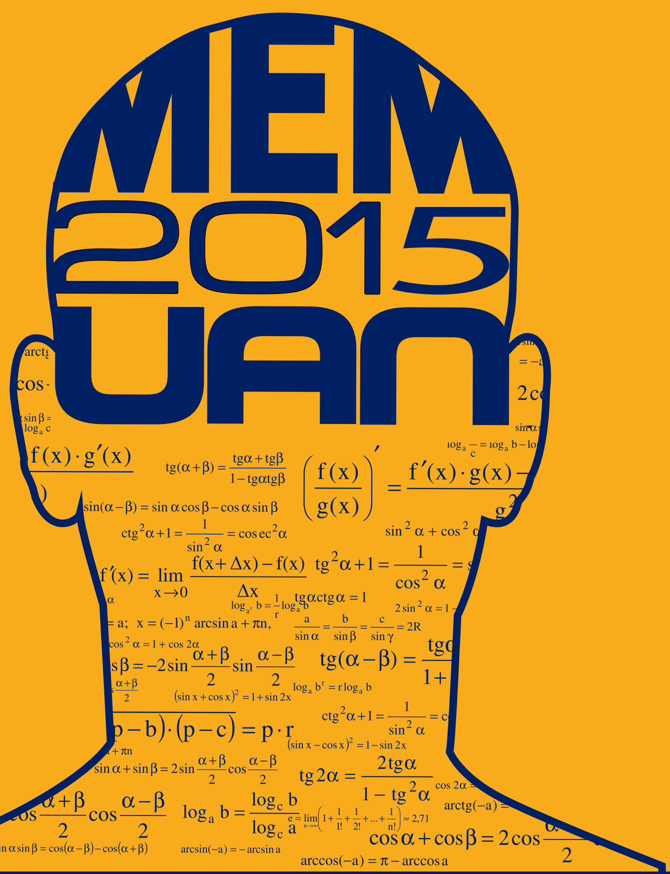
ACTA

SIMPOSIO DE MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMATICAS

ISSN ONLINE: 2346-3724



Volumen 2 No. 2

Año 2015

Organiza:

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO

Patrocinan:

PEARSON

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Universidad del Rosario

UNIVERSIDAD DE LOS LLANOS

MAGISTERIO .COM.CO

ACTA SIMPOSIO MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VOLUMEN 2 No. 2, DICIEMBRE 2015

ISSN electrónico: 2346-3724

V Simposio de Matemáticas y Educación Matemática y IV Congreso Internacional de Matemática Asistida por Computador

Volumen 2 No. 2, año 2015. ISSN 2346-3724

Equipo arbitral:

PRESENTACIÓN

El V Simposio de Matemáticas y Educación Matemática y el IV Congreso Internacional de Matemáticas asistidas por Computador, MEM 2015, organizado por la Universidad Antonio Nariño los días 12, 13 y 14 de Febrero de 2015 convocó a numerosos y destacados docentes e investigadores provenientes de diversas latitudes. Tres días de intensa actividad permitieron compartir valiosas experiencias, estudios y resultados que dan cuenta de la expansión de la Educación Matemática como disciplina científica. En un primer volumen de las Actas de MEM 2015 se presentan resúmenes de conferencias, cursos y comunicaciones presentadas en el evento. El objetivo del número dos, es recoger en extenso, por previa solicitud de los autores y correspondiente arbitraje, las contribuciones presentadas. La publicación, que se realiza en su segunda oportunidad, incluye contribuciones sobre temas de investigación y divulgación en las áreas de Matemática y Educación Matemática que fueron presentadas en MEM 2015 y que por su particular calidad, a juicio de un Equipo Arbitral integrado por investigadores de reconocido prestigio internacional, se consideren adecuadas para contribuir a la memoria y divulgación del mismo y estarán disponibles gratuitamente en formato electrónico en el portal de Revistas de la Universidad Antonio Nariño bajo la política de procurar un mayor intercambio de conocimiento y divulgación. Queremos agradecer a los participantes y ponentes del MEM 2015 que sometieron sus aportes a revisión y arbitraje y a los evaluadores que contribuyeron a mantener el nivel, tanto del evento, como de esta publicación..

Gerardo Chacón

Editor en Jefe

Bogotá, Colombia. Diciembre de 2015.

TABLA DE CONTENIDO

ARTÍCULOS COMPLETOS

GRÁFICAS FINITAS

Vianey Córdova-Salazar *, David Herrera-Carrasco** y Fernando Macías-Romero***
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, vcordova@alumnos.fcfm.buap.mx **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dherrera@fcfm.buap.mx ***Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fmacias@fcfm.buap.mx

***Abstract*— In this paper we present the concepts of continuum and finite graph, we show some elementary topological properties which have the finite graphs. Some characteristics that they have are the follow: each subcontinua of a finite graph and the union of two finite graphs is also a finite graph. The finale purpose of this paper is the answer the following question: can finite graphs be embedded in the plane?**

***keywords*— Continuum, finite graph, dimenstion, hyperspace.**

***Resumen*— En este trabajo presentamos los conceptos de continuo y de gráfica finita demostramos algunas propiedades topológicas elementales que poseen las gráficas finitas. Entre las características que tienen estas están las siguientes: cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita y la unión de dos gráficas finitas es una gráfica finita. Contestaremos la siguiente pregunta: ¿Las gráficas finitas pueden ser encajadas en el plano?**

***Palabras clave*— Continuo, gráfica finita, dimensión, hiperespacio.**

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como Teoría de los Continuos. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos. A un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas se le llama continuo. Un subcontinuo de un espacio topológico X es un continuo contenido en X.
El propósito de este trabajo es presentar algunas propiedades topológicas elementales de las gráficas finitas.

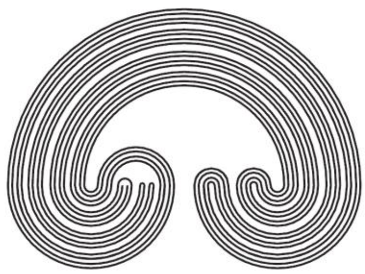
II. CONTINUOS

En esta sección revisamos las nociones de continuo, conexidad local, conexidad en pequeño y arco conexidad, estas nociones se usan a lo largo de este trabajo; también presentamos algunos resultados relacionados con estas nociones.

Definición 2.1. Un espacio métrico X es un *continuo* si X es compacto, conexo y no vacío. Dado $Y \subset X$, Y es un *subcontinuo* de X si Y es un continuo.

Arco

Algunos ejemplos de continuos son los siguientes:



Arcoíris de Knaster

Definición 2.1. Un arco es un espacio el cual es homeomorfo al intervalo cerrado [0,1]. Una curva cerrada simple es un espacio el cual es homeomorfo a $S^1 en\, \mathbb{R}^2$ donde

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : /x/ = 1\}.$$

A continuación estudiamos los conceptos de conexidad en pequeño, conexidad local y arco conexo, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 2.2. Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es *localmente conexo en* x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in U \subset V$. Diremos que X es localmente conexo, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Teorema 2.3. Un espacio topológico X es localmente conexo si, y sólo si toda componente de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en X.

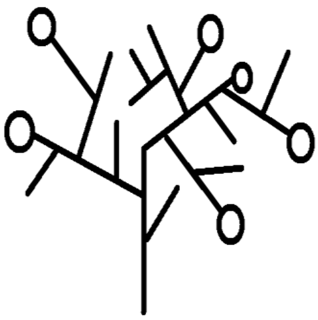
Definición 2.4. *Un espacio topológico X es arco conexo, si para cualesquiera y, $x \in X$ con $x \neq y$, existe un arco en X de x a y.*

Los conjuntos abiertos y conexos en un continuo localmente conexo son arco conexos como se cita a continuación.

Teorema 2.5. [2, Teorema 8.26] *Sea X un continuo localmente conexo. Si U es un conjunto abierto en X y conexo*

III Propiedades generales de las gráficas finitas

Definición 3.1. Una *gráfica finita* es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan solo en uno o en sus dos puntos extremos.



Teorema 3.2. Si X y Y son gráficas finitas tales que $X \cap Y \neq \emptyset$ y $X \cap Y$ es finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.

Demostración. Como X, Y son gráficas finitas y $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es un continuo. Además, como $X \cap Y$ es finita, para $k \in \mathbb{N}$, podemos denotar la intersección por $X \cap Y = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. En la unión de X con Y consideramos sólo los arcos que contienen a los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ya que la unión de los arcos de X y Y que no tienen a los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, es una unión finita de arcos. Notemos que en cada punto de intersección se generan a lo más cuatro nuevos arcos.

Así, $X \cup Y$ está formada por arcos de X y Y que no se intersecctan, y por aquellos que se generan, los cuales sólo son un número finito de estos arcos con la propiedad de que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Por lo tanto, $X \cup Y$ es una gráfica finita.

Definición 3.3. Sean A, un subconjunto no vacío de un espacio topológico X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor** o **igual** a β en X, denotado por $ord(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto U de X con $A \subset U$ existe un conjunto abierto V de X, tal que $A \subset V \subset U$ y $|fr(V)| \leq \beta$. Si $A = \{p\}$ en lugar de escribir $ord(\{p\}, X) \leq \beta$ sólo se escribirá como $ord(p, X) \leq \beta$. Se dice que A es de **orden** β en X, denotado por $ord(A, X) = \beta$, si $ord(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, tenemos que $ord(A, X) \nleq \alpha$.

Teorema 3.4. Si X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para cada $x \in X$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Cada subcontinuo de X es un continuo localmente conexo.
2. Cada subcontinuo de una gráfica finita es un continuo localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para cada $x \in X$. Entonces X no contiene un continuo de convergencia, así, ningún subcontinuo de X contiene un subcontinuo de convergencia. Por lo tanto, cada subcontinuo de X es conexo en pequeño para todo $x \in X$. Luego, cada subcontinuo de X es localmente conexo. La proposición 2. es consecuencia de 1.

Teorema 3.5. Si X es un continuo no degenerado, entonces $ord(p, X) \leq 2$ para todo $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración. Supongamos que $ord(p, X) \leq 2$ para todo $x \in X$. Luego, por el Teorema 4.4, implicamos que X es un continuo locamente conexo, y claramente X no contiene un triodo simple. Por lo tanto, X es un arco o una curva cerrada simple.

Teorema 3.6. [2, Corolario 9.6] El continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si cada punto de X es de orden 2 $en\, X$.

Teorema 3.7. [2, Lema 9.7] Sea X un continuo localmente conexo y $p \in X$ tal que $ord(x, X) = n < \aleph_0$. Entonces existe una base local numerable $\{B_i : i = 1,2,\ldots\}$ de p tal que para cada $i = 1,2,\ldots$, se tiene que B_i es un subconjunto abierto y conexo de X y $|fr(B_i)| = n$.

Definición 3.8. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Un **n-odo simple** es un continuo T_n que es una unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un punto p el cual es un punto extremo de cada uno de los n arcos. El punto p es llamado el vértice de T_n. En el caso en que $n = 3$, decimos que T_3 es un triodo simple.

Definición 3.9. Sea X una gráfica finita. Un punto p en X es un punto **ordinario** de X si $ord(p, X) = 2$. El punto p es un punto de **ramificación** de X si $ord(p, X) > 2$. Un punto p es un punto **extremo** de X si $\mathrm{ord}(\mathrm{p}, \mathrm{X}) = 1$.

La colección de puntos ordinarios de X, se denota por $O(X)$; la colección de puntos de ramificación de X, se denota por $R(X)$; y la colección de puntos extremos de X, se denota por $E(X)$. De esta forma una gráfica finita X puede expresarse de la siguiente manera $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$.

Teorema 3.10. [2, Lema 9.9] Sea X un continuo con exactamente un punto p de orden mayor o igual a 3 en X. Si $ord(p, X) = n < \aleph_0$, entonces p es el vértice de un n-odo simple, el cual es una vecindad de p en X.

Teorema 3.11. Sea X un continuo. Entonces X es una gráfica finita si, y sólo si se cumple lo siguiente.

1. Para todo $p \in X$, tenemos que $ord(p, X) < \aleph_0$.
2. Existe un subconjunto finito M en X tal que para todo punto $p \in X - M$, el $\mathrm{ord}(\mathrm{p}, \mathrm{X}) \leq 2$.

Demostración. Si X es una gráfica finita y M es el conjunto de puntos de ramificación, entonces se satisfacen las condiciones (1) y (2).

Probemos la implicación inversa por inducción. Sea X un continuo tal que X cumple las condiciones (1) y (2), y $M = \emptyset$, así X es un arco o una curva cerrada simple, por lo tanto, X es una gráfica finita.

Supongamos por hipótesis de inducción que si X es un continuo que satisface las condiciones (1) y (2), donde M tiene a lo más k puntos, $p_1, p_2, \dots, p_k$, entonces X es una gráfica finita.

Sea Y un continuo que satisface las condiciones (1) y (2), donde el conjunto M tiene exactamente $k+1$ puntos, supongamos que $M = \{p_1, p_2, \dots, p_{k+1}\}$. Como el continuo Y satisface la condición (1), implicamos que Y es un continuo localmente conexo. Así, existe un subconjunto U abierto en Y y conexo U tal que para todo $i \in \{1,2,\dots,k+i\}$, tenemos que $p_1 \in U$ y $p_i \notin \overline{U}$. Como $p_1 \in U$ y U es un abierto en Y tenemos que $fr_{\overline{U}}(U) = fr_Y(U)$, con ésto implicamos que $ord(p_1, \overline{U}) = ord(p_1, Y)$. Así, $\overline{U}$ es un continuo y p_1 es el único punto de $\overline{U}$, tal que $ord(p_1, \overline{U}) \geq 3$.

Sea $n = ord(p_1, \overline{U})$, por la condición (1), tenemos que $n < \aleph_0$, así implicamos que p_1 es el vértice de un n-odo simple W el cual es una vecindad de p_1 en $\overline{U}$. Veamos que W es una vecindad en Y. Como W es una vecindad de p_1 en $\overline{U}$, existe un abierto O en $\overline{U}$ con $p_1 \in O \subset W$. Sea Q un abierto en Y tal que $O = Q \cap \overline{U}$. Notemos que $p_1 \in Q \cap U$ y $Q \cap U$ \$ es abierto en Y, además $Q \cap U \subset Q \cap \overline{U}$, donde $O = Q \cap \overline{U}$ y $O \subset W$, por lo tanto, W es una vecindad de p_1 en Y. Luego, existe un conjunto abierto y conexo V en Y tal que $p_1 \in V$ con $|fr(V)| = n$ y tal que $\overline{V}$ es un n-odo simple.

Como $fr(Y - V) = fr(V)$, luego $Y - V$ tiene a lo más n componentes $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_t$ con $1 \leq t \leq n$. Luego, para todo $i \in \{1,2,\dots,t\}$, tenemos que $p_1 \notin K_i$ así, por hipótesis de inducción podemos asumir que K_i es una gráfica finita. Así, $K_i \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y $K_i \cap \overline{V} \subset fr(V)$, ya que para todo $i \in \{1,2,\dots,t\}$, tenemos que $K_i \cap \overline{V} \subset \overline{V} \cap \overline{Y - V}$. Para todo $i \in \{1,2,\dots,t\}$, inferimos que $K_i \cap \overline{V}$ es finita, ya que $|fr(V)| = n$. Como $\overline{V}$ es una gráfica finita, tenemos que $\overline{V} \cup K_1$ es una gráfica finita. Luego, $(\overline{V} \cup K_1) \cap K_2 = \overline{V} \cap K_2$, inferimos que $(\overline{V} \cup K_1) \cup K_2$ es una gráfica finita, siguiendo este proceso obtenemos que $\overline{V} \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_t$ es una gráfica finita. Por lo tanto, Y es una gráfica finita.

Teorema 3.12. Cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.

Demostración. Sean X una gráfica finita, A un subcontinuo de X y $p \in A$. Como $p \in X$, por el Teorema 4.11, tenemos que $ord(p, X) < \aleph_0$. Además, $ord(p, A) \leq ord(p, X) < \aleph_0$ así, $ord(p, X) < \aleph_0$. Tenemos que existe un subconjunto finito M en X tal que para todo $p \in X - M$, el $ord(p, X) \leq 2$. Notemos que $A - M \subset X - M$, así para todo $p \in A - M$ tenemos que $ord(p, A) \leq 2$.

Definición 3.13. Sea X un espacio topológico regular. La dimensión de X, denotada por $dim[X]$ es un entero mayor o igual a -1 o infinito. La definición de dimensión se da recursivamente como sigue:

i $dim[X] = -1$ si, y sólo si $X = \emptyset$.

ii Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Se dice que la dimensión de X en x es menor o igual que n, denotado por $dim_x[X] \leq n$, si para cada conjunto abierto V en X con $x \in V$, existe un conjunto abierto U en X, tal que $x \in U \subset V$ y $dim[frX(U)] \leq n - 1$.

iii Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] \leq n$ si, y s´olo si para todo $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n$.

iv Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] = n$ si, y s´olo si para cada $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n$ y $dim[X \nleq n - 1$.

v $dim[X] = \infty$ si y s´olo si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $dim[X] \nleq n$.

Lema 3.14. Sean X y Y espacios topológicos regulares y $n \in \mathbb{N} \cup \{-1,0\}$. Si X es homeomorfo a Y y $dim[X] = n$, entonces $dim[Y] = n$.

Demostración. La prueba la hacemos por inducción sobre $dim[X]$. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo.
Si $dim[X] = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como h es suprayectiva, tenemos que $Y = h(X) = h(\emptyset) = \emptyset$. Así, $dim[Y] = -1$.
Si suponemos que $dim[X] = m$ con $m \leq n - 1$, entonces $dim[Y] = m$. Veamos que si $dim[X] = n$, entonces la $dim[Y] = n$. Sean $y \in Y$ y un conjunto abierto U en Y, tal que $y \in U$. Como h es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$. Además, como h es continua y $y \in U$, tenemos que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X tal que $x \in h^{-1}(U)$. Como la $dim[X] = n$, existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subset h^{-1}(U)$ y $dim[frX(V)] \leq n - 1$. Luego, $h(x) \in h(V) \subset h(h^{-1}(U))$. Como h es biyectiva, tenemos que $h(h^{-1}(U)) = U$. Así, $y \in h(V) \subset U$. Como h es una función abierta, tenemos que $h(V)$ es un conjunto abierto en Y. Como $dim[fr_X(V)] = k \leq n - 1$ y $h|fr_X(V) : fr_X(V) \to h(fr_X(V))$ es un homeomorfismo, por hipótesis de inducción, tenemos que $dim[h(fr_X(V))] \leq n - 1$. Como $h(fr_X(V)) = fr_Y(h(V))$, tenemos que $dim[fr_Y(h(V))] \leq n - 1$. Así, $dim[Y] \leq n$.
Veamos que $dim[Y] > n - 1$. Supongamos que $dim[Y] = l$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $dim[X] = l$ con $l \leq n - 1$. Esto es una contradicción porque $dim[X] = n$. Así, $dim[Y] > n - 1$. Por lo tanto, $dim[Y] = n$.

Teorema 3.15. Si J es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $dim[J] = 1$.
Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}$ y W un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $p \in W$. Como $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, con\ a < b\}$ es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto (a_0, b_0) en $\mathbb{R}$, tal que $p \in (a_0, b_0) \subset W$, luego $dim[fr_{\mathbb{R}}(a_0, b_0)] = 0$, así $dim_p[\mathbb{R}] = 1$. Como p es un punto arbitrario, tenemos que $dim[\mathbb{R}] = 1$.
Sea $J = [a,b]$ en $\mathbb{R}$ con J no degenerado. Notar que $dim_{\mathbb{R}}[J] > 0$, como $J \subset \mathbb{R}$ y $dim[\mathbb{R}] = 1$, implicamos que $dim[J] = 1$.

Corolario 3.16. Si A es un arco en un espacio topológico regular X, entonces $dim[A] = 1$.
Demostración. Sea X un espacio topológico y A un arco en X. Como A es homeomorfo a $[0,1]$, por el Lema 4.13,

tenemos que $dim[A] = dim[[0,1]]$. Por el Teorema 2.5, tenemos que $dim[[0,1]] = 1$. Por lo tanto, $dim[A] = 1$.

Definición 3.17. *Dado $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0,1]$ se denota con I^n. Una n-celda es un espacio topológico homeomorfo a I^n.*

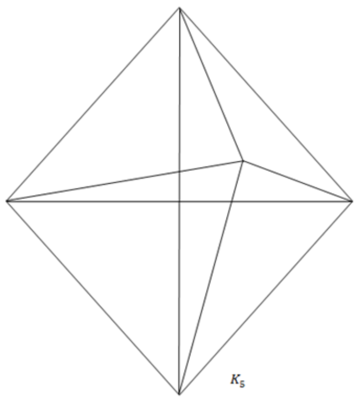
Corolario3.18. *La dimensión de una n-celda es n.*

Teorema 3.19. [2, Lema 9.11] Sea X un continuo tal que existen puntos $x_i \in X$, con $i \in \mathbb{N}$, los cuales satisfacen que $ord(x_i, X) \geq 3$ para cada i y para cada $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$. Entonces existe un subcontinuo K de X tal que $ord(K, X) \geq \aleph_0$ y si X es un continuo localmente conexo, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $\left|L^{[1]}\right| \geq \aleph_0$, donde $L^{[1]}$ es el conjunto de los puntos extremos de L.

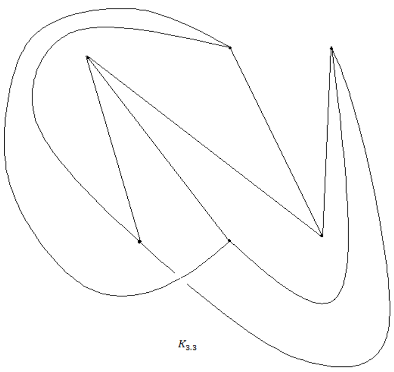
Teorema 3.20. [2, Teorema 9.12] Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si $\mathrm{ord(A, X)} < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X.

Teorema 3.21. [2, Teorema 9.13] Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y sólo si cada subcontinuo de X tiene sólo una cantidad finita de puntos extremos.

Teorema 3.22. [2,Teorema 9.36] Si X es una gráfica finita, entonces X puede ser encajado en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si X no contiene la gráfica finita K_5 o la gráfica finita bipartita $\mathrm{K}_{3,3}$. (Vea las siguientes figuras).



K_5



$K_{3,3}$

III. Conclusiones

- Se muestran las características que tienen las gráficas finitas con respecto a la definición de orden.
- La unión de dos gráficas finitas cuya intersección es un conjunto finito, es una gráfica finita.
- Los subcontinuos de una gráfica finita son una gráfica finita.
- Toda gráfica finita se puede encajar en $\mathbb{R}^3$.

Referencias

[1] Córdova-Salazar, V., Herrera-Carrasco, D., Macías-Romero, F. "Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$". *En F. Macías-Romero (Ed.). Matemáticas y sus Aplicaciones 4 (pp. 159-182) (2014). Textos Científicos, Fomento Editorial BUAP.*

[2] Sam B. Nadler, Jr. "Continuum Theory. An introduction". *Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 158, Maarcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Investigaciones sobre dendritas e hiperespacios de continuos

Fernando Macías Romero*, Luis Alberto Guerrero Méndez** y David Herrera Carrasco***
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fmacias@fcfm.buap.mx **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, luisgm@alumnos.fcfm.buap.mx ***Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dherrera@fcfm.buap.mx

***Abstract*— In this paper we see the concepts of continuum, dendrites and its hyperspaces for talk about some topological properties of the hyperspaces $C_n(X)$, $F_n(X)$ and $HS_n(X)$. We see some results about uniqueness of hyperspaces.**

***keywords*— Continuum, finite graph, dendrite, unique hyperspace.**

***Resumen*— En este trabajo presentamos los conceptos de continuo, de dendritas y sus hiperespacios para poder comentar sobre algunas propiedades topológicas de los hiperespacios $C_n(X)$, $F_n(X)$ y $HS_n(X)$. Veremos algunos resultados sobre unicidad de hiperespacios.**

Palabras clave— **Continuo, gráfica finita, dendrita, hiperespacio único.**

I. Introducción

UN *continuo* es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo. El estudio sistemático de los continuos comenzó a principios del siglo pasado, principalmente en Polonia, donde personajes como Knaster, Kuratowski y Sierpinski se dedicaron a cultivar esta nueva rama de la matemática. Casi al mismo tiempo se empezaron a estudiar también los hiperespacios.

Los hiperespacios más comunes de un continuo X para son:

$2^X = \{A \subset X :\ A$ es cerrado en X y no vacío$\}$,

$C_n(X) = \{A \in 2^X :\ A$ tiene a lo más n componentes$\}$ y

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$,

a estos hiperespacios se les dota de una métrica llamada métrica de Hausdorff. De hecho, a $F_n(X)$ y a $C_n(X)$, considerados con la métrica de Hausdorff, se les conoce como el *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X, respectivamente. El *n-ésimo hiperespacio suspensión* de X, denotado por $HS_n(X)$, es el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ que es obtenido de $C_n(X)$ al identificar $F_n(X)$ a un punto.

Los primeros trabajos a principios del siglo XX se deben a los alemanes Vietoris y Hausdorff, la métrica de Hausdorff fue definida por Pompeiu en 1905. En 1940 Kelley en su tesis doctoral nombrada Un estudio de hiperespacios hizo el primer estudio sistemático de los hiperespacios e implementó técnicas que siguen siendo utilizadas hasta hoy en día. En nuestro país, durante las últimas dos décadas, se ha intensificado el número de investigadores de estas teorías.

II. Los hiperespacios

La teoría de continuos y la teoría de los hiperespacios son dos ramas muy importantes de la topología; aunque ambas teorías se han desarrollado de manera extraordinaria en los últimos veinte años, aún tienen muchos problemas por resolver. En esta sección se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de este trabajo, tales nociones son: conexidad local, continuo, hiperespacio, la topología que tienen los hiperespacios, así como funciones de Whitney.

A continuación se define el límite inferior, el límite superior y el límite de una sucesión de conjuntos.

Definición 1. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite inferior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$lím\ ínf\ A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X con* $x \in U$ *se cumple que* $U \cap A_n$ *es un conjunto no vacío para casi todo* n*, excepto una cantidad finita de números* $n\}$.

Definición 2. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite superior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$lím\ \sup A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X con* $x \in U$ *se cumple que* $U \cap A_n$ *es un conjunto no vacío par una cantidad no finita de números* $n\}$.

Obsérvese que a partir de las Definiciones 1 y 2, se tiene que

Definición 3. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite* de la sucesión, que denotamos por $lím\ A_n = A$ existe cuando

$lím\ ínf\ A_n = A = lím\ \sup A_n$.

A. Conexidad local

Una de las nociones más interesantes y fundamentales para nuestro estudio es el concepto que sigue.

Definición 4. Sean X un espacio topológico y x un punto de X. El espacio X es localmente conexo en x si para cada conjunto abierto U en X tal que x pertenece a U, existe un conjunto conexo y abierto V en X tal que x pertenece a V y V es subconjunto de U. El espacio topológico X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Además recuérdese la definición de componente.

Definición 5. Dado un espacio topológico X y un punto x en X, la *componente* C_x *de* x *en* X es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Si Y es un subconjunto de X, la *componente de* Y *en* X es el subconjunto conexo maximal de X contiene a Y.

Una propiedad equivalente a ser localmente conexo, es la que sigue.

Teorema 1. [4, Teorema 4.2, pág. 113] Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si toda componente de cada conjunto abierto U en X es un conjunto abierto en X.

El concepto que sigue ofrece una caracterización de la conexidad local como se ve en el Teorema 2.

Definición 6. Sean X un espacio topológico y x un punto en X. El espacio topológico X es *conexo en pequeño en* x si cada vecindad U de x en X, contiene un subconjunto conexo V de X tal que V es vecindad de x en X. El espacio topológico es *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Teorema 2. [13, 5.22, pág. 83]Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo en pequeño si y sólo si es localmente conexo.

B. Continuos e hiperespacios

En 1883 George Cantor (1845-1918), introdujo la noción de continuo diciendo que éste es un subconjunto de un espacio euclidiano que es conexo, cerrado y denso en sí mismo. Ahora, las cosas han cambiado y este concepto está determinado, oficialmente, como sigue.

Definición 7. Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo que está contenido en algún espacio topológico.

M. Fréchet (1878-1973) definió, en 1906, la clase de los espacios métricos (aunque el término “espacio métrico” no fue introducido sino hasta 1914 por F. Hausdorff (1868-1942)), fue la primera clase de espacios abstractos en la cual fueron generalizados varios conceptos y resultados. En ese mismo año también fue establecida la noción de espacio de Hausdorff. Sin embargo, por un periodo extenso los espacios métricos fueron mucho más estudiados que los espacios de Hausdorff.

Una de las nociones básicas e imprescindibles de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1883 por C. Jordan (1838-1922), para la clase de los subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914 por F. Hausdorff, y en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Otro concepto topológico relacionado con la noción de continuo es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956), el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene una subcubierta finita. En 1903, Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio Euclidiano. La definición actual esencialmente se debe a P. S. Aleksandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

C. Ejemplos de continuos

1. El intervalo unitario , con la métrica usual es conexo y por ser un conjunto cerrado y acotado es compacto.

2. Considérese como subespacio topológico de con la topología euclidiana. Como es la imagen de la función continua tal que , se tiene que es conexo. Además, dicha circunferencia unitaria es compacto, y de aquí, es un continuo.

Definición 8. Un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado [0,1]. Sean h:[0,1]→J un homeomorfismo, tal que h(0)=a y h(1)=b, los puntos a y b son los puntos extremos del arco J.

Nótese que los subcontinuos, no degenerados, de la circunferencia unitaria son los arcos.

Se pueden construir nuevos continuos uniendo algunos ya conocidos. Por ejemplo, si se considera la unión de arcos que se intersectan en un único punto, que debe ser un punto extremo de cada arco, llamado el vértice del n-odo, el resultado también es un continuo llamado n-odo simple.

Siguiendo esta idea se pueden considerar la unión de una cantidad finita de arcos tales que, sean ajenos dos a dos o si se intersectan lo hagan en uno o en ambos puntos extremos. A este nuevo concepto se le llama gráfica finita. Cuando una gráfica finita no contiene curvas cerradas simples es llamada árbol.

III. UNICIDAD DE HIPERESPACIOS

Es claro que si dos continuos X y Y son homeomorfos y si H(X) es alguno de los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$, entonces H(X) es homeomorfo a H(Y).

Sin embargo, puede ser que dos espacios no homeomorfos tengan el mismo hiperespacio; por ejemplo, los hiperespacios de los subcontinuos de la circunferencia unitaria y del intervalo unitario [0,1] son homeomorfos, vea Ejemplos 3.1 y 3.2 de [11].

Definición 1. Para un continuo X y n un número natural, sea H(X) alguno de los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$. Un continuo X tiene *hiperespacio único* H(X), si la siguiente implicación es verdadera: si Y es un continuo tal que H(X) es homeomorfo a H(Y), entonces X es homeomorfo a Y.

Surge de manera natural la pregunta siguiente:

Pregunta 1. ¿Bajo qué condiciones un continuo X tiene hiperespacio único H(X)?

Respecto de las gráficas finitas se sabe lo siguiente:

1. Si X es una gráfica finita diferente de un arco y de una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único C(X), vea Teorema 1 de [1] y 9.1 de [3].
2. Si X es una gráfica finita, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea Teorema 4.1 de [9].
3. Si X es una gráfica finita y n es un número natural diferente de 1 y 2, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$, vea Teorema 3.8 de [10].
4. Si X es una gráfica finita n es un número natural, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea Corolario 5.9 de [2].

Sean E(X) el conjunto de puntos de X tal que X-{p} es conexo y $\mathbb{D}$ la clase de las dendritas tal que E(X) es cerrado en X.

Para los elementos de la clase $\mathbb{D}$ sabemos lo siguiente:

Si X es un elemnto de la clase $\mathbb{D}$ y no es un arco, entonces X tiene hiperespacio único C(X), vea Teorema 10 de [5].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea [6] y Teorema 3.1 de [12].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$ y n es un número natural diferente de 1 y 2, entonces X tiene hiperespacio $C_n(X)$, vea Teorema 5.7 de [8].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$ y n es un número natural, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea Teorema 3.7 de [7].

IV. Conclusiones

Como se puede ver, la investigación en unicidad de hiperespacios es un tema de actualidad, por nuestra parte actualmente investigamos unicidad del n-ésimo producto simétrico y del n-ésimo hiperespacio suspensión para los elementos de otras clases de continuos que fueron definidas recientemente como los continuos enrejados y casis enrejados.

Referencias

[1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace,* Continuum theory (Denton, TX, 1999, 33-49 Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 230, Dekker, New York, 2002.

[2] E. Castañeda y A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl., 153 (2006), 1434--1450.

[3] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I,* Fund. Math., 62 (1968), 265--286.

[4] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[5] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math., 33 (2007), 795--805.

[6] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López y F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$,* Topology Appl., 156 (2009), 549--557.

[7] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López y F. Macías-Romero *Dendrites with Unique Symmetric Products*, Topology Proc., 34 (2009), 175--190.

[8] D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *Dendrites with unique* n- fold hyperspace, Topology Proc., 32 (2008), 321-337.

[9] A. Illanes, The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique, Glasnik. Mat. Ser. III, 37(57) (2002), 347-363.

[10] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$*, Topology Proc., 27 (2003), 179-188.

[11] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.

[12] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$*, II, Topology Proc., 34 (2009), 77-96.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOFÍSICA

María N. Quevedo, Hernando Quevedo**
Universidad Militar Nueva Granada, maria.quevedo@unimilitar.edu.co, Universidad Nacional Autónoma de México, quevedo@nucleares.unam.mx,

***Abstract* — Under Econophysics and using mathematical procedures shows that the distribution functions used in economics can be derived from certain thermodynamic variables which, when studied in certain periods, as eligible to be considered as variables conserved within a thermodynamic system. Is supposed to depend on such variables micro parameters. The distribution of income in an economic system is not empirical but the result of a mathematical assumption. We show for hypothetical systems and later distribution functions as Boltzmann Gibbs and Pareto which have proved very useful when describing the economic system of many companies in different continents are derived.**

***Keywords* — Mathematics, Econophysics, distribution function, Boltzmann-Gibbs distribution, Pareto distribution JEL: A12, C02, C49, D10, D31**

***Resumen*— En el marco de la econofísica y haciendo uso de procedimientos matemáticos se demuestra que las funciones de distribución usadas en economía se pueden derivar a partir de ciertas variables termodinámicas que, al ser estudiadas en determinados periodos de tiempo, satisfacen las condiciones para ser consideradas como variables conservadas dentro de un sistema termodinámico. Se supone que dichas variables dependen de parámetros microeconómicos.**

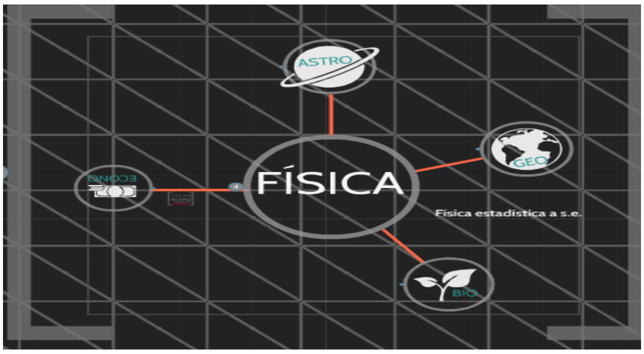
La distribución de ingresos en un sistema económico no es empírico sino el resultado de una suposición matemática. Se demuestra para sistemas hipotéticos y posteriormente se derivan funciones de distribución como las de Boltzmann-Gibbs y Pareto que han demostrado ser muy útiles en el momento de describir el sistema económico de muchas sociedades en diferentes continentes.

Palabras clave - Matemáticas, Econofísica, función de distribución, distribución de BoltzmannGibbs, distribución de Pareto.
JEL: A12, C02, C49, D10, D31

En la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad Militar Nueva Granada se encuentra avalado el Grupo MATRIX con la línea de investigación: Matemática Aplicada, entre otras. Dicha línea está liderada por María Nubia Quevedo Cubillos, docente de planta del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas; y cuenta con la asesoría del Dr. Hernando Quevedo Cubillos, docente investigador de la UNAM, (México) e Investigador Adjunto de la Universidad de Roma.

Para el periodo 2014 fue aprobado por la Vicerrectoría el proyecto CIAS 1467 denominado "Parámetros micro y macro económicos de la distribución de ingresos en Colombia. Econofísica como herramienta", los avances del proyecto y la contextualización del mismo constituyen el tema del presente paper.

La búsqueda de aplicaciones de la física a diferentes campos ha permitido incursionar en el mundo de lo muy pequeño con la teoría cuántica y partículas subatómicas, pasando por el mundo de los seres vivos: biofísica; el del comportamiento de la tierra: geofísica, hasta llegar al mundo de lo muy grande (teoría general de la relatividad y cosmología): astrofísica. En forma análoga podríamos decir que, cuando entramos al mundo de la economía desde la física estaremos hablando de ECONOFISICA.



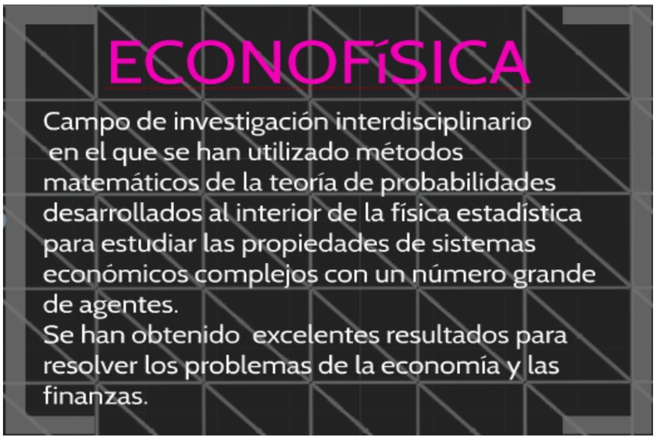
Este término fue introducido por Eugene Stanley en su conferencia Dynamics of Complex Systems presentada en el año de 1995 en Calcuta, afirma que las leyes que describen el comportamien-to de un gran número de objetos inanimados pueden describir el comportamiento de un gran número de objetos animados" Stanley et al., 1996 , habla entonces de "el campo multidisciplinar de econofísica" como "un neologismo que denota las actividades de los físicos que están trabajando en los problemas de la economía para probar una variedad de nuevos enfoques conceptuales derivadas de las ciencias físicas.

Chakrabarti, B. K., 2005, "Econophys-Kolkata: a short story," in Chatterjee, Yarlagadda, and Chakrabarti, 2005, *Econophysics of Wealth Distributions*, pp. 225–228.

Chakrabarti, B. K., A. Chakraborti, and A. Chatterjee, 2006, Eds., *Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives* _Wiley-VCH, Berlin_.

http://link.springer.com/chapter/10.1007/88-470-0389-X_26#page-1

Pronto se empieza a hablar del término en diferentes congresos y encuentros, de tal forma que surge la econofísica como un campo de investigación interdisciplinario relativamente nuevo y en el que se han utilizado varios métodos matemáticos de la teoría de probabilidades desarrollados al interior de la física estadística para estudiar las propiedades de sistemas económicos complejos con un número grande de agentes. Gracias a la econofísica, se han obtenido excelentes resultados para resolver los problemas de la economía y



las finanzas.

Nuestra propuesta de trabajo consiste en usar resultados de la termodinámica estadística para describir el sistema económico colombiano. Para ello recordemos lo que es la

TERMODINAMICA: Es una ciencia fenomenológica que deriva sus resultados de la observación y la experimentación, lo que hace que sus resultados sean tremendamente poderosos y válidos. Las leyes de la termodinámica pueden ser consideradas como axiomas de

modelos matemáticos.

Una de las mayores dificultades consiste en identificar las variables termodinámicas, entendiéndose por

VARIABLE TERMODINAMICA: Aquella que satisface las leyes de la termodinámica

1. La ley de conservación de la energía
2. La entropía es mayor que cero
3. La temperatura es diferente de cero

Existe controversia entre los estudios que consideran el dinero como una variable termodinámica bien definida y quienes consideran que el dinero es una variable económica irrelevante: E. **Samanidou, E. Zschischang, D. Stauffer, and T. Lux, "Agentbased models of financial markets," Reports on Progress in Physics, vol. 70, no. 3, article R03, pp. 409–450, 2007.**

A pesar de ello, la econofísica ha ganado un espacio importante dentro de los grandes encuentros, coloquios, congresos, etc, tanto de física como de economía.

A pesar de ello, la econofísica ha ganado un espacio importante dentro de los grandes encuentros, coloquios, congresos, etc, tanto de física como de economía.

Otro tema controversial es el considerar un sistema económico en equilibrio, pero en este caso es un equilibrio estadístico, en el que la función de distribución del dinero es estable, pero a la vez es dinámico en el sentido de que los constituyentes del sistema se mueven continuamente. Esta suposición de equilibrio no es la misma que en economía hace referencia al momento idealista en que la oferta es igual a la demanda.

La termodinámica estadística estudia sistemas en equilibrio y utiliza métodos matemáticos desarrollados en física estadística para describir propiedades

macroscópicas a partir de propiedades moleculares o microscópicas.

Yakovenko en "Econophysics, statistical mechanics approach to," presenta un número razonable de argumentos con los que prueba que ciertos sistemas económicos pueden ser considerados como sistemas en equilibrio y algunas cantidades como la totalidad de dinero dentro del sistema se puede considerar como conservada durante ciertos periodos de tiempo.

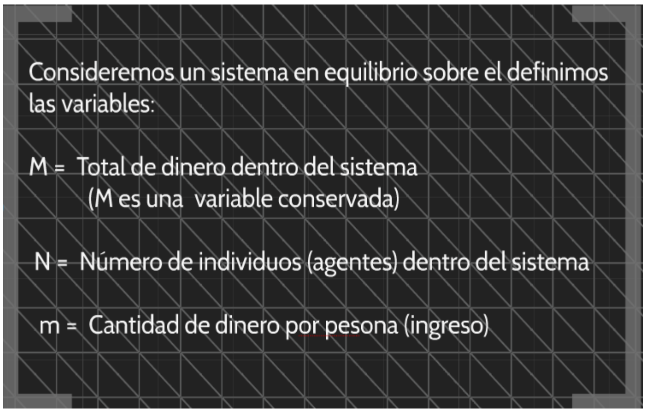
V. M. Yakovenko, "Econophysics, statistical mechanics approach to," in Encyclopedia of Complexity and System Science, R. A. Meyers, Ed., Springer, New York, NY, USA, 2009.

Luego, usando termodinámica estadística, consideramos el Sistema económico colombiano como un sistema en equilibrio, durante el periodo de tiempo transcurrido entre una y otra emisión de moneda por parte del banco de la República, y empezamos considerando las variables:

M= Cantidad de dinero dentro del sistema.
Donde M es una variable conservada

N = Número de agentes dentro del sistema

n = Cantidad de dinero por agente



Veamos de una forma práctica y sencilla que M es una

VARIABLE CONSERVADA:

Consideremos dos agentes A y B, donde A posee una cantidad m_i de dinero y B m_j, de tal manera que la cantidad de dinero dentro del sistema está dado por M = m_i + m_j y este valor se mantiene constante por un periodo de tiempo ya que ninguno de los agentes pueden producir o emitir dinero. Supongamos que A le ofrece un bien o servicio a B por un valor de Δ_m , donde $\Delta_m \leq m_j$ para que B pueda adquirir el bien o servicio que A le ofrece.

Una vez hecha la transacción económica, A incrementó su dinero a $m_i' = m_i + \Delta_m$, mientras que B disminuyó su dinero y ahora posee $m_j' = m_j - \Delta_m$. La cantidad de dinero dentro del sistema en ese momento es $m_i' + m_j'$ = $m_i + \Delta_m + m_j - \Delta_m$ = M, con lo cual vemos que el valor de M se conserva dentro del sistema.

Imagen tomada de © Getty Images

Modelos simples de este estilo fueron considerados por Dragulescu y Yakovenco en "Statistical mechanics of money". Haciendo simulaciones de la distribución del dinero en modelos económicos cerrados muestran cómo surge la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs en forma análoga con la energía, donde la temperatura efectiva es igual a la cantidad media de dinero por agente económico.

A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money", The European Physical Journal B, v. **17**, pp. 723-729 (2000), pdf.

En 2007 Justin Chen, estudiante de pregrado de Yakovenko en Caltech, simuló de un modelo de intercambio de dinero con 500 agentes a quienes se les da inicialmente la misma cantidad de dinero y empiezan a hacer transacciones económicas de compra y venta de bienes o servicios a un precio Δ_m, al cual no todos los agentes pueden acceder si no poseen el dinero suficiente, de los cuales existen muchos, mientras que los que poseen grandes cantidades de dinero son muy pocos. Mediante un histograma muestra la evolución temporal de la distribución de dinero entre los agentes. Conforme pasa el tiempo, la distribución de la función inicial de dinero se amplía y la a escala vertical se ajusta hasta cuando el sistema alcanza el equilibrio estadístico y la distribución de dinero se estabiliza en forma exponencial. Mediante este aporte, Chen ratifica la afirmación hecha por Dragulescu y Yakovenko en el año 2000 ("Statistical mechanics of money") de la concordancia con las leyes de la física estadística.

Un valor agregado en la simulación es el hecho de que muestra la evolución temporal de la entropía de la distribución de dinero. La entropía aumenta en el tiempo desde el valor inicial de 0 hasta el valor máximo alcanzado cuando el sistema alcanza el equilibrio estadístico-Principio de máxima entropía..

Usando lo datos de la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) deL Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) desde 2002 hasta 2012 se observaron características de la distribución del ingreso que resultan ser muy semejantes a las de otros estudios en otras economías. Dragulescu y Yakovenco ya en 2000 habían mostrado que el ingreso en la economía norteamericana tenía una distribución exponencial

Evidence for the exponential distribution of income in the USA
Adrian Dr˘agulescu and Victor M. Yakovenko
Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742-4111, USA

y en 2004 junto con Cristian Silva publica resultados afirmando que la distribución de ingresos bajos es exponencial para el 97% de la población, mientras que el 3% correspondiente a la población de clase alta, tiene una distribución de potencias de Pareto.

Temporal evolution of the "thermal" and "superthermal" income classes in the USA during 1983–2001 A. Christian Silva and Victor M. Yakovenko
Department of Physics, University of Maryland - College Park, MD 20742-4111, USA
received 13 September 2004; accepted in final form 9 November 2004 published online 22 December 2004

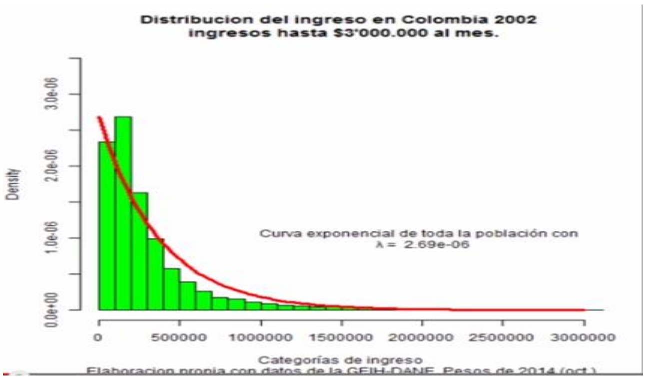
Otros trabajos pueden ser consultados en Dragulescu and y Yakovenko Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures .2003. Y
A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures", AIP Conference Proceedings 661 (2003) 180.

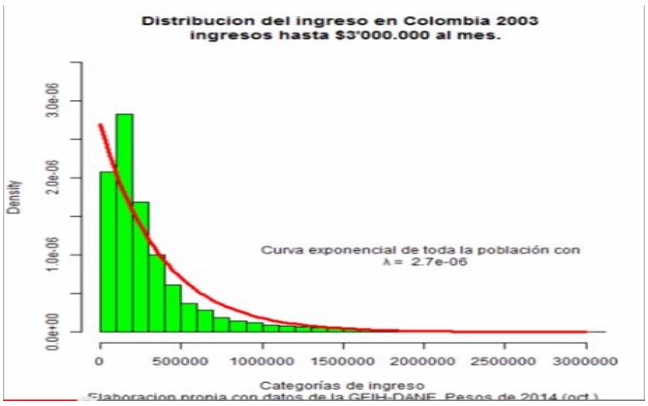
En 2006 Anand Banerjee y Yakovenko encuentran similitudes en la distribución de ingresos en Australia y muestran que la distribución presenta dos fases, una exponencial de Boltzman-Gibbs y otra de potencias de Pareto.

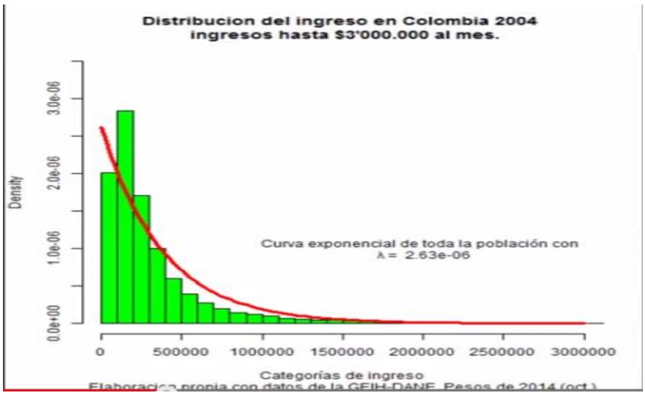
Study of the Personal Income Distribution in Australia. Anand Banerjee a, Victor M. Yakovenko a, T. Di Matteo baDepartment of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742-4111, USA bDepartment of Applied Mathematics, The Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

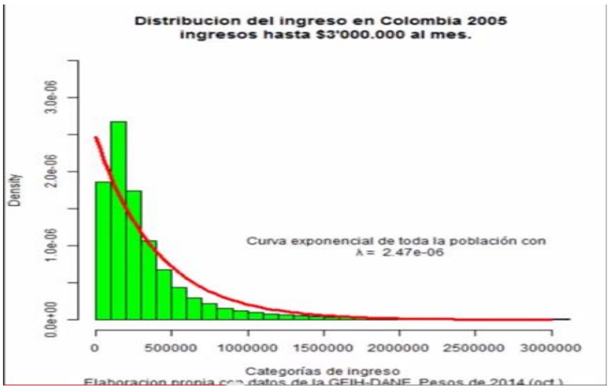
En nuestro trabajo se observó que, para valores del ingreso inferiores a 3´000.000, la distribución tiene un comportamiento exponencial negativo, lo cual avala la búsqueda de los parámetros de la correspondiente distribución de Boltzman-Gibbs para cada año.

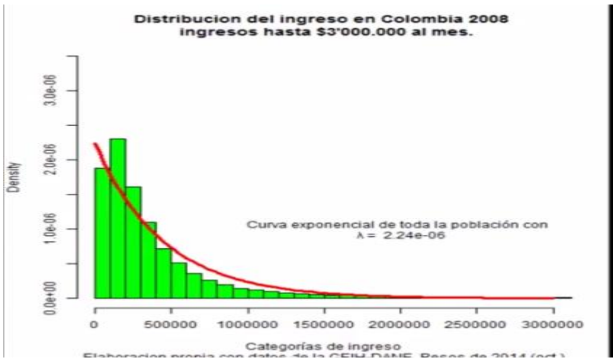
En las siguientes ilustraciones podemos ver el comportamiento de los ingresos, el valor del parámetro para la distribución de Boltzman-Gibbs y su g´rafica en color rojo:

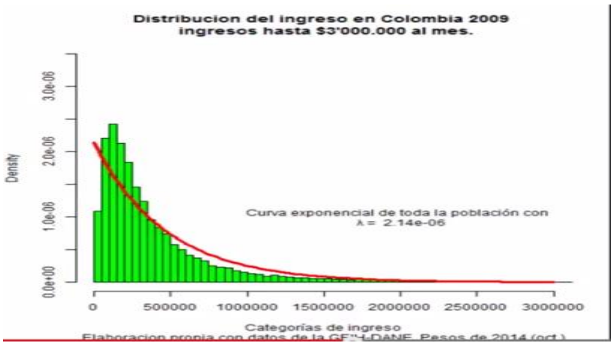


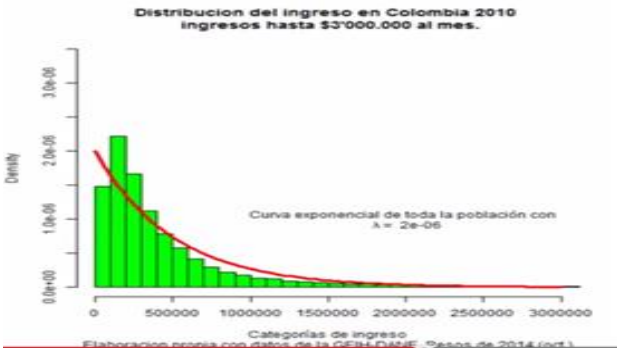


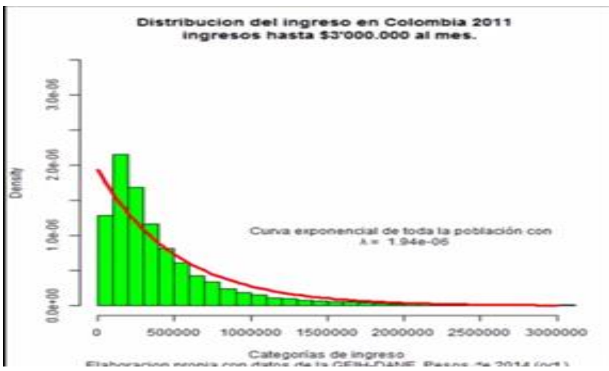












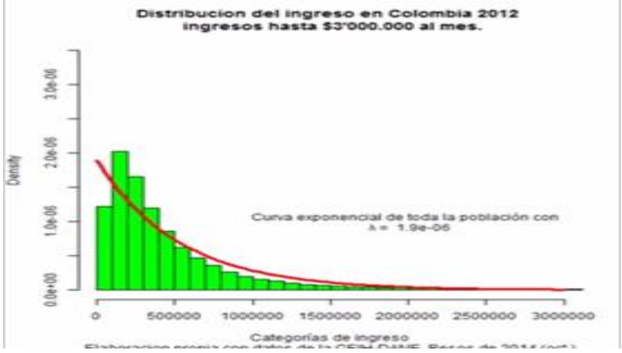


Figura 1: Distribución del ingreso en Colombia para valores de a lo más 3´000.000 con datos de la GEIH. La gráfica de color rojo es la exponencial de Boltzman-Gibbs. Fuente: Elaboración propia del grupo.
Se puede ver en https://www.youtube.com/watch?v=sedYnPxtYVU

Para el sistema económico Colombiano, tenemos entonces las evidencias para tomar como función de densidad de m, $\rho\,(m)$ dada por

$$\rho(m) \propto e^{-m/T}$$ Distribución de Boltzmann-Gibbs

Donde $T = = \frac{M}{N} =$ Cantidad promedio de dinero por agente.

La función de densidad de m es

$\rho(m) \propto e^{-m/T}$ Distribución de Boltzmann- Gibbs

$T = \frac{M}{N}$ (Promedio de dinero por agente)

Def. 1: **Función del dinero** $m = m(\bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\lambda_n)$

λ_i= Parámetros micro económicos. Determinan la cantidad de dinero por agente

2: **Función de densidad**

$\rho(\bar{\lambda}) = \frac{e^{-m(\bar{\lambda})/T}}{Q(T,\bar{\chi})}$, $\bar{\chi}$ = parámetros macroeconómicos

3. **Función de partición** (podemos conocer características del sistema)

$Q(T,\bar{\chi}) = \int e^{-\frac{m(\bar{\lambda})}{T}} d\bar{\lambda}$

Propiedad $\int \rho(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} = 1$

Ahora consideramos las siguientes definiciones:

Def. 1: **Función del dinero** $m = m(\bar{\lambda})$, con $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\lambda_n)$

Para λ_i= Parámetros micro-económicos que determinan la cantidad de dinero por agente.

Def. 2: **Function de densidad**

$$\rho(\bar{\lambda}) = \frac{e^{-m(\bar{\lambda})/T}}{Q(T,\bar{\chi})} \quad , \quad \bar{\chi}$$ = Parámetros macro-económicos

Def 3**. Función de Partición**

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int \frac{1}{T} e^{-\frac{m(\bar{\lambda})}{T}} d\bar{\lambda}$$

Por último recordemos que la función de densidad $\rho(\bar{\lambda})$ debe satisfacer la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{\lambda})\, d\bar{\lambda} = 1$$

Pero como

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{1}{T} e^{\frac{-\lambda}{T}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^n \frac{1}{T} e^{\frac{-\lambda}{T}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} -e^{\frac{-\lambda}{T}} \Big|_m^n = e^{\frac{-\lambda}{T}} \quad \therefore \quad \rho(\bar{\lambda}) = 1$$

Sobre el sistema económico colombiano, podríamos afirmar que al no tener crisis económicas y tener cierta estabilidad económica, satisface las condiciones de equilibrio para la variable ingreso dentro de un periodo de tiempo comprendido entre una y otra emisión de moneda. Por lo tanto siguiendo a Yakovenko (Econophysics, Statistical Mechanics Approach to,2007),

V. M. Yakovenko, Econophysics, Statistical Mechanics Approach to, (2007) arXiv:q-fin.ST /0709.3662

es posible hacerle un análisis desde el contexto de la econofísica. Pero también tenemos las bases teóricas que posibilitan la aplicación de las leyes de la termodinámica y la termodinámica estadística como se validó en un trabajo anterior de H. Quevedo y M.N. Quevedo (Statistical Thermodynamics of Economic Systems, 2011).

H. Quevedo and M. N. Quevedo, Statistical Thermodynamics of Economic Systems, J. Therm. 2011, 676495 (2011).

Por otra parte, debido a que, como ya se mencionó, existen trabajos que hacen análisis de la distribución del ingreso en otros sistemas económicos y se ha visto que muchas sociedades se caracterizan por tener dos regiones diferentes con funciones de distribución diferentes. Consideremos, entonces el caso más sencillo que sería tomar un

SISTEMAS LINEALES

1: **Función del dinero**

Sea $m(\lambda) = c_1 \lambda$ $\quad m = c_1\lambda$ $\quad c_1 = Const$

2: **Función de densidad**

$\rho(\lambda) = \frac{e^{-m(\lambda)/T}}{Q(T,\bar{\chi})}$, $\bar{\chi}$ = parámetros macroeconómicos

3. **Función de partición**

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{e^{-\lambda/T}}{T} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^n \frac{1}{T} e^{-\lambda/T}\, d(\lambda) = \lim_{n\to\infty} -e^{-\lambda/T} \Big|_m^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(-e^{-n/T} + e^{-\lambda/T}) = e^{-\lambda/T} \quad \therefore$$

$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$

SISTEMA LINEAL

En el que $m = c_1\lambda$ para un $c_1 = Constante$

Ya vimos las funciones de densidad y de partición correspondientes y que la variable así definida tiene una distribución de Boltzmann-Gibbs.

2. SISTEMAS NO LINEALES

Sea $m = c_1 \Lambda_1^2$ $\quad c_1 = Const$

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + ln\frac{\pi T}{c_1}\right) + ln\frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda_1} \qquad < m >= \frac{T}{2} \qquad Y_j = \frac{T}{\Lambda_j} \;,\; Y_1 = 0$$

$$Q(T,\bar{\Lambda}) = \left(\frac{\pi}{c_1}\right)^{1/2} \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda_1} T^{1/2}$$

3. SISTEMAS MULTIPLICATIVOS

Sea $m = c_1 ln\lambda$ $\qquad \lambda \,\epsilon\, [\, x, \infty)$

$$Q(T,\bar{\Lambda}) = \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\alpha\, x^{\alpha}} \qquad \alpha = \frac{c_1}{T} - 1 > 0$$

Distribución de Pareto $\quad \rho_p \;\alpha\; \frac{1}{x^{\alpha}}$

También consideramos el Sistema **NO LINEAL** para el cual $m = c_1\lambda^2$ para $c_1 = Constante$

El sistema que resulta de gran utilidad es el

MULTIPLICATIVO en el que se define

$m = c_1 ln\lambda$, para $c_1 = Constante$, y $\lambda > 0$

y la función de partición:

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{1}{T}\, e^{\frac{-c_1\, ln\lambda}{T}}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^{n} \frac{1}{T}\, e^{ln\lambda^{\frac{-c_1}{T}}}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T(1-\frac{c_1}{T})} \lambda^{1-\frac{c_1}{T}} \Big|_m = \frac{1}{k\, m^{\frac{c_1 - T}{T}}}$$

Con los cual se tiene que $\rho(m)\, \alpha\, \frac{1}{m^{\eta}}$ que corresponde a la distribución de potencias de Pareto.

Son estas las distribuciones halladas, para las cuales debimos hallar los correspondientes parámetros una vez estandarizadas y encontramos:

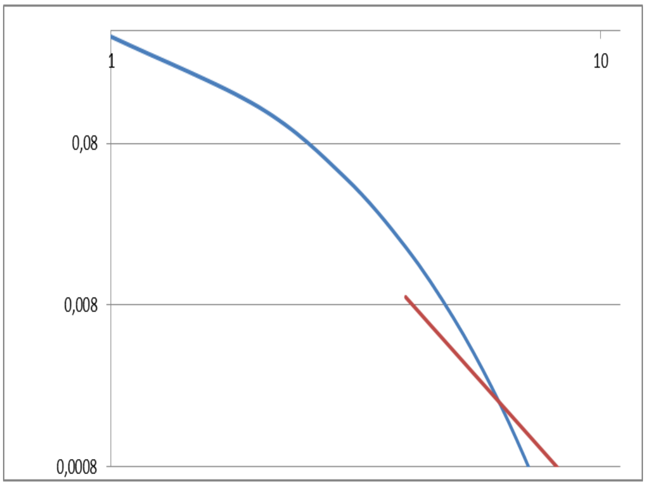
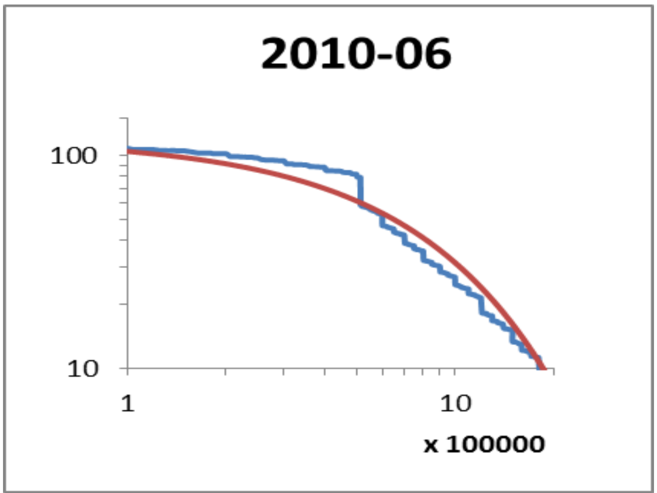


Figura 2: Distribuciones. La primera fase corresponde a una distribución tipo Boltzmann-Gibbs (curva en azul) y la segunda es de tipo Pareto (recta en rojo). Fuente: Elaborado por los autores

En la gráfica se puede observar las dos fases, la dominada por la distribución de Boltzmann-Gibbs (Azul), la cual abarca la mayor parte de la gráfica y corresponde a ingresos bajos y medianos. La fase con los más altos ingresos tiene un comportamiento diferente con una distribución tipo Pareto.

Este tipo de comportamiento con diferentes fases se ha corroborado en diversos sistemas económicos a nivel mundial, resultado que ha sido reconocido como uno de los más interesantes que se han derivado en la econofísica en los pocos años de su existencia. Resulta entonces interesante preguntarse si el sistema económico colombiano muestra un comportamiento similar al de otros países tales como Alemania, Estados Unidos, India, entre otros.



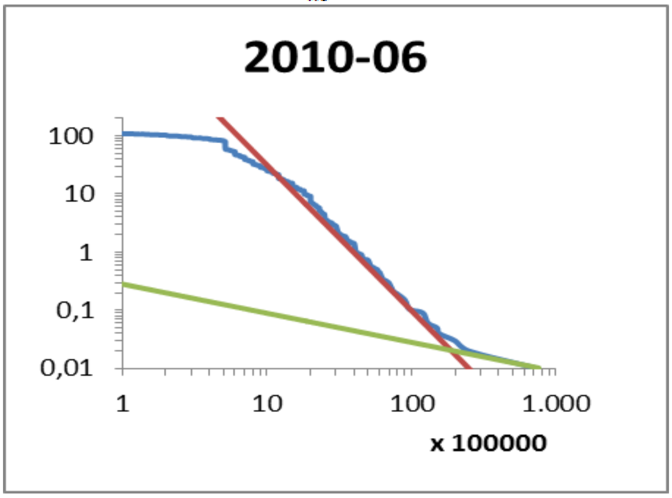


Figura 3: Comparación. La función acumulada (curva azul) en diferentes regiones se compara en la gráfica de la izquierda con una distribución exponencial (curva roja) y en la gráfica de la derecha con dos distribuciones de potencias. La recta roja corresponde a una potencia de 2.5 y la verde a 0.5. Fuente: Elaborado por los autores.

En la figura 3 se muestra primero la región que puede ser aproximada con una distribución exponencial. Esta corresponde aproximadamente al 90% de los individuos entrevistados. En la segunda gráfica se muestran dos rectas que reproducen la función de probabilidad acumulada en dos diferentes regiones que representan cerca del 10% de los entrevistados con los más altos ingresos. De esta manera vemos que esta parte de la gráfica corresponde a dos diferentes distribuciones de Pareto. Las diferentes pendientes de las rectas provienen de diferentes índices de Pareto.

CONCLUSIONES:

1. El uso apropiado de las matemáticas permite obtener resultados interdisciplinarios.
2. Es posible aplicar termodinámica estadística para generar sistemas económicos hipotéticos.
3. El sistema económico colombiano puede ser considerado en equilibrio estadístico.
4. La distribución del ingreso en Colombia presenta dos fases: La de Boltzmann-Gibbs correspondiente a los menores ingresos en el 90% de la población y la de Pareto con dos parámetros diferentes en el 10% de la población y que corresponde a los ingresos más altos.

RECURSOS BIBLIOGRAFICOS

• Stanley, H. E., et al., 1996, "Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics," Physica A 224, 302–321
• Chakrabarti, B. K., 2005, "Econophys-Kolkata: a short story," in Chatterjee, Yarlagadda, and Chakrabarti, 2005, Econophysics of Wealth Distributions, pp. 225–228.
• Chakrabarti, B. K., A. Chakraborti, and A. Chatterjee, 2006, Eds., Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives _Wiley-VCH, Berlin_.
• E. Samanidou, E. Zschischang, D. Stauffer, and T. Lux, "Agentbased models of financial markets," Reports on Progress in Physics, vol. 70, no. 3, article R03, pp. 409–450, 2007.
• V. M. Yakovenko, "Econophysics, statistical mechanics approach to," in Encyclopedia of Complexity and System Science, R. A. Meyers, Ed., Springer, New York, NY, USA, 2009.
• A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money", The European Physical Journal B, v. 17, pp. 723-729 (2000), pdf.
• Evidence for the exponential distribution of income in the USA Adrian Dr˘agulescu and Victor M. Yakovenko . Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742-4111, USA
• Temporal evolution of the "thermal" and "superthermal" income classes in the USA during 1983–2001 A. Christian Silva and Victor M. Yakovenko. Department of Physics, University of Maryland - College Park, MD 20742-4111, USA.received 13 September 2004; accepted in final form 9 November 2004 published online 22 December 2004
• Dragulescu and y Yakovenko Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures .2003.
• Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income, Victor M. Yakovenko and J. Barkley Rosser, Jr. Reviewsof Modern Physics. 81, 1703 – Published 2 December 2009
• A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures", AIP Conference Proceedings 661 (2003) 180
• Study of the Personal Income Distribution in Australia. Anand Banerjee a, Victor M. Yakovenko a, T. Di Matteo baDepartment of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland.20742-4111, USA bDepartment of Applied Mathematics, The Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia
• V. M. Yakovenko, Econophysics, Statistical Mechanics Approach to, (2007) arXiv:q-fin.ST /0709.3662
• H. Quevedo and M. N. Quevedo, Statistical Thermodynamics of Economic Systems, J. Therm. 2011, 676495 (2011).

DISCURSOS RELACIONADOS CON LA NOCION DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Gloria Inés Neira Sanabria *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*
gneira@udistrital.edu.co

***Abstract*— In this paper, a trace in the literature is made by different points of views of the notion of epistemological obstacle, views and approaches that have become in theories and trends of some researchers and schools, which have led to the development of discourses linked to it such as conflicts, errors, difficulties, misconcepciones, and its different discursive categories characterized them as epistemological origin semiotic, cultural, didactic... do differents syntax, various nominations, similar semantics? In order to explain the difficulties of understanding in mathematics that we see in the students every day, it has been agreed these problems do not depend only on the lack of experience with math, or the skill or skills, or the idiosyncrasies of his thought still immature, but also the nature of mathematical concepts and of the culture in which these have been developed. That's when the concept of "epistemological obstacle" of Bachelard becomes very important, since the students' thinking seems to suffer from certain epistemological obstacles to be overcome if it wants to establish a real understanding in mathematics. It opens the door for research on epistemological obstacles in mathematics education, forms of understanding based on something unconscious thought patterns culturally acquired beliefs questioned about the nature of mathematics created questions as: is it an epistemological obstacle a mistake, a misunderstanding, a misunderstanding, or just a certain way of knowing what works in certain restricted domains but reveals inadequate in others?**

***Keywords*—*epistemological* obstacle, mathematics education, speeches. understandíng,**

***Resumen*— Se presentan diferentes tendencias relacionadas con la noción de obstáculo epistemológico, miradas y enfoques que han devenido en teorías y tendencias propias de algunos investigadores y escuelas y que han conducido al desarrollo de variados discursos como conflictos, errores, dificultades, mis-concepciones, caracterizándolos como de origen epistemológico, semiótico, cultural, didáctico… ¿Sintaxis distintas, Nominaciones diversas, Semánticas similares? Ante la necesidad de explicar las dificultades de comprensión en matemáticas que se evidencian en los estudiantes, partiendo de que no dependen solamente de falta de experiencia con las matemáticas, ni de las habilidades o destrezas, que puedan o no tener los estudiantes, ni de la idiosincrasia de su pensamiento aún inmaduro, sino también y sobre todo, del simbolismo, del lenguaje, de la semiótica discursiva inherente a las representaciones, es decir, de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual estos han sido desarrollados, se acude entonces al concepto de "obstáculo epistemológico" de Bachelard puesto que el pensamiento de los estudiantes parece padecer de ciertos obstáculos epistemológicos, concebidos como formas de comprensión basadas en algo inconsciente, esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas, obstáculos que deben ser superados si se quiere que emerja una real comprensión en matemáticas. Y se plantea como interrogante: ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos pero se revela inadecuada en otros?**

***Palabras clave*— obstáculo epistemológico, educación matemática, Comprension, discursos.**

I. INTRODUCCIÓN

El término obstáculo epistemológico fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard, quien postuló que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver. (1938/2004: 15).

La noción de obstáculo epistemológico, tomada de Bachelard, hizo su aparición en la educación matemática gracias a Brousseau en 1976, quien veía en particular en la noción de obstáculo el medio de cambiar el estatuto del error, que no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido. Transferir este concepto de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza semiótica y discursiva de las matemáticas.

Sierpinska (1994) explica la comprensión en matemáticas basada precisamente en la teoría de los obstáculos epistemológicos. El primer supuesto que enuncia de los obstáculos epistemológicos es que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro hay necesidad de integración y reorganización. Afirma que la cognición no es un proceso acumulativo, pues las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos. El otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos que enuncia, es que los obstáculos epistemológicos son inevitables: su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Así mismo postula que la comprensión no es independiente del desarrollo, ni del lenguaje en el cual se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual ella se socializa. Sus creencias, normas cognitivas, visiones de mundo, pueden ser todas fuentes de obstáculos para comprender la estructura teórica del conocimiento científico. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y lo que sigue. Propone su ya conocida lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite, de los que se concluye que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculos epistemológicos, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, tal como había sido postulado por Bachelard y por Brousseau en su conocida "arqueología de los obstáculos epistemológicos".

Por otra parte, Michele Artigue (1995) utiliza el término «concepción», término que, responde a dos necesidades distintas: Por un lado pone en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferencia las representaciones y modos de tratamiento que les son asociados a ellas, y pone en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas. Por otra parte, ayuda al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica propiciada por los modelos empiristas del aprendizaje, y le permite diferenciar el saber que el profesor va a transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno.

Otra tendencia asociada que se encuentra al revisar la literatura es la mirada dirigida hacia la noción de error. Según Rico (1998:75) se concibe el error como parte constituyente de la adquisición del conocimiento: Rico (1998:84) enuncia algunas características generales afirmando que pueden ser de dos tipos: sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención y lapsus ocasionales, que tienen relativamente poca importancia. No aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, y al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento y llevarlo a la comprensión.

De otro lado, el profesor Luis Radford (2007), desde una aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático sostiene que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos al conocimiento debe enmarcarse no sólo por medio de aquello que hacemos ahora y cómo lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguaje, artefactos, libros, monumentos,... El conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. La historia nos hace conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas.

Aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no cultural, no didáctica, no onto-genética: lo es por su propia naturaleza epistémica intrínseca. Según lo cual Radford (2007), interpreta que la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio. Se pregunta qué tan fuerte puede ser el vínculo del obstáculo epistemológico y los factores sociales, y se atreve a concluir que no puede ser tan fuerte, pues si lo fuera la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la tipología de obstáculos (onto-genético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido. Si el término "obstáculo epistemológico" refiere un tipo de conocimiento parcial, puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual, un conocimiento que sirve para resolver ciertos problemas, pero que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de ese tipo de problemas, entonces para él la cuestión fundamental a tratar concierne a la explicación de la naturaleza del camino, que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro encuadramiento temporal y cultural.

Desde el Enfoque Onto-semiótico (EOS) de la Instrucción y Cognición Matemática, Juan Díaz Godino (2003) habla de conflictos semióticos y los define como: "Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa". Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos. Aclara que si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo, en tanto que cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Este desarrollo discursivo concibe conflicto como una noción más general que la de obstáculo, y algo más específica que la de "error" o "dificultad", enfatizando que la idea de conflicto sugiere un origen (semiótico) de tales errores o dificultades, y dota a tales nociones de un sentido pragmático mediado por la actividad y la práctica. A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos.

La complejidad semiótica asociada a la práctica matemática es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial, e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

Finalmente encontramos en nuestro recorrido al profesor Bruno D'Amore (2007) quien explica los conflictos cognitivos en términos de imágenes: un estudiante ha podido en el transcurso del tiempo, adquirir un concepto y haberse hecho una imagen, imagen misma que pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas, pero entonces ella se revela inadecuada respecto a otra del mismo concepto… se crea así un conflicto entre la imagen que tenía el estudiante y que la creía válida, in cuestionada (verdadera), y la nueva, que generalmente amplía los limites o profundiza la aplicabilidad del concepto. Asocia la mis concepción o concepto errado afirmando que para alcanzar la construcción de un concepto es necesario pasar por una mis concepción momentánea.

Concluye que la carrera escolar de un individuo en las matemáticas, se construye por el paso o tránsito de mis concepciones a concepciones correctas, luego la mis concepción es una concepción momentánea no correcta, en espera de consolidarse cognitivamente más elaborada, ellas no pueden ser eliminadas, ni son un daño ni un error, parecen ser un momento necesario y delicado hacia el concepto correcto.

II. CONCLUSIONES

En la conceptualización de obstáculos planteamos como supuesto una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente pero dificultante que son los obstáculos. En el camino hacia el conocimiento, no se trata de descartar los conocimientos, modelos y teorías previos sino de tener conciencia, de ver cuándo se usan, por qué son potentes, qué peligros tienen y en qué casos no son aplicables. Los obstáculos epistemológicos no son obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión: ellos son obstáculos para un cambio conceptual, paradigmático. Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación o problema y esperar que emerjan toda clase de dificultades, malas comprensiones y obstáculos, y precisamente ésta es una de nuestras principales tareas como profesores, ayudar a los estudiantes a superarlos, a objetivar y ser conscientes de las diferencias, entonces los estudiantes quizá puedan hacer sus propias reorganizaciones.

La razón por la cual los formadores de profesores, los educadores matemáticos de cualquier nivel de enseñanza deben interesarse por estas teorías es porque el patrón del desarrollo conceptual de la niñez a la adolescencia parece ser recapitulado cada vez que un estudiante se embarca en el proyecto de comprensión de algo nuevo o en la construcción de un nuevo concepto. Es entonces cuando los discursos asociados a la noción de obstáculo epistemológico pueden emerger y devenir en campos didácticos al provocar y analizar prácticas, formas de participación, preguntas, recapitulaciones una y otra vez en esa dinámica de interacciones que es la educación en general y la educación matemática en particular.

REFERENCIAS

[1] Artigué, M. La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática", Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. 1995. Una Empresa Docente. Pedro Gómez, editor.

[2] Bachelard, G. La Formación del espíritu científico. Siglo XXI editores, vigésimo quinta edición en español, 2004. (Obra original publicada en francés en 1938).

[3] Brousseau (1976) La problématique et l'enseignement des Mathématiques, XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve

[4] Delgado,C. Tesis Doctoral : Estudio Microgenético de Esquemas Conceptuales asociados a definiciones de Límite y Continuidad en universitarios de primer curso. Universitat Autònoma de Barcelona, 1998

[5] Godino J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. Granada: Universidad de Granada

[6] Radford, L., D'Amore B. y Bagni, G. Obstáculos Epistemológicos y Perspectiva Socio-cultural de la matemática. Cuadernos del seminario en educación, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2007

[7] Rico, L. Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Educacion Matematica. "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). Colombia, 1998

[8] Sierpinska, A. Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. The Falmer Press, Great Britain, 1994 E. Alarcos Llorach, *Gramática de la Lengua Española*, Madrid: Editorial Espasa Calpe, 1999.

PRÓXIMO EVENTO:

ACTA SIMPOSIO MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Publicación de la Universidad Antonio Nariño

Editor Gerardo Chacón

gerardoachg@uan.edu.co