el objetivo que se involucren y actualicen en la transformación de la enseñanza a través de la solución de problemas, y que efectivamente el curso en toda la población procure los mismos resultados.

En cuanto a la población y muestra se recomienda replicar esta experiencia en otros contextos que involucren estudiantes de educación básica primaria, media y media superior (con la salvedad que para la educación básica primaria y media se deben proponer y construir nuevos problemas acordes con el nivel de desarrollo biológico y cognitivo de los estudiantes involucrados), tanto de la educación pública como privada. Por un lado, con el objetivo de ratificar los hallazgos obtenidos en esta investigación, y por otro lado para complementar y robustecer los resultados de tal forma que se pueda seguir consolidando la caracterización del pensamiento combinatorio, y así reunir más evidencias para hacer sugerencias de fondo que ayuden a la transformación del currículo actual de la educación matemática en Colombia.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997a). *Combinatorial reasoning and its assessment*. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The Assessment Challenge in Statistics Education (pp. 239-252): IOS Press. Disponible en URL: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf [Consulta 20 de Abril de 2015]

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordretcht, The Netherlands: Reidel

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 34: 27-47.

Font, V. (2002). *Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista EMA, 7(2), pp. 127-170. Disponible en URL: http://funes.uniandes.edu.co/1151/1/85_Font2002Una_RevEMA.pdf [Consulta 24 de Marzo de 2014]

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The discovery of the grounded theory: Strategies for qualitative research.* New York: Aladine de Guyter.

Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1992). *Analysis of student's errors and difficulties in solving combinatorial problems.* Proceedings of the XVI P.M.E., (v.1, pp.241-248). University of New Hampshire. Durham.

Gowers, W. (2000).*Two Cultures of Mathematics*. Disponible en URL: https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf. [Consulta 24 de septiembre de 2014]

Grimaldi, Ralph. (1994). *Matemáticas Discreta y combinatoria.* Tercera edición. Editorial Adisson-Wesley

Guzmán, M. de, (1985) *Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática, Aspectos Didácticos de matemáticas 1*. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, 31-46

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Iberoamericana de Educación*. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.

Halani A. (2013). Students' Ways of Thinking about Combinatorics Solution Sets. A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy ARIZONA STATE UNIVERSITY. Disponible en URL: https://repository.asu.edu/attachments/110671/content/Halani_asu_0010E_13085.pdf [Consulta 10 de noviembre de 2016]

Harel, G. (2008a). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I, ZDM*—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRI.pdf [Consulta 12 de marzo de 2015]

Harel, G. (2008b). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II, ZDM*—The International Journal on Mathematics Education, 893-907. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRII.pdf [Consulta 30 de marzo de 2015]

Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014) *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición .México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V

Inhelder y Piaget, J. (1955) *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidos.

Kavousian, S. (2005). *The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students*. Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke. Disponible en: URL http://citation.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/0/2/4/6/8/p24689_index.html?phpsessid=nvg7rcbu5gla2kgoogjp2l05i2 [Consulta 28 de agosto de 2014]

Lakatos, Imre. (1978a) *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Editorial.

Lakatos, Imre. (1978c) *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). *John Dewey revisited - pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning.* In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman (Eds.), Proceedings of the 1st International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences (pp. 32–51). May 18–21, 2005, University of Schwaebisch Gmuend. Germany: Franzbecker Verlag.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking: The Role of set out comes, *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 251-265. Disponible en URL: file:///C:/Users/pc/Downloads/Lockwood2013JMBModel.pdf [Consulta 26 de agosto de 2014]

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares, 7 de junio* de 1998. Bogotá, Colombia: Autor: Disponible en URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf [Consulta 27 de septiembre de 2014]

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mertens, D. M. (2010) *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

Piaget Jean. (1950) *Introducción a la Epistemología Genética*. Buenos Aires: Paidós

Polya, G. (1965) *Como Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas

Restrepo M., Pascual. *Un Recorrido por la Combinatoria I*. Bogotá: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño 2010

Rezaie M, Gooya Z. (2011). *What do I mean by combinatorial thinking?* Procedia Social and Behavioral Sciences 11 (2011) 122–126. Disponible en URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811000486 [Consulta 2 de octubre de 2014]

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics.* Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Disponible en URL: http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html [Consulta 20 de marzo de 2015]

Vilenkin N. *¿De cuantas formas? Combinatoria, Primera y Segunda parte*. Editorial Mir. Moscú 1972

Wilhelmi, Miguel. (2004). *Combinatoria y Probabilidad.* Publicación departamento de matemáticas Universidad de Granada

Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje.* Disponible en URL: http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISE%C3%91O+INSTRUCCIONAL.pdf [Consulta 2 de octubre de 2015].