Acta MEM 2023. Volumen 1, N°2

XIII SIMPOSIO DE MATEMÁTICA Y Educación Matemática

XII CONGRESO INTERNACIONAL DE Matemática asistida por Computador

III SIMPOSIO DE COMPETICIONES Matemáticas

Modalidad híbrida: 16 al 18 de febrero de 2023

XIII Simposio de Matemática y Educación Matemática y el XII Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador
Acta MEM 2023. Volumen 1, N°. 2

Diana Isabel Quintero Suica: Universidad Antonio

Nariño

Miembros

Gerardo Chacón Guerrero

Rafael Ignacio Escamilla Forero

Lorena Ruiz Serna

Diana Pérez Duarte

Comité Científico

Mary Falk de Losada- Universidad Antonio Nariño,

Grace Vesga -Universidad Antonio Nariño,

Ciro Anzola - Universidad Antonio Nariño,

Luis Fernando Mariño - Universidad Francisco de Paula Santander

Edgar Balaguera - Universidad Santo Tomás,

Roberto Carlos Torres- Universidad del Magdalena

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez - Universidad Antonio Nariño,
Gerardo Chacón - Universidad Antonio Nariño,

Rafael Sánchez Lamoneda - Universidad Antonio Nariño,

Diana Pérez Duarte – Universidad Antonio Nariño,

Miguel Ángel Borges - Universidad Antonio Nariño, Colombia

PRESENTACIÓN

Este volumen especial de Acta MEM 2023 recoge trabajos presentados por estudiantes del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño en asignaturas de dicho doctorado y en los grupos de estudio del Simposio de Matemáticas y Educación Matemática.

El Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño ha ido consolidando diversas actividades dentro las que destaca el referido simposio que cada año acoge investigadores de gran renombre en el área y numerosas contribuciones que son presentadas y discutidas en él.

Los estudiantes del doctorado, que ya tiene una trayectoria de más de 10 años, provienen de diversas regiones de Colombia y su experticia investigativa encontrará en las páginas de esta publicación la oportunidad de de dar sus primeros pasos en la publicación de artículos científicos que correspondan a investigaciones en desarrollo o a insumos para el trabajo de investigación de quienes se acercan al área de Educación Matemática.

Abrimos pues, con este número de nuestra publicación una nueva etapa llamada a sentar las bases para la creación de una revista propia del programa de doctorado a partir de artículos que son testimonios recogidos en la formación de nuestros estudiantes.

Gerardo Chacón

Editor en jefe

Bogotá, Colombia. Enero de 2024.

Tabla de contenido

ARTÍCULOS COMPLETOS

Explorando la relación entre Criptografía, Educación Matemática y Comercio nternacional: Implicaciones y Beneficios

Alexandra Suárez Escobar
Universidad Antonio Nariño
asuarez97@uan.edu.co

Abstract- ***Cryptography is a relevant topic for International Business students, as it provides fundamental tools and concepts to ensure the security and integrity of information in digital environments. The proposal is to introduce students to basic concepts, such as confidentiality, data integrity and authentication.***

This article explores different aspects of cryptography, such as substitution encryption, which involves replacing letters or symbols with others, and briefly discusses methods such as the Caesar cipher and the Vigenère cipher, public and private key encryption, and how they are used to encrypt and decrypt messages.

A highlight is the Diffie-Hellman algorithm, which allows two parties to establish a securely shared key over an insecure channel. In addition, the topic of digital signature, its importance in guaranteeing the authenticity and integrity of electronic documents, is included and algorithms such as RSA and DSA are presented.

Another interesting approach is to analyze how cryptography concepts are applied in international trade, discussing security protocols used in electronic transactions, such as SSL/TLS and PGP. The relationship between cryptography and blockchain technology is also explored, and how cryptography ensures the security and immutability of data in blockchains.

Finally, it is relevant to address potential threats to cryptographic security and cryptanalysis techniques used to break cryptographic algorithms, such as brute force attacks and differential cryptanalysis.

In summary, it is intended to provide an overview of the topics that can be developed in a mathematics I course on cryptography for international business students, providing a solid foundation and activity model for understanding the principles and applications of cryptography in today's world.

keywords— **Cryptography, International Trade, Encryption, Digital Security, Crypto-arithmetic, Mathematics Education.**

Resumen— **La criptografía es un tema relevante para los estudiantes de Comercio Internacional, ya que proporciona herramientas y conceptos fundamentales para garantizar la seguridad y la integridad de la información en entornos digitales. La propuesta es introducir a los estudiantes en conceptos básicos, como la confidencialidad, la integridad de los datos y la autenticación.**

En el presente artículo se exploran diferentes aspectos de la criptografía, como el cifrado de sustitución, que implica reemplazar letras o símbolos por otros, y se abordan brevemente métodos como el cifrado César y el cifrado de Vigenère, el cifrado de clave pública y privada, y cómo se utilizan para cifrar y descifrar mensajes.

Un aspecto destacado es el algoritmo de Diffie-Hellman, que permite a dos partes establecer una clave compartida de forma segura sobre un canal inseguro. Además, se incluye el tema de la firma digital, su importancia para garantizar la autenticidad e integridad de los documentos electrónicos, y presentar algoritmos como RSA y DSA.

Otro enfoque interesante es analizar cómo se aplican los conceptos de criptografía en el comercio internacional, discutiendo protocolos de seguridad utilizados en transacciones electrónicas, como SSL/TLS y PGP. También se explora la relación entre la criptografía y la tecnología blockchain, y cómo la criptografía asegura la seguridad y la inmutabilidad de los datos en las cadenas de bloques.

Finalmente, es relevante abordar las posibles amenazas a la seguridad criptográfica y las técnicas de criptoanálisis utilizadas para romper los algoritmos criptográficos, como los ataques de fuerza bruta y el criptoanálisis diferencial.

En resumen, se pretende proporcionar una visión general de los temas que se pueden desarrollar en un curso de matemáticas I sobre criptografía para estudiantes de comercio internacional, brindando una base sólida y un modelo de actividad para comprender los principios y las aplicaciones de la criptografía en el mundo actual.

Palabras clave— **Criptografía, Comercio Internacional, Cifrado, >Seguridad Digital, Cripto-aritmética, Educación Matemática.**

I. INTRODUCCIÓN

la criptografía, es fundamental en el ámbito de la seguridad digital, desempeña un papel crucial en el contexto del comercio internacional, en respuesta a un mundo cada vez más conectado digitalmente, donde salvaguardar la confidencialidad, integridad y autenticidad de la información se ha vuelto imprescindible; ofertando las herramientas y técnicas necesarias para proteger los datos sensibles durante las transacciones comerciales en el ámbito nacional e internacional.

Referentes de impacto en este campo incluyen algoritmos como RSA y DSA, el cifrado de clave pública y privada, el protocolo SSL/TLS para transacciones seguras en línea, y el concepto de firma digital. En este sentido, comprender los fundamentos de la criptografía y su aplicación en el comercio internacional es esencial para garantizar la seguridad de los datos y promover la confianza en el entorno digital actual.

A continuación, se darán más detalles en relación con el Marco de Referencia base para el desarrollo de la actividad adelantadas con los estudiantes del curso de Matemáticas I de Comercio Internacional y la lectura analítica de los correspondientes resultados.

II. MARCO DE REFERENCIA

Realizar un estudio de Criptografía con estudiantes de matemáticas I de la carrera de Comercio Internacional resulta relevante para proporcionales conocimientos y habilidades necesarias en el contexto actual de seguridad y tecnología en el comercio global. Les permite comprender la importancia de la seguridad criptográfica, cumplir con los requisitos normativos, ser competitivos en el mercado y desarrollar habilidades matemáticas y de pensamiento crítico necesarias para enfrentar los desafíos del mundo empresarial actual.

A continuación, se presenta una breve descripción de los refrentes teóricos y conceptuales fundamentales para el desarrollo de la actividad propuesta.

A. Historia

La criptografía ha desempeñado un papel vital a lo largo de la historia, desde las técnicas utilizadas en el antiguo Egipto y el cifrado César de Julio César en el Imperio Romano, hasta los avances modernos en la era digital. En el Renacimiento, Leon Battista Alberti introdujo el cifrado de Vigenère, y posteriormente surgieron sistemas más complejos durante la Segunda Guerra Mundial, como la máquina Enigma utilizada por los alemanes. Durante esta época, criptoanalistas aliados, como Alan Turing, lograron descifrarla. Con el advenimiento de la era digital, la criptografía experimentó un cambio significativo, con algoritmos como RSA y Diffie-Hellman estableciendo las bases del cifrado de clave pública y privada utilizado en aplicaciones de seguridad actuales. [2],[3],[4]

B. Criptografía

La palabra criptografía proviene en un sentido etimológico del griego Kriptos =ocultar, Graphos= escritura, lo que significaría ocultar la escritura, o en un sentido más amplio sería aplicar alguna técnica para hacer inteligible un mensaje. [7]

La criptografía es una ciencia que proviene de una rama de las matemáticas que fue iniciada por el matemático Claude Elwood Shannon en 1948, denominada “Teoría de la información. Esta rama de las ciencias se divide en; “Teoría de Códigos” y en “Criptología”. Y a su vez la Criptología se divide en Criptoanálisis y Criptografía, como se muestra en la Fig. 1. [7]

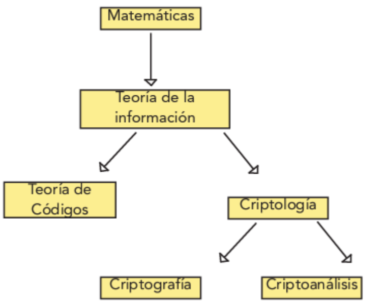


Fig. 1. Origen de la Criptografía

La criptografía se encarga de diseñar funciones o dispositivos capaces de transformar mensajes legibles a mensajes cifrados (cifrar) y su transformación inversa (descifrar).

El criptoanálisis es la ciencia que estudia los métodos que se utilizan para recuperar los mensajes, encontrando la clave con que fueron cifrados. [7]

C. Criptografía y Educación Matemática

La criptografía se define como el estudio y la práctica de técnicas para proteger la información y los datos mediante el cifrado y el descifrado de mensajes. Implica el uso de algoritmos y claves para convertir la información en un formato ilegible para aquellos que no poseen la clave correspondiente, asegurando así la confidencialidad, integridad y autenticidad de los datos. [5]

La criptografía presenta una relación estrecha con la educación matemática, ya que muchos de los fundamentos y conceptos de la criptografía se basan en principios matemáticos. Al introducir la criptografía en la educación matemática, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de razonamiento lógico, comprensión de algoritmos y aplicaciones prácticas de conceptos matemáticos. [6] A través del estudio de técnicas criptográficas, los estudiantes pueden explorar conceptos como el cifrado de sustitución, el cifrado de clave pública y privada, el análisis de criptosistemas y la teoría de números aplicada. Además, el estudio de la criptografía en la educación matemática puede ayudar a fomentar habilidades de resolución de problemas y promover la conciencia sobre la importancia de la seguridad de la información en el entorno digital actual.

D. Confidencialidad, Integridad de los Datos y autenticación

La confidencialidad se refiere a la protección de la información sensible y su restricción a personas no autorizadas. Se busca garantizar que solo las partes involucradas en la comunicación tengan acceso a la información relevante [3]Cifrado de datos.

La integridad de los datos se refiere a la garantía de que los datos no se han alterado, dañado o modificado de manera no autorizada durante su almacenamiento, transmisión o procesamiento [3]. Para asegurar la integridad de los datos, se utilizan técnicas criptográficas, como los códigos de detección y corrección de errores, así como funciones hash, que generan un resumen único para los datos y permiten verificar si han sido modificados.

La autenticación se refiere al proceso de verificar la identidad de un individuo, sistema o entidad. Se utiliza para garantizar que las partes involucradas en una comunicación sean quienes dicen ser y no impostores o entidades maliciosas [3]. La autenticación se logra mediante el uso de técnicas criptográficas, como las firmas digitales, que utilizan claves criptográficas para verificar la integridad y autenticidad de los datos y garantizar que provengan de la entidad correcta.

E. Cifrado de Sustitución

El cifrado de sustitución, es una técnica criptográfica que implica reemplazar letras o símbolos por otros. El cifrado de sustitución es una de las técnicas criptográficas más antiguas y simples utilizadas en la historia de la criptografía [9]. Dos métodos comunes de cifrado de sustitución son el cifrado César y el cifrado de Vigenère.

El cifrado César es un tipo de cifrado de sustitución que consiste en desplazar cada letra del mensaje original un número fijo de posiciones en el alfabeto. (Paredes, G. G. 2006) Por ejemplo, con un desplazamiento de 3, la letra "A" se convertiría en "D", "B" en "E" y así sucesivamente. Aunque el cifrado César es fácil de entender y aplicar, es vulnerable a ataques de fuerza bruta debido a su limitado espacio de clave y al hecho de que cada letra siempre se cifra de la misma manera, como se muestra en la Fig. 2.

Alfabeto	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Alfabeto	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Así con este alfabeto podemos cifrar el siguiente mensaje:
Mensaje original: MENSAJE DE PRUEBA
Mensaje cifrado: OHPVDM GH SUXHED

Fig. 2. Cifrado de Cesar

El cifrado de Cesar introdujo un concepto muy usado en matemáticas y específicamente en criptografía “El módulo”.

El módulo es una operación binaria que se realiza en los enteros positivos representado como se observa (1):

$$c = a mod b \qquad (1)$$

Donde a, b y c son enteros positivos. El valor de “c” al realizar la operación es igual al resido de dividir “a” entre “b”.

Teniendo en cuenta lo anterior es posible escribir matemáticamente el cifrado de Cesar como se ilustra en la Fig. 3. [7].

Para cifrar

Ci = (3 + *Mi*) mod 27
con i= 0,1,...,n ; n = número de letras del mensaje
donde *Ci* es la letra cifrada y *Mi* es la letra a cifrar
el alfabeto comienza con A = 0 , B=1, ..., Z=26

Para descifrar

Mi = (*Ci* - 3) mod 27 = (*Ci* + 24) mod 27
con i= 0,1,...,n ; n = número de letras del mensaje
donde *Ci* es la letra cifrada y *Mi* es la letra a cifrar
el alfabeto comienza con A = 0 , B=1, ..., Z=26

Fig. 3. Cifrado de Cesar escrito de forma matemática

El cifrado de Vigenère, por otro lado, mejora la seguridad del cifrado de sustitución mediante el uso de una clave que consta de varias letras; cada letra de la clave se utiliza para desplazar la letra correspondiente del mensaje original. La clave se repite de manera cíclica a lo largo del mensaje. Esto proporciona una mayor variabilidad y complejidad al cifrado, dificultando los ataques de fuerza bruta. Sin embargo, el cifrado de Vigenère todavía puede ser vulnerado mediante análisis estadístico y otros métodos criptoanalíticos.

Matemáticamente el cifrado de Vigenère se puede expresar como se representa en (2) [10]

$$C_i = S_i + K_{imodm}(modn) \qquad (2)$$

Para descifrar el texto conociendo la clave se utiliza (3)

$$C_i = S_i - K_{imodm}(modn) \qquad (3)$$

Es importante destacar que tanto el cifrado César como el cifrado de Vigenère son ejemplos de cifrados de sustitución mono alfabéticos, lo que significa que cada letra se reemplaza por otra letra del mismo alfabeto. Estos cifrados son relativamente simples y se utilizan a menudo como ejemplos introductorios en la enseñanza de la criptografía [9].

F. Cifrado de Clave pública y privada

El cifrado de clave pública y privada, también conocido como cifrado asimétrico, es un sistema criptográfico que utiliza dos claves diferentes pero relacionadas matemáticamente: una clave pública y una clave privada [9]. Este tipo de cifrado fue revolucionario, ya que resolvió el desafío de compartir claves de forma segura en comunicaciones cifradas.

En el cifrado asimétrico, la clave pública se utiliza para cifrar mensajes y la clave privada correspondiente se utiliza para descifrarlos. La clave pública se distribuye ampliamente y está disponible para cualquier persona que desee enviar mensajes cifrados al propietario de la clave Por otro lado, la clave privada se mantiene en secreto y solo el propietario tiene acceso a ella.

Cuando alguien desea enviar un mensaje cifrado al propietario de la clave pública, utiliza la clave pública para cifrar el mensaje. Una vez que el mensaje cifrado llega al destinatario, este lo descifra utilizando su clave privada correspondiente [9]. La clave privada es única y matemáticamente relacionada con la clave pública, lo que garantiza que solo el destinatario pueda descifrar el mensaje.

La fortaleza del cifrado de clave pública y privada radica en la dificultad computacional de calcular la clave privada a partir de la clave pública. Este proceso es tan complejo que se considera computacionalmente inviable, brindando así un alto nivel de seguridad para las comunicaciones, Además, este sistema permite el establecimiento de canales seguros de comunicación sin la necesidad de compartir previamente una clave secreta.

El cifrado de clave pública y privada se utiliza ampliamente en aplicaciones de seguridad, como la firma digital, el intercambio seguro de claves y la autenticación de servidores web [9]. Este tipo de cifrado ha sido fundamental en el desarrollo de protocolos de seguridad en Internet y en la protección de la confidencialidad e integridad de los datos.

RSA (Rivest, Shamir y Adleman) es un algoritmo de cifrado asimétrico desarrollado en 1977 por los anteriormente citados, consiste en seleccionar dos números grandes p y q. A continuación, los multiplica obteniendo el número $m = p * q$. Luego es posible calcular $f(m) = (p-1)(q-1)$, así resulta fácil encontrar un número “k” co-primo con $\varphi(m)$ y calcular, mediante el algoritmo de Euclides, el inverso del módulo $\varphi(m)$, que representaremos por k´. Con la información anterior se transformará la información en una secuencia de clases de restos modulo m (una sucesión de números entre 0 y m-1) y realizará la encriptación sin más que elevar módulo m cada clase a la potencia k-ésima.[11].

G. Algoritmo de Diffie-Hellman

El algoritmo de intercambio de claves de Diffie-Hellman es un protocolo criptográfico que permite a dos partes, Alice y Bob, establecer una clave compartida de forma segura sobre un canal de comunicación inseguro [4] Fue desarrollado en 1976 por Whitfield Diffie y Martin Hellman, y se considera uno de los hitos fundamentales en el campo de la criptografía moderna.

El algoritmo de Diffie-Hellman se basa en el problema matemático conocido como el "problema del logaritmo discreto". En términos simplificados, el algoritmo permite que Alice y Bob generen de manera independiente una clave pública y una clave privada. La clave pública se comparte a través del canal de comunicación inseguro, mientras que la clave privada se mantiene en secreto.

El proceso de intercambio de claves se lleva a cabo de la siguiente manera: Alice y Bob acuerdan previamente un conjunto de parámetros públicos, incluyendo un número primo grande y una raíz primitiva módulo ese número primo. Cada parte elige de manera aleatoria un número secreto, que se mantiene en privado.

A continuación, Alice y Bob realizan cálculos utilizando sus claves privadas y los parámetros públicos acordados. A partir de estos cálculos, obtienen un valor compartido conocido como "secreto compartido" o "clave compartida". A pesar de que las claves públicas y los cálculos realizados se transmiten a través del canal inseguro, el secreto compartido no se puede derivar fácilmente sin conocer las claves privadas individuales.

El algoritmo de Diffie-Hellman se basa en el principio de que el cálculo del logaritmo discreto es computacionalmente difícil, lo que significa que no hay un algoritmo eficiente conocido para resolverlo en un tiempo razonable. Esto asegura que incluso si un atacante intercepta las claves públicas y los cálculos realizados, le resultaría extremadamente difícil determinar la clave compartida sin conocer las claves privadas individuales.

El algoritmo de Diffie-Hellman ha sido ampliamente utilizado en protocolos de seguridad, como TLS/SSL, para establecer claves de sesión seguras en comunicaciones cifradas. Aunque el algoritmo en sí mismo no proporciona autenticación de las partes involucradas, puede combinarse con otros protocolos criptográficos para lograr la autenticación y establecer comunicaciones seguras.

H. firma digital como RSA y DSA

La firma digital es una técnica criptográfica utilizada para garantizar la autenticidad, integridad y no repudio de documentos electrónicos [9]. A diferencia de una firma manuscrita en papel, una firma digital es una representación matemática única y específica de un documento, que se genera utilizando algoritmos criptográficos.

La firma digital se basa en el uso de claves públicas y privadas. El remitente del documento utiliza su clave privada para generar una firma digital única y exclusiva para ese documento. Esta firma digital se adjunta al documento y se puede verificar utilizando la clave pública correspondiente al remitente.

Al verificar una firma digital, se utiliza la clave pública del remitente para descifrar la firma digital y obtener una representación matemática del documento original [9]. Si la firma digital se puede descifrar correctamente y coincide con el documento original, se puede inferir que el documento no ha sido modificado y proviene del remitente auténtico.

Dos algoritmos comunes utilizados en la firma digital son RSA (Rivest-Shamir-Adleman) y DSA (Digital Signature Algorithm). RSA es un algoritmo de clave pública que se basa en la factorización de números primos grandes. DSA, por otro lado, es un algoritmo de firma digital basado en la dificultad computacional del problema del logaritmo discreto [9]. Ambos algoritmos han demostrado ser seguros y se utilizan ampliamente en aplicaciones de firma digital.

La firma digital desempeña un papel crucial en la autenticación de documentos electrónicos, ya que proporciona una forma segura de verificar la identidad del remitente y garantizar la integridad del contenido [9] Además, la firma digital permite el no repudio, ya que una vez que un documento ha sido firmado digitalmente, el remitente no puede negar haberlo enviado.

I. Criptografía y blockchain

La tecnología blockchain ha revolucionado la forma en que se almacenan y gestionan los datos en diversos sectores, desde las transacciones financieras hasta la gestión de la cadena de suministro. En el corazón de la tecnología blockchain se encuentra la criptografía, que juega un papel fundamental en garantizar la seguridad, privacidad y la integridad de los datos almacenados en las cadenas de bloques.

La criptografía en el contexto de blockchain se utiliza para lograr varios objetivos clave. Uno de ellos es la autenticación de las transacciones. Cada transacción registrada en la cadena de bloques es criptográficamente firmada utilizando claves privadas y públicas, lo que permite verificar la autoría de las transacciones y garantizar que provienen de una fuente legítima [12]

Además, la criptografía se utiliza para garantizar la integridad de los datos en la cadena de bloques. Cada bloque de datos se genera utilizando una función hash criptográfica, que produce una firma digital única para ese bloque. Cualquier alteración de los datos dentro del bloque resultaría en un cambio en la firma, lo que permitiría detectar cualquier intento de manipulación de los datos almacenados [13].

La criptografía también desempeña un papel importante en la seguridad de las transacciones en blockchain. Los mecanismos de criptografía de clave pública y privada se utilizan para asegurar que solo los participantes autorizados puedan acceder a los datos y realizar transacciones en la cadena de bloques. Estos mecanismos permiten la privacidad de los datos de los usuarios mientras se asegura la transparencia y la verificabilidad de las transacciones [14]

En resumen, la criptografía desempeña un papel esencial en la tecnología blockchain, garantizando la seguridad, privacidad e integridad de los datos almacenados en las cadenas de bloques. La autenticación de las transacciones, la integridad de los datos y la seguridad de las transacciones se logran mediante el uso de técnicas criptográficas como la firma digital, las funciones hash y los mecanismos de clave pública y privada.

III. Protocolos de Seguridad en Comercio Internacional

Los conceptos de criptografía desempeñan un papel fundamental en el ámbito del comercio internacional, especialmente en el contexto de las transacciones electrónicas. Estos conceptos se aplican para garantizar la confidencialidad, integridad y autenticidad de los datos durante las transacciones comerciales en línea.

Uno de los protocolos de seguridad más utilizados en el comercio internacional es SSL/TLS (Secure Sockets Layer/Transport Layer Security). SSL/TLS es un protocolo de comunicación que utiliza criptografía asimétrica y simétrica para establecer conexiones seguras entre un cliente y un servidor [9]. Utiliza certificados digitales para autenticar la identidad del servidor y cifra los datos transmitidos para garantizar su confidencialidad e integridad. SSL/TLS se utiliza ampliamente en sitios web de comercio electrónico, proporcionando un entorno seguro para las transacciones en línea.

Otro protocolo importante en el ámbito de la seguridad en el comercio internacional es PGP (Pretty Good Privacy). PGP es un protocolo de cifrado de clave pública y privada que se utiliza para cifrar, firmar digitalmente y autenticar correos electrónicos y otros documentos [15]. PGP permite a los usuarios asegurar sus comunicaciones y garantizar que solo los destinatarios previstos puedan acceder a los datos. Este protocolo se utiliza ampliamente en el ámbito empresarial y en el comercio internacional para proteger la confidencialidad de la información sensible y garantizar la autenticidad de las comunicaciones.

La aplicación de protocolos de seguridad en el comercio internacional es esencial para garantizar la protección de los datos y la confianza en las transacciones electrónicas. Estos protocolos, como SSL/TLS y PGP, permiten a las partes involucradas en el comercio internacional comunicarse y realizar transacciones de manera segura, protegiendo los datos confidenciales y evitando posibles ataques o manipulaciones [9].

G. *Amenazas a la seguridad y técnicas de criptoanálisis*

La seguridad criptográfica se enfrenta a diversas amenazas que buscan romper los algoritmos criptográficos y comprometer la confidencialidad e integridad de la información protegida. Los criptoanalistas utilizan técnicas y métodos avanzados para analizar y atacar los sistemas criptográficos en busca de vulnerabilidades y debilidades.

Una de las amenazas más comunes a la seguridad criptográfica es el ataque de fuerza bruta. En este tipo de ataque, el criptoanalista intenta probar todas las posibles claves hasta encontrar la correcta que descifre un mensaje cifrado [9]. Este proceso puede ser computacionalmente costoso y llevar mucho tiempo, especialmente cuando se utilizan claves largas y robustas. Sin embargo, los avances en la capacidad de procesamiento y la computación distribuida han aumentado la eficiencia de los ataques de fuerza bruta en ciertos contextos.

Otra técnica de criptoanálisis es el criptoanálisis diferencial. Esta técnica se basa en el análisis de diferencias en los valores de entrada y salida de una función criptográfica para extraer información sobre la clave [15]. El criptoanálisis diferencial busca patrones y correlaciones en los cambios de bits a medida que se realizan operaciones criptográficas, lo que puede revelar información sobre la clave utilizada. Este tipo de criptoanálisis requiere un conocimiento profundo del algoritmo criptográfico y puede ser muy efectivo para atacar ciertos cifrados.

Además del ataque de fuerza bruta y el criptoanálisis diferencial, existen otras técnicas de criptoanálisis, como el criptoanálisis lineal, el criptoanálisis algebraico y el criptoanálisis de canales laterales [9]. Cada técnica se enfoca en diferentes aspectos de los algoritmos criptográficos y busca aprovechar debilidades específicas para descifrar información protegida.

Es importante tener en cuenta que los sistemas criptográficos modernos se diseñan teniendo en cuenta estas amenazas y técnicas de criptoanálisis. Los algoritmos criptográficos se someten a rigurosas pruebas y análisis de seguridad para asegurarse de que sean resistentes a los ataques conocidos y se mantengan seguros [15]. Sin embargo, es fundamental mantenerse actualizado sobre los avances en criptoanálisis y adoptar buenas prácticas de seguridad para mitigar posibles riesgos.

IV. ACTIVIDAD: CÓDIGOS INDESCIFRABLES

La palabra criptografía es una combinación de dos vocablos griegos: Krypto, que significa “oculto” o “secreto”, y Grapho, que significa “escritura”. Así, la criptografía es el estudio de “escrituras secretas” o códigos.

1. Buscando la clave pública:

A. Elegir dos números primos de dos o tres cifras.

Sugerencia: En la computadora habilita el programa: https://www.wolframalpha.com/

B. Para la elección de los números primos escribe en el buscador “nextprime” y a continuación un número, el programa le entregará el siguiente número primo existente al número que se ha digitado.

C. Al primer número lo llamaremos “p” y al segundo lo llamaremos “q” y al producto de los dos lo llamaremos “m”. Diligenciar Tabla 1.

TABLA 1
NÚMEROS PRIMOS Y SU PRODUCTO

p	
q	
$m = p * q$	

Ahora calculamos y diligenciamos Tabla 2

TABLA 2
FUNCIÓN

$f(m) = (p-1)(q-1)$	

D. Buscaremos un número "K" primo relativo con $\varphi(m)$ tal que el MCD entre los dos sea igual a 1.(4)

$$(f(m), K) = 1 \qquad (4)$$

Sugerencia: en https://www.wolframalpha.com/ “escribe en el buscador (MCD y a continuación los dos números o GCD), si el MCD de los 2 números es 1 entonces decimos que son primos relativos.

La clave pública entonces es: (Diligencie la Tabla 3)

TABLA 3.
CLAVE PÚBLICA

m	
K	

2.Codificando el mensaje: “Sé feliz no aceptes menos”

Sugerencia: Hacer uso de la hoja de cálculo Excel para codificar el mensaje tomando como referencia la Fig. 4

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

Fig. 4. Sistema criptográfico de clave pública RSA

Al codificar hemos obtenido una cadena de números como se observa en la Fig. 5.

C	U	A	N	D	O	D	I	C	E	S	Q	U	E	E	S	D	I	F	I	C	I	L
13	31	11	24	14	25	14	19	13	15	29	27	31	15	15	29	14	19	16	19	13	19	22
S	I	G	N	I	F	I	C	A	Q	U	E	N	O	E	R	E	S	L	O			
29	19	17	24	19	16	19	13	11	27	31	15	24	25	15	28	15	29	22	25			
S	U	F	I	C	I	E	N	T	E	M	E	N	T	E	F	U	E	R	T	E		
29	31	16	19	13	19	15	24	30	15	23	15	24	30	15	16	31	15	28	30	15		
C	O	M	O	P	A	R	A	L	U	C	H	A	R	P	O	R	E	L	L	O		
13	25	23	25	26	11	28	11	22	31	13	18	11	28	26	25	28	15	22	22	25		

Fig. 5. Ejemplo de mensaje a encriptar

Ahora revisaremos la clave pública del grupo a enviar el mensaje y contaremos los dígitos correspondientes del número “m”, organizaremos nuestro mensaje en grupos de dígitos con un número inferior al de “m”.

Ejemplo: si m=64777 (Tiene 5 dígitos), organizó mi código en cifras de 4 dígitos

3. Encriptando el mensaje

A. Sugerencia: En la hoja de cálculo organiza la tabla3.

TABLA 3.
ENCRIPTANDO EL MENSAJE

b	k	m	a
1331	241	64777	58734
1124	241	64777	38596
1425	241	64777	2470

B. Calcular “a”: en https://www.wolframalpha.com/ teniendo en cuenta que se conocen los datos descritos en la Tabla 4

TABLA 4
DATOS PARA ENCRIPTAR EL MENSAJE

b	Código o número
k	Número clave del grupo a enviar el mensaje
m	Número clave del grupo a enviar el mensaje
a	Número por buscar

Debemos trabajar con el algoritmo propuesto en (5)

$$\boldsymbol{b^k \equiv a \bmod m} \qquad (5)$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{1331^{241} = \_\_\_\_\_\_ mod 64777} \qquad (6)$$

En el buscador https://www.wolframalpha.com/ escribir “powermod” (b, k, m) y el programa como resultado nos entrega el valor de a.

Ejemplo: Powermod (1331,241,64777) Resultado 58734.

Ahora si completemos nuestra tabla de códigos y estamos listos para enviar el mensaje como se observa en la Fig. 6.

58734	38596	2470	48593	26842	1598	61033	38886	48593	51290	50848	54938
3436	26362	51290	23309	9666	15261	62751	28043	10512	18688	52283	17527
31275	35617	4701	15261	40784	34352	63885	40784	17569	19060	35324	239
59193	60830	41262	27268	28043	53686	35148					

Fig. 6. Mensaje encriptado

4. Cómo descifrar el mensaje

Para descifrar el mensaje debemos resolver (7)

$$\boldsymbol{UK \equiv 1 mod \varphi(m)} \qquad (7)$$

En https://www.wolframalpha.com/ ingresar: “powermod” $(k, (-1), f(m))$ de este modo ha conseguido el valor de U, ahora con los códigos que ha recibido es posible dar solución a (8)

$$b^U \equiv \_\_\_\_\_ modm \qquad (8)$$

Es decir: en https://www.wolframalpha.com/ ingresar:

“powermod $(b, U.m)$ por ejemplo si mi clave de grupo es: K=241 m=25021 U=18451 entonces powermod (8686,18451,25021) y el resultado es el código que luego voy a usar para descifrar.
Sugerencia: vuelva a elaborar tabla en Excel. ¿Cuál es el mensaje descifrado?

V. RESULTADOS

La actividad se desarrolló con tres grupos, cada uno de tres estudiantes, de manera sincrónica se cruzaron los mensajes para encriptar y desencriptar.
A continuación, se relaciona el trabajo adelantado por los estudiantes en referencia a los mensajes enviados, se aclara que cada grupo acorde con el mensaje a enviar dispuso un nombre para su grupo como se observa en las Fig. 7, 8 y 9

karen daniela león gómez | Nicol Dayana Cruz Castillo | **Alex Lopez Tovar**

P	19
q	113
m	2147
y(m)	2016
k	11
Clave pública para enviar	CONTENTOS
m	493
k	3
	5489

D	I	O	S	H	A	C	E	A	R	I	T	M	E	T	I	C	A
14	19	25	29	18	11	13	15	11	28	19	30	23	15	30	19	13	11

mensaje enviado CONTENTOS

279	450	342	232	409	345	225	417	345	260	450	378	335	417	378	450	225	345

B	K	M	A
14	3	493	279
19	3	493	450
25	3	493	342
29	3	493	232
18	3	493	409
11	3	493	345
13	3	493	225
15	3	493	417
11	3	493	345
28	3	493	260
19	3	493	450
30	3	493	378
23	3	493	335
15	3	493	417
30	3	493	378
19	3	493	450
13	3	493	225
11	3	493	345

Fig. 7. Mensaje enviado por Poderosos

YENY MOSQUERA, LAURA UMAÑA, NICOLE RODRIGEZ, JUAN PABLO CRUZ

CLAVE PARA ENVIAR A PODEROSOS

p	q	m	F(m)	k
0		2147		11

p	q	m	F(m)	k
23	31	713	660	29

L	A	S	P	A	L	A	B	R	A	S
22	11	29	28	11	22	11	12	28	11	29
B	O	N	I	T	A	S				
12	25	24	19	30	11	29				
G	E	R	M	I	N	A	N			
17	15	28	23	19	24	11	24			

MENSAJE ENVIADO

1661	1352	269	126	1681	1596	1581	1501	1089	1559
959	1352	1539	2055	599	1316	1581	1213		

1	22
2	11
3	29
4	28
5	11
6	22
7	11
8	12
9	28
10	11
11	29
12	12
13	25
14	24
15	19
16	30
17	11
18	29
19	17
20	15
21	28
22	23
23	19
24	24
25	11
26	24

B	K	M	A
221	11	2147	1661
129	11	2147	1352
281	11	2147	269
122	11	2147	126
111	11	2147	1681
228	11	2147	1596
112	11	2147	1581
912	11	2147	1501
252	11	2147	1089
419	11	2147	1559
301	11	2147	959
129	11	2147	1352
171	11	2147	1539
528	11	2147	2055
231	11	2147	599
924	11	2147	1316
112	11	2147	1581
4	11	2147	1213

Fig. 8. Mensaje enviado por Frijolitos

P	17
Q	29
M	493
P(M)	448
k	3

CLAVE PUBLICA PARA ENVIAR A FRIJOLITOS

M	713
K	29

ANGEL ZAHID AVILA
MARIA PAULA MINA ANGEL
JUAN DAVID LEAL

S	E	F	E	L	I	Z	N	O	A	C	E	P	T	E	S	M	E	N	O	S
29	15	16	15	22	19	36	24	25	11	13	15	26	30	15	29	23	15	24	25	29

325	494	64	494	551	452	676	208	36	513	
446	494	347	557	494	325	368	494	208	36	325

B	K	M	A
29	29	713	325
15	29	713	494
16	29	713	64
15	29	713	494
22	29	713	551
19	29	713	452
36	29	713	676
24	29	713	208
25	29	713	36
11	29	713	513
13	29	713	446
15	29	713	494
26	29	713	347
30	29	713	557
15	29	713	494
29	29	713	325
23	29	713	368
15	29	713	494
24	29	713	208
25	29	713	36
29	29	713	325

Figura 9. Mensaje enviado por Contentos

Como se observa los estudiantes para codificar sus mensajes hicieron uso de la tecnología, codificando sus mensajes en hoja de cálculo y Excel y https://www.wolframalpha.com/, Caracterizaron su grupo ofertando pistas con el nombre que dieron al grupo y realizaron trabajo en equipo delegando funciones a cada uno de los participantes.
De igual forma con el mensaje recibido desencriptaron el mensaje recibido haciendo uso de su clave pública, el grupo que se hizo llamar contentos logró desencriptar su mensaje con éxito como se visualiza en la Fig. 10

P	17
Q	29
M	493
P(M)	448
k	3
U	299

ANGEL ZAHID AVILA
MARIA PAULA MINA ANGEL
JUAN DAVID LEAL

B	U	P(M)	A
279	299	493	14
450	299	493	19
342	299	493	25
232	299	493	29
409	299	493	18
345	299	493	11
225	299	493	13
417	299	493	15
345	299	493	11
260	299	493	28
450	299	493	19
378	299	493	30
335	299	493	23
417	299	493	15
378	299	493	30
450	299	493	19
225	299	493	13
345	299	493	11

14	19	25	29	18	11	13	15	11	28	19	30	23	15	30	19	13	11
D	I	O	S	H	A	C	E	A	R	I	T	M	E	T	I	C	A

Fig. 10. Mensaje desencriptado por Poderosos

No sucedió lo mismo con el equipo de “frijolitos” como se ilustra en la Fig. 11

karen daniela león gómez | Nicol Dayana Cruz Castillo | **Alex Lopez Tovar**

P	19
q	113
m	2147
y(m)	2016
k	11
U	1283

B	U	M	A
1661	1283	2147	221
1352	1283	2147	129
269	1283	2147	281
126	1283	2147	122
1681	1283	2147	111
1596	1283	2147	228
1581	1283	2147	112
1501	1283	2147	912
1089	1283	2147	252
1559	1283	2147	419
959	1283	2147	301
1352	1283	2147	129
1539	1283	2147	171
2055	1283	2147	528
599	1283	2147	231
1316	1283	2147	636
1581	1283	2147	112
1213	1283	2147	4

L	A	S	R	A	L	A	B	R	A	S	B	O
22	11	29	28	11	22	11	12	28	11	29	12	25
N	I	T	A	S	G	E	R	M	F	Z	A	N
24	19	30	11	29	17	15	28	23	16	36	11	24

Fig. 11. Mensaje desencriptado por Frijolitos

La dificultad con dos de las letras que hacían parte del mensaje y no fueron desencriptadas correctamente fue producto de un código mal desencriptado en el programa https://www.wolframalpha.com/ por un mal acceso que se hizo de los datos de la clave pública, situación presentada por distracción.
Finalmente, el grupo de “contentos” desencripto de forma correcta su mensaje como se evidencia en la Fig. 12

B	U	M	A
325	569	713	29
494	569	713	15
64	569	713	16
494	569	713	15
551	569	713	22
452	569	713	19
676	569	713	36
208	569	713	24
36	569	713	25
513	569	713	11
446	569	713	13
494	569	713	15
347	569	713	26
557	569	713	30
494	569	713	15
325	569	713	29
368	569	713	23
494	569	713	15
208	569	713	24
36	569	713	25
325	569	713	29

	q	m	F(m)	k	U(K)
23	31	713	660	29	569

29	15	16	15	22	19	36	24	25	11	13	15	26
S	E	F	E	L	I	Z	N	O	A	C	E	P
T	E	S	M	E	N	O	S					
30	15	29	23	15	24	25	29					

YENY MOSQUERA, LAURA UMAÑA, NICOLE RODRIGEZ, JUAN PABLO CRUZ

HAPPY HAPPY

Fig. 12. Mensaje Desencriptado por contentos

Se les pegunto a los estudiantes cual era su percepción con referencia a la actividad adelantada y algunas de las respuestas se relacionan en las Fig. 13, 14 y 15

Nicole Rodríguez

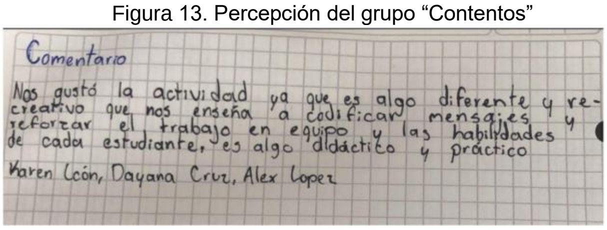
Juan Pablo Cruz

Yeny Mosquera

Laura Umaña

Nos encantó la actividad, fue una experiencia nueva y agradable para todos nosotros. Compartir ese tiempo con nuestra profesora y compañeros fue muy valioso. Descubrimos lo increíble que puede ser una página y las posibilidades que ofrece al combinar números. Antes, no teníamos ni idea de todas las cosas que se pueden hacer con ella. Fue una revelación para nosotros y ahora apreciamos mucho más su potencial.

Figura 13. Percepción del grupo “Contentos”


Comentario

Nos gustó la actividad ya que es algo diferente y recreativo que nos enseña a codificar mensajes y reforzar el trabajo en equipo y las habilidades de cada estudiante, es algo didáctico y práctico

Karen León, Dayana Cruz, Alex Lopez

Fig. 14. Percepción del grupo Frijolitos

Juan David Leal

Buenas tardes, por la presente comunico la opinión de mi grupo respecto a la actividad cursada de criptoaritmetica, nuestra opinión como grupo confirma lo valioso que puede llegar a tener una actividad de este carácter en el ámbito de nuestra carrera, dejando esto de lado la actividad es bastante divertida y entretenida, muchas gracias profesora por esta misma, feliz tarde.

Fig. 15. Percepción del grupo “los poderosos”

Como se observa los estudiantes refieren que la temática resulta relevante para su formación profesional y en general se evidencia que encuentran sentido a los aprendizajes de su primer curso de matemáticas no solo en el ámbito académico, sino que adicionalmente fortalece el liderazgo y trabajo en equipo frente a la búsqueda de soluciones.

VI. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta la actividad de aprendizaje adelantada con el cifrado y descifrado de la clave pública y la criptografía con los estudiantes de primer semestre de comercio internacional que cursan matemáticas I podemos concluir que:

Al participar en actividades prácticas de cifrado y descifrado de la clave pública, los estudiantes pueden obtener una comprensión profunda de los fundamentos criptográficos, como la criptografía asimétrica y el intercambio seguro de claves, entendiendo así, cómo funcionan los algoritmos criptográficos y cómo se aplican en el ámbito del comercio internacional.

De igual forma se hacen conscientes de la importancia de la seguridad de la información y aprenden a proteger la confidencialidad, integridad y autenticidad de los datos en las transacciones comerciales, lo cual es esencial para mantener la confianza de los clientes y la reputación de las empresas.

Las actividades de cifrado y descifrado de la clave pública requieren sólidos conocimientos matemáticos, como la aritmética modular y la teoría de números. Al aplicar estos conceptos en situaciones prácticas, los estudiantes fortalecen sus habilidades matemáticas y analíticas, lo que les resultará útil en futuros cursos.

Los estudiantes desarrollan habilidades de pensamiento crítico al analizar y evaluar diferentes enfoques criptográficos, así como al encontrar soluciones eficientes y seguras. Estas habilidades son valiosas en el comercio internacional, donde la toma de decisiones informadas y la resolución de problemas son fundamentales.

Finalmente, a través de este tipo de actividades los estudiantes tienen la oportunidad de concientizarse del desarrollo de habilidades como el liderazgo y trabajo en equipo como parte fundamental en sus procesos de formación profesional.

AGRADECIMIENTOS

Se expresan los agradecimientos al Doctor Gerardo Chacón, quien motivo al desarrollo de este ejercicio de investigación y ofertó los elementos necesarios para que como estudiante del Doctorado en Educación Matemática pudiese desarrollar esta actividad para la mejora de los procesos de Enseñanza aprendizaje en el curso de matemáticas I.

REFERENCIAS

[1] Bruce, S. (1996). Applied Cryptography: Protocols, Algorthms, and Source Code in C.-2nd.

[2] Schneier, B. (2007). *Applied cryptography: protocols, algorithms, and source code in C*. john Wiley & sons.

[3] Stallings, W. (2018). The offset codebook (OCB) block cipher mode of operation for authenticated encryption. *Cryptologia*, *42*(2), 135-145.

[4] Diffie, W., & Hellman, M. E. (2022). New directions in cryptography. In *Democratizing Cryptography: The Work of Whitfield Diffie and Martin Hellman* (pp. 365-390).

[5] Menezes, A. J., Van Oorschot, P. C., & Vanstone, S. A. (2018). *Handbook of applied cryptography*. CRC press.

[6] Berrondo, R., Cabrera, N., Franco, G., Frederico, M., Mariani, F., & Rodríguez, L. (2015). Criptografía: una cuestión de códigos.

[7] Paredes, G. G. (2006). Introducción a la criptografía.

[8] Stallings, W. (1994). Fundamentos de seguridad en redes: aplicaciones y estándares. Pearson Educación.

[9] Stallings, W. (2017). Security for the Internet of Things. In *Computer and Information Security Handbook* (pp. 339-348). Morgan Kaufmann.

[10] Gómez, S., Arias, J. D., & Agudelo, D. (2012). Cripto-análisis sobre métodos clásicos de cifrado. *Scientia et technica*, *2*(50), 97-102.

[11] Gómez, J. S. (2004). Criptografía de clave pública: el sistema RSA. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (25), 149-165.

[12] Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: un sistema de efectivo electrónico peer-to-peer. *Revisión empresarial descentralizada*, 21260.

[13] Antonopoulos, AM (2014). *Dominar Bitcoin: desbloquear criptomonedas digitales*. "O'Reilly Media, Inc.".

[14] Swan, M. (2015). *Blockchain: Blueprint for a new economy*. " O'Reilly Media, Inc.".

[15] Shackleford, D. (2012). *Virtualization security: protecting virtualized environments*. John Wiley & Sons.

Estrategia articuladora entre matemáticas y programación mediante la conjetura de Collatz

José G. Solorzano-Movilla*,
*Universidad Antonio Nariño, jsolorzano22@uan.edu.co

***Abstract*— The article presented below focuses its discourse on the implementation of an interdisciplinary classroom project in the subjects' mathematical competencies and programming I, both in the first semester of a Systems Engineering program in the city of Barranquilla, Colombia. The main objective of the research was to articulate a mathematics subject with programming, through the development of a computer application that counted the number of iterations when using the 3n+1 algorithm, to generate learning through problem-based learning in the mentioned areas. Methodology: the research was developed as a qualitative exploratory study, using the data triangulation technique. Results: students designed resources in which it is possible to know the number of iterations to reach one using the Collatz conjecture, in some cases they used methods not seen in classes because of their research in different sources. Conclusions: the classroom project based on problem-based learning proved to be beneficial for the students, because they were able to explore different ways of looking at mathematics, in this case, the possibility of learning it algorithmically, which strengthened their computational thinking, necessary in their training as systems engineers.**

***keywords*— Collatz conjecture, mathematics, programming, problem-based learning.**

***Resumen*— el artículo presentado a continuación centra su discurso en la implementación de un proyecto de aula interdisciplinar en las asignaturas competencias matemáticas y programación I ambas de primer semestre en un programa de Ingeniería de Sistemas en la ciudad de Barranquilla, Colombia. El *objetivo principal* de la investigación fue el de articular un tema de matemáticas con la programación, mediante el desarrollo de un aplicativo informático que contara el numero de iteraciones al usar el algoritmo 3n+1, para generar aprendizajes mediante el aprendizaje basado en problemas en las áreas mencionadas. *Metodología*: la investigación fue desarrollada como estudio exploratorio de corte cualitativo, mediante la técnica de triangulación de datos. *Resultados*: los estudiantes diseñaron recursos en los cuales es posible conocer el número de iteraciones para llegar a uno usando la conjetura de Collatz, en algunos casos emplearon métodos no vistos en clases resultado de su indagación en diversas fuentes. *Conclusiones*: el proyecto de aula basado en el aprendizaje basado en problemas mostró ser beneficioso para los estudiantes, debido a que lograron explorar diversas maneras de ver las matemáticas, en este caso, la posibilidad de aprenderlas algorítmicamente, lo cual fortaleció su pensamiento computacional, necesario en su formación como ingenieros de sistemas.**

***Palabras clave*— conjetura de Collatz, matemáticas, programación, aprendizaje basado en problemas.**

I. Introducción

Desde principios del siglo XX en el contexto colombiano, las ciencias matemáticas han tenido un papel preponderante en la formación de los ingenieros, sin embargo, en estudios recientes sobre deserción universitaria hechos por la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (Acofi) han encontrado que el número de asignaturas relacionadas con las matemáticas es un factor determinante para la escogencia y/o continuidad en los programas de ingeniería.

Una de las posibles causas es la falta de conexiones entre las matemáticas y ciencias evidentes tanto en currículo como en el desarrollo de cursos de cálculo, álgebra lineal entre otros.

Debido a lo anterior se propuso la implementación de proyectos de aulas interdisciplinarios que se enfocaran en la conexión entre las matemáticas y otras áreas: Es así que nace el proyecto "Collatz" en el programa de Ingeniería de Sistemas en una Institución de Educación Superior (IES) de la ciudad de Barranquilla.

Para este fin, los docentes de matemáticas y programación escogieron el tema de la conjetura de Collatz, en primera instancia por su historia, segundo porque aún no se ha podido demostrar si se cumple para cualquier numero que cumpla las condiciones y en tercer lugar por que se constituyo en un ejemplo de cómo la computación ayuda a resolver problemas propios de las matemáticas.

Pero ¿Qué es la conjetura de Collatz?

En comunicación personal, Bernardo Recaman destaca las palabras de Paul Erdös “quizá la humanidad aún no está preparada paran entenderla” en confirmación de lo complejo que ha sido abordar esta conjetura, la cual ha sido conocida con muchos nombres, de Kakutani, problema de Siracusa y problema de Ulam.

De acuerdo, con [1], la historia sobre esta función aritmética tiene tres momentos claves.

- Décadas que va entre 1920 y 1930, circulo en diversos ámbitos académicos representar diversos tipos de funciones aritméticas iterativas mediante grafos, en esto trabajaron los matemáticos Lothar Collatz, Edmund Landau, Fritzvon Lettenmeyer, Oskar Perron e lssai Schuren

- Década de 1950, donde se dice que Collatz hizo circular el problema, en el Congreso Internacional de Matemáticas realizado en Cambridge.

- Décadas de 1960 y 1970 donde comienza su divulgación en publicaciones como las de Martin Garnerd, tomando relevancia hasta la fecha.

En el siglo XXI se ha hecho uso de las capacidades propias de los computadores para establecer la certeza de la conjetura, sin encontrar una respuesta hasta el momento.

Por otro lado, J. C. Lagarias [2] define que el problema 3x + 1 se refiere a la iteración del mapa T : Z → Z dado por

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} & \text{if } x \equiv 1 \pmod 2 \, . \\ \dfrac{x}{2} & \text{if } x \equiv 0 \pmod 2 \, . \end{cases}$$

El problema 3x + 1 se plantea de forma más sencilla en términos de la función de Collatz C(x) definida en enteros como "multiplicar por tres y sumar uno" para enteros impares y "dividir por dos" para enteros pares. Es decir,

$$C(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{if } x \equiv 1 \pmod 2 \, , \\ \dfrac{x}{2} & \text{if } x \equiv 0 \pmod 2 \, , \end{cases}$$

El proyecto de aula interdisciplinar entre matemáticas y programación I, consistió diseñar un programa en el lenguaje Java o C++ para compro

bar que iterando la función C(x) se llega a el número 1, en particular, establecer la cantidad de iteraciones necesarias hasta alcanzar como resultado el uno.

II. METOLOGIA

Conforme al objetivo planteado para efectos de la implementación del proyecto de aula, el enfoque metodológico utilizado fue cualitativo; a través del cual se producen datos descriptivos detallados sobre interacciones, conductas observables, eventos, entre otros. Fundamentado desde la perspectiva interpretativa, desarrollada mediante la captación de información [3]. El método cualitativo permite explorar un escenario en un contexto determinado en donde convergen las “realidades” de quienes participan del proceso investigativo, de allí su carácter holístico.

El diseño seleccionado es el estudio exploratorio. Debido a que uno de los propósitos es la obtención de información sobre el objeto de estudio, por medio de análisis de los procedimientos de la problemática de los fenómenos investigativos.

Para [4], un buen diseño integra una teoría que sirve como modelo general para la investigación, y su recuperación e interpretación de datos. En esta ocasión, la teoría que soporta y da sentido a la investigación, es la teoría de las situaciones didácticas para la evaluación de los recursos didácticos utilizados orientados al aprendizaje de matemáticas de estudiantes del programa de ingeniería industrial de una institución privada que ofrece sus servicios educativos en modalidad virtual.

A. Población y muestra

La muestra estuvo conformada por un total de 30 estudiantes del programa de ingeniería de sistemas que aceptaron la invitación para hacer parte del estudio, estos alumnos pertenecían al primer semestre y todos coincidían con los mismos profesores tanto para matemáticas como para programación, esta muestra fue seleccionada por conveniencia tomando como criterio la programación del horario de forma tal que se dieran coincidencias en los espacios en los cuales desarrollaban su actividad estudiantil.

Metodológicamente se dividió en tres etapas:

- Explicación del tema en la clase de matemáticas, haciendo uso para esto de la estrategia de aula invertida [5]
- Trabajo de laboratorio, momento en el cual los estudiantes con el apoyo de la profesora de programación I, experimentaban e identificaban las herramientas con las cuales podían diseñar su prototipo de programa.
- Socialización, en este espacio los estudiantes presentaban a sus compañeros y profesores los diferentes programas y el funcionamiento de cada uno de ellos, respondiendo a las preguntas e inquietudes por parte de los asistentes.

B. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos y técnicas usados para la recolección de datos fueron entrevistas semiestructuradas, la observación no participante, el análisis documental y la rúbrica para evaluar el prototipo del aplicativo informático. Sumado a lo anterior, se diseñó una matriz de contraste en la cual se consignaron los resultados de cada uno de los instrumentos.

C. Técnicas de análisis de datos

Se utilizó para analizar los datos la triangulación de datos, desde la perspectiva de Denzin (1990), quien la presenta como la aplicación y combinación de diversas metodologías de la investigación en el análisis de un mismo fenómeno, por su parte [4] establece que “al hecho de utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección, se le denomina triangulación de datos” (p.439).

En el marco de una investigación cualitativa, la triangulación comprende el uso de varias estrategias al estudiar un mismo fenómeno, empleando varios métodos (entrevistas individuales, grupos focales o talleres investigativos) además la misma autora comenta que el arte de este tipo de triangulación consiste en dilucidar las diferentes partes complementarias de la totalidad del fenómeno y analizar por qué los distintos métodos arrojan diferentes resultados.

III. RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados más destacados de la implementación del proyecto de aula interdisciplinar “Collatz”

De acuerdo con lo presentado en el apartado de metodología, se lograron conformas 10 grupos de tres estudiantes cada uno.

Los grupos presentaron en primer lugar un pequeño resumen histórico sobre el problema de Collatz, incluyendo vídeo cómo el de Sánchez de Cabezón donde se plantea que buscar solución a este problema es inútil y no sirve para nada, sin embargo, lo estudiantes en su gran mayoría controvirtieron está afirmación, argumentando que ellos si le habías sacado provecho y que les permitió aprender cosas más allá de las vistas en clases, valoraron el hecho que se sintieron desafiados y exigidos.

En consecuencia, presentaron diversos prototipos que podemos clasificar en dos tipos, los que lograron contar el número de iteraciones y los que aportaron algo adicional a conteo, ejemplo de ambos se muestran a continuación:

- Programas tipo A

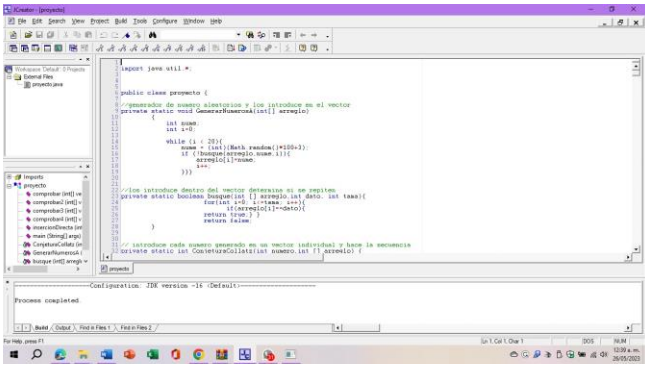


Figura 1. Captura programa 1

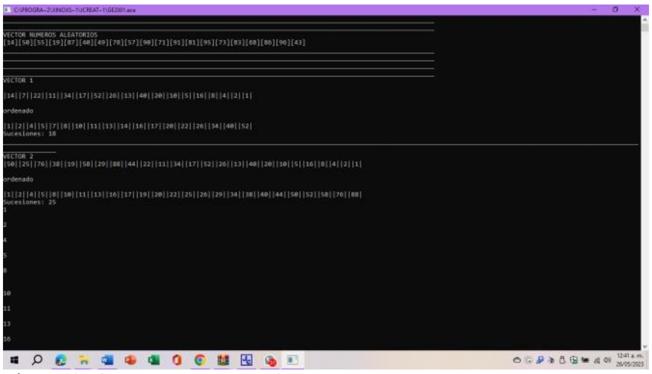


Figura 2. Captura programa 2.

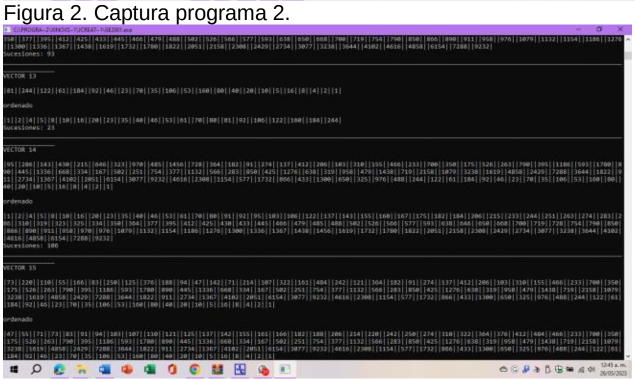


Figura 3. Captura programa 3.

En los programas tipo A, figuras 1 a la 3, se encuentran todos aquellos aplicativos que cumplen con el requisito de hacer un conteo del número de iteraciones, resaltando que todos llegan a 4,2,1 al final.

Evidencian como varían cantidades de iteraciones y que están no tienen un patrón definido, presentan todos los números resultantes de la implementación de C(x).

- Programas tipo B

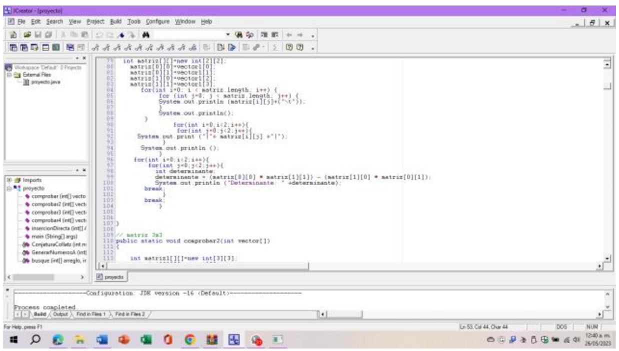


Figura 4. Captura programa 4

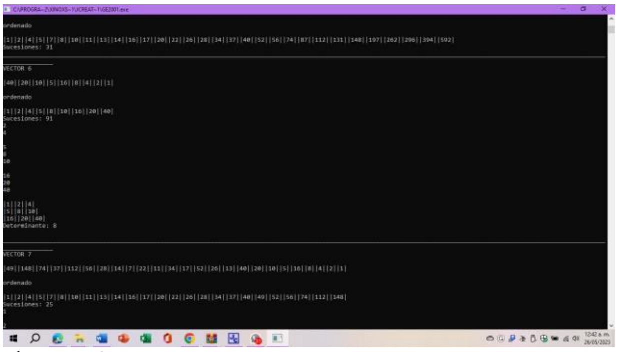


Figura 5. Captura programa 5

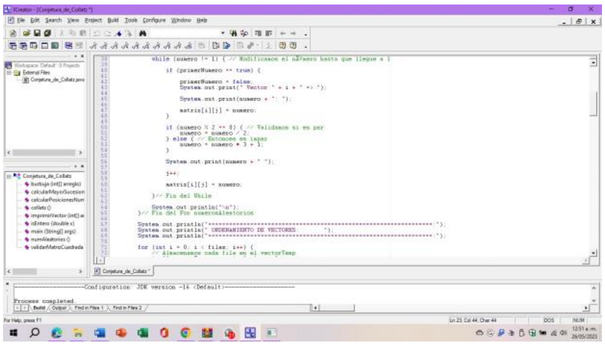


Figura 6. Captura programa 6

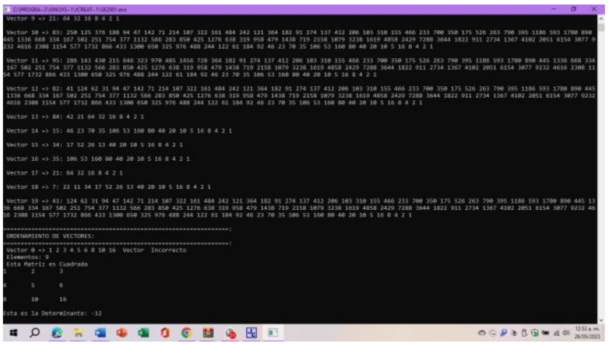


Figura 7. Captura programa 7

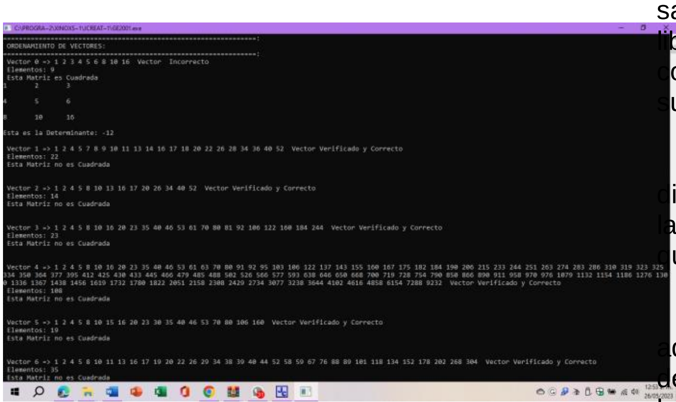


Figura 8. Captura programa 8.

Los aplicativos tipo B, figuras 4 a la 8, son aquellos que además de cumplir con el requerimiento, sumaron una rutina adicional cómo verificar si la cantidad el cardinal del conjunto de resultados era cuadrado, de ser así se propusieron a construir un matriz y finalmente determinar su determinante.

Los estudiantes que realizaron lo mencionado anteriormente, tenían una característica en común, el gusto por resolver problemas matemáticos, en las clases eran inquietos con las preguntas y siempre exigían a la profesora de programación una mayor exigencia con las actividades en las clases. Pedían retos más fuertes para las tareas, por lo cual, durante el desarrollo del proyecto de aula, indagaron que más podían hacer y que cosas no se habían considerado en las diversas formas de probar la conjetura de Collatz.

IV. Conclusiones

En este aparte de las conclusiones se abordará una breve discusión de los resultados, sumado a una revisión de elementos destacables de la experiencia.

Inicialmente es importante destacar, la relevancia de llevar a cabo procesos de caracterización de los estudiantes que ingresan a las IES, considerando las dificultades que los estudiantes tuvieron en el momento del desarrollo de la actividad, pudo notarse que varios no tenían claridades en las operaciones, sin embargo, lograron superar esto y desarrollaron prototipos que respondían a lo solicitado.

Por otro lado, los estudiantes avanzaron más cuando se les logró mostrar la importancia de entender los problemas y establecer una estrategia para poder resolverlos, hecho que sirvió de recurso en la asignatura de programación.

Sumado a lo anterior, este proyecto de aula propuesto a mediados del curso mostró ser eficaz en la generación de una serie de resultados susceptibles de ser analizados desde la óptica de la pertinencia de proponer temas interdisciplinarios desde el primer día de clases.

En contraste, se presentaron problemas que pudieron incidir en los resultados cómo el hecho que los estudiantes no tenían permiso para trabajar en las salas de sistemas para adelantar el proyecto en horas libres, de igual forma, muchos de ellos no tenían computadores en su casa para poder continuar con sus ideas de solución.

Finalmente, fue posible notar cómo existen diferentes historias de la conjetura de Collatz, desde las que tienen evidencias científicas hasta aquellas que se quedan en la mera especulación.

Al respecto, es importante destacar un aporte adicional del trabajo realizado, en cuanto al desarrollo de una lectura crítica de la información proveniente de la red mundial de la información, en algunos de los estudiantes surgió la idea de poder llevar a cabo el diseño de una herramienta que identifique información falsa o resultado de una fuente poco confiable.

A manera de colofón, la estrategia del aprendizaje basado en problemas, mostró ser un recurso valioso con la cual los estudiantes pueden poner en práctica muchas ideas para resolver situaciones, promoviendo así una mirada experimental de las matemáticas, en esta ocasión de la mano de los computadores y el pensamiento algorítmico como base para fortalecer sus aprendizajes.

AGRADECIMIENTOS

A la Ingeniera Martha Olaciregui por el espacio para desarrollar esta actividad y así analizar otras formas de motivar a los estudiantes hacía el aprendizaje para la vida.

CONFLICTOS DE INTERÉS

No existen conflictos de intereses.

REFERENCIAS

[16] SOBRE LA CONJETURA DE COLLATZ MONOGRAFÍA DE TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS Ana María Guauque Pardo Dirigido por: Carlos Orlando Ochoa Castillo Bogotá DC Octubre de 2021.

[17] The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009) J. C. Lagarias Department of Mathematics University of Michigan Ann Arbor, MI 48109–1109 lagarias@umich.edu (Jan. 10, 2012).

[18] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

[19] Yacuzzi, E. (2005). El estudio de casos como metodología de investigación. Universidad del CEMA

[20] Tatiana Arrieta Barrios, Shirley Llinás Rojas, José Solórzano Movilla, Samir Francisco Umaña Ibáñez, Aida Huyke Taboada,Characterization Of Flipped Classroom Model in Higher Education: A Perception from Educational Resilience During Covid-19 Pandemic, Procedia Computer Science, Volume 203, 2022, Pages 575-582, ISSN 1877-0509, https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.07.082.

Modelación geométrica y las matemáticas discretas en un contexto escolar auténtico

Luz Marina Fonseca Vizcaya*
*Universidad Antonio Nariño, lfonseca@uan.edu.co

***Abstract*— Graph theory is not part of the content of the Colombian curriculum, but it contributes significantly to the processes of mathematical education, in this case to reasoning, modeling and problem solving. Discrete mathematics, on the other hand, favors abilities of intuition, comprehension, and reasoning, which given the two cases contribute in a relevant way to the development of mathematical thought.**

With the aim of improving the students' learning and developing skills for knowledge construction, it is considered an opportunity to model geometrically concepts of graph theory through challenging problems in an authentic real extra-mathematical context. It also analyzes the meaning that can be given under the understanding and approximation of mathematical knowledge attracted by the experience and previous knowledge of students in secondary basic education (Sense Making).

Although students do not have prior knowledge of graph theory, it is not considered a prerequisite for working on graph theory, on the contrary, there is an opportunity to train in graph theory, in a motivational and dynamic way. due to the development of problems in a context that provides visual mediators and places already known (real) by students.

This study is carried out with schoolchildren between the ages of 13 and 15 in the eighth grade of basic secondary school in a public institution, through a qualitative methodology.

In this sense, it is evident that graph theory and geometric modeling have a close relationship, which can strengthen challenging problem-solving skills in authentic real contexts, where skills are favored in the heuristic processes fundamental to the mathematical education and learning of the students.

***keywords*— Graph theory, geometric modeling skills, problem solving, authentic context.**

***Resumen*— La teoría de grafos no hace parte del contenido del currículo colombiano, sin embargo, aporta significativamente a los procesos de la educación matemática, en este caso al razonamiento, el modelado y la resolución de problemas. Por su parte, la matemática discreta favorece habilidades de intuición, comprensión y el razonamiento, que dado los dos casos tributan de manera relevante al desarrollo del pensamiento matemático.**

Con el objetivo de mejorar de manera optima los aprendizajes de los estudiantes y desarrollar habilidades para la construcción de conocimiento, se considera una oportunidad modelar geométricamente conceptos de la teoría de grafos a través de problemas retadores en un contexto extra-matemático real autentico. Además de analizar el sentido que puede darse bajo la compresión y la aproximación del conocimiento matemático atraídos por la experiencia y los conocimientos previos de los estudiantes de la educación básica secundaria (Sense Making).

Aunque los estudiantes no tienen conocimientos previos sobre teoría de grafos, no se considera como un prerrequisito para trabajar dicha teoría, por el contrario, se da una oportunidad para formarse en ella, de manera motivadora y dinámica, debido al desarrollo de problemas en un contexto que brinda mediadores visuales y lugares ya conocidos (reales) por los estudiantes.

Este estudio se desarrolla con escolares de edades entre los 13 y 15 años del grado octavo de la básica secundaria en una institución pública, por medio de una metodología cualitativa.

En esta medida, se evidencia que la teoría de grafos y la modelación geométrica tienen una relación estrecha, que puede fortalecer las habilidades de resolución de problemas, donde se favorecen destrezas en los procesos heurísticos fundamentales en la educación matemáticas y el aprendizaje de los escolares.

***Palabras clave*— 4, Teoría de grafos, habilidades de modelado geométrico, resolución de problemas, contexto auténtico.**

I. Introducción

El abordaje en la escuela de situaciones problémicas centradas en el mundo real es un procedimiento vital para la proximidad al conocimiento matemático y una oportunidad para poner en práctica todo lo aprendido. Uno de los procesos que lo dinamiza es la resolución de problemas retadores, apoyados indudablemente por la modelación.

Existe una conexión esencial entre la resolución de problemas, la aplicabilidad y la modelación. El modelado apunta a relacionar el mundo real y las matemáticas, desarrollando en los estudiantes potencialidades en su pensamiento. Por otro lado, propiciar espacios en el aula para modelar, concede a los estudiantes desarrollar destrezas de predicción, explicación y dar solución a situaciones en un contexto autentico y natural.

El presente estudio contribuye al desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades que usan la modelación geométrica en la resolución de problemas retadores, con estudiantes de secundaria. La implementación propicia el desarrollo habilidades para la resolución de problemas en un contexto extra-matemático.

Un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, donde se considere la resolución de problemas, a través de la modelación geométrica, requiere de una metodología que integre los dos procesos en toda actividad matemática. Esta integración permite el desarrollo oportuno y adecuado del saber matemático, donde se fortalece el aprendizaje significativo y el interés por el conocimiento en los estudiantes.

En aras de lograr óptimos aprendizajes para un mejor desempeño, se hace necesario que los estudiantes muestren dominio en la resolución de problemas, apoyados en el proceso de la modelación geométrica. Según Rico (2005) citado por Recio (2006), el modelado "…permite la puesta en juego en situaciones usuales de la vida cotidiana, donde se involucran las matemáticas" (Recio,2007).

Se presenta una practica desarrollada con estudiantes de secundaria con miras a llevar a cabo procesos de modelación geométrica vinculada con la teoría de grafos, con la idea de favorecer la construcción y el sentido de conceptos a través de la resolución de problemas extra-matemático en un contexto autentico. Con una metodología cualitativa se hace un análisis riguroso acerca de los alcance y oportunidades de mejora, en relación con la resolución de problemas, la matemática discreta y la construcción de conceptos la teoría de grafos.

II. ASPECTOS EN MODELACIÓN GEOMÉTRICA

Reconociendo que la modelación geométrica es intrínseca a la modelación matemática, se abordan algunas definiciones dadas por autores que han involucrado la modelación geométrica en la práctica educativa. Alsina (2008) la concibe como una construcción de un modelo con elementos geométricos en base a una situación real. Para Zapata, Cano, & Villa (2017) el modelado en geometría "puede considerarse como un proceso en el cual, el conocimiento de la geometría se utiliza para representar objetos de la realidad" (Zapata et al., 2017).

En el caso de Herbst & Boileau (2018) reconocen la modelación geométrica como "La representación de experiencias con el espacio y la forma, utilizando un sistema semiótico que ofrece sus propios mecanismos para hacer inferencias" (Herbst & Boileau,2018). En este estudio se reconoce como la modelación geométrica se establece como: un proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, formulación y elaboración de un modelo, el cual, brinda elementos para hacer inferencias, que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico.

El proceso de modelación geométrica que se trabaja en este estudio tiene relación con un campo de modelado extra-matemático, de forma intencional. En este caso, los estudiantes hacen uso de sus habilidades y conocimientos geométricos, para abordar un problema retador, con el propósito de vincular situaciones cercanas que apoyen el aprendizaje.

Considerando los resultados investigativos de Bliss y Libertini (2020), Stillman (2015) y Niss, Blum & Galbraith (2007) el modelado es el medio para relacionar la matemática y la realidad, y despertar el interés en el estudiante por conocer temas matemáticos en un contexto específico. De este modo, la modelación puede ser vista como una forma mediadora entre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

Por otra parte, la modelación puede ser desarrollada en el aula a través de ciclos que favorecen la cognición, aunque no deben desvincularse con las metacognitivas. Para este estudio se hace una apropiación de los ciclos simplificados por Brown y Stillman 2016.

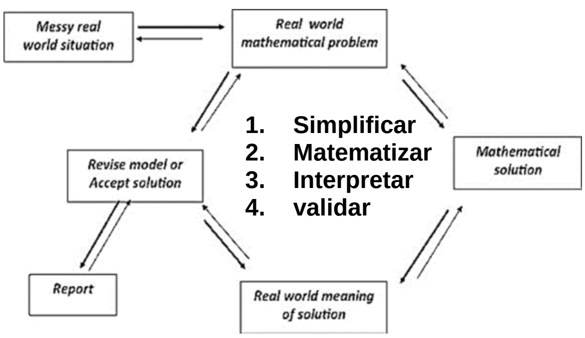


Fig. 1: Ciclos del modelado simplificado de Brown y Stillman (2016)

En este sentido, se reconoce que el modelado es importante para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela, debido a sus conexiones con la realidad, pues según Bliss y Libertini (2020) permite:

– "Usar el lenguaje de las matemáticas para cuantificar fenómenos del mundo real y analizar comportamientos.

– Usar las matemáticas para explorar y desarrollar nuestro entendimiento de los problemas del mundo real.

– Usar un proceso iterativo para la resolución de problemas, en el cual las matemáticas son utilizadas para investigar y desarrollar un entendimiento más profundo"

A. El desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas retadores.

El desarrollo del pensamiento matemático ha tomado interés en toda la comunidad académica, que busca sin duda, un avance en el desarrollo de competencias matemáticas en los individuos. Se puede entender el pensamiento matemático, como "la capacidad que tiene un individuo para resolver diversas situaciones que involucran el dominio de un campo específico, como el de las habilidades de abstracción, validación empírica e inferencia lógica" Abascal et al. (2015).

En este sentido, Sfard (1991) desde la perspectiva biológica explica que desarrollar las habilidades para aprender matemáticas, implica un esfuerzo continuo. Este trabajo vincula procesos celébrales simples, como la atención, la memorización o procesos mentales más complejos como organizar ideas, comparar, analizar, razonar, generalizar, seguir pasos, asumir reglas y tomar decisiones.

Por su parte, para Schoenfeld (2016) aprender a pensar matemáticamente tiene dos tipos de significados: el primero hace relación al punto de vista matemático, a la valoración que debe darse a los procesos de matematización, abstracción y habilidad para aplicarlos. El segundo aborda el desarrollo de competencias para usar herramientas con el objetivo de comprender, ambos tipos se dirigen a la creación de sentido matemático, para percibir y usar las matemáticas de manera significativa. Es así como "el conocimiento matemático de uno es el conjunto de hechos y procedimientos matemáticos que uno puede usar de manera confiable y correcta. Es así como "el conocimiento matemático de uno es el conjunto de hechos y procedimientos matemáticos que uno puede usar de manera confiable y correcta" (Schoenfeld,2016).

La resolución de problemas ha fortalecido con el transcurso de los años el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula, convirtiéndose en una metodología de trabajo en varios países del mundo. En este sentido, para Stanic y Kilpatrick (1988) los problemas han ocupado un lugar fundamental en el currículo matemático en la escuela, aunque los términos "problema" y "resolución de problemas" se ha asumido con diversos significados. Entre estos, los autores señalan los siguientes:

– "Resolver problemas como contexto: como justificación para enseñar matemáticas, para proveer motivación, como actividad recreativa, para desarrollar habilidades y como práctica.

– Resolver problemas como habilidad.

– Resolver problemas para hacer matemáticas" (Vilanova, 2001).

Para Díaz y Poblete (2001) la resolución de problemas acerca las matemáticas a situaciones cotidianas en diversos contextos y muestra el control intelectual que un estudiante puede aplicar en cada situación, recurriendo a la búsqueda e intuición, apoyándose en todos sus conocimientos y experiencias para llegar a una solución.

Además, se requiere de voluntad, necesidad, motivación y que sea reconocido como un desafío personal (Blanco,1993).

De Guzmán (1993) expone algunas razones, por la cuales considera importante la resolución de problemas, entre ellas se tienen la autonomía, el aporte que ofrece a los procesos efectivos de adaptación a los cambios de la ciencia y la cultura, el trabajo autorregulador y creativo. Además, mantiene un valor universal no limitado al mundo de las matemáticas. En este sentido, "los hábitos mentales de resolución de problemas preparan a las personas para problemas reales, situaciones que requieren esfuerzo y pensamiento" (Rigelman, 2007).

Cabe señalar que, la resolución de problemas es un acto indispensable para la vida y parte integral del pensamiento matemático. De esta manera, la práctica de problemas matemáticos permite desarrollar estrategias de solución coherente, además favorece la aplicación a contextos intra-matemáticos y extra-matemático que conllevan al desarrollo del pensamiento. De modo que "[…] el pensamiento matemático en sí es un proceso que pertenece a una persona que realiza actividades de pensamiento dentro o fuera de las matemáticas" (Delima, 2017).

Por su parte, Ersoy (2012) sostiene que el desarrollo del pensamiento matemático comienza cuando un individuo trata de resolver problemas, correlacionando conceptos para llegar a una solución. En este proceso, interviene de manera asertiva, la selección de estrategias, la experiencia del estudiante y su conocimiento matemático. Por lo tanto, "la competencia en el uso de estrategias apropiadas de resolución de problemas refleja los grados de competencia del rendimiento de los estudiantes en matemáticas" (Cai,2003).

Cabe señalar que, si los docentes eligen solícitamente problemas donde es necesario que los estudiantes hagan participe su pensamiento matemático y la resolución de problemas, apoyándose en preguntas heurísticas, fomentando la reflexión y la creación de sentido, los estudiantes reciben retribuciones significativas para comprender la matemática y alcanzar unos altos desempeños. Hacia estas ideas se dirige la presente investigación haciendo uso de la modelación geométrica en la resolución de problemas retadores, para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático. De ahí que, "el pensamiento matemático es una forma ordinaria de pensar y resolver problemas que juega un papel especialmente importante en las matemáticas" (Watson, 2001).

B. La modelación geométrica y el Sense Making

En diversos campos y abordado por diversos autores ha venido emergiendo el Sense Making, tanto en las organizaciones, la comunicación, la educación, entre otras. Es importante destacar que en la educación matemática ha ganado gran relación con el modelado matemático y la investigación.

Por su parte, Ancona (2012) concibe el Sense Making como creación de sentido que implica la construcción de entendimientos y significados plausibles, siendo una actividad muy útil que requiere moverse entre la heurística y la generalización. De esta manera, crear sentido puede verse como un proceso, en el cual una persona da sentido a su experiencia y le permite alcanzar conocimientos de una disciplina.

Para Odden & Russ (2019) el Sense Making en la educación permite a los estudiantes enmarcar su actividad como una creación de sentido, viendo su tarea como la construcción de nuevos saberes hacia algo desconocido, además les permite descubrir nuevas oportunidades de aprendizaje utilizando su ideas, intuiciones y experiencias propias.

El uso actual del término Sense Making en la educación matemática se dirige a desarrollar compresión de una situación, contexto o significado a partir de los conocimientos ya construidos. "En cuanto al modelado matemático esta creación de sentido puede presentarse en el contexto de una tarea o aplicación, dándole sentido a una situación del mundo real".

En relación, Odden & Russ (2019) manifiesta que la creación de sentido y el modelado tienen un mismo propósito construir nuevos conocimientos y la comunicación de nuevas ideas.

C. La teoría de grafos y la escuela secundaria

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría de grafos ha tomado un papel preponderante en la escuela secundaria, a pesar de que en varios países no pertenece al currículo para ese nivel educativo, se ha venido considerando como base importante para el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

Diversas investigaciones permean la importancia y la motivación que puede llegar a generar en los estudiantes los elementos de dicha teoría, además de ser un escenario apropiado que permite integrar procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación (Vanegas et al, 2013). De esta manera los grafos son representaciones significativas para modelar diversas situaciones en problemas retadores en contextos auténticos o simulados. Por lo cual, la teoría de grafos es una valiosa herramienta de modelado matemático (Smithers,2005)

En este sentido, construir modelos y solucionar problemas desarrollan habilidades relevantes para el desarrollo del pensamiento matemático, debido a que favorece el razonamiento abstracto, permitiendo que los estudiantes vinculen los conocimientos informales y los formales de la matemática, de tal manera que apoya a una mejor disposición para el aprendizaje y avance en sus niveles de desempeño (Braicovich, et al, 2008).

La teoría de grafos establece conexiones fuertes con la geometría (Vanegas et al, 2013). Actualmente es el campo que ha comenzado a hacer tendencia transformadora en la educación matemática. Por tanto, la teoría de grafos puede ser desarrollada en la escuela secundaria, dado que no requiere de conocimientos anticipados, pero que si desarrolla estrategias que favorece la resolución de problemas (Nouche, 2008).

De manera intrínseca se han venido usando grafos en diversas asignaturas escolares de manera intuitiva (Lessner,2011). Dado el caso de la química orgánica en los dibujos de estructura moleculares, en la genética, la taxonomía por medio de árboles, siendo el caso del árbol genealógico, muy trabajado de hecho en la educación primaria y secundaria entre otros. Cabe anotar que seria muy relevante trabajar la teoría de grafos como actividad unificadora y una desafiante la formación teórica.

III. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Puede considerarse que la teoría de grafos es apropiada para desarrollar problemas que pueden darse en un contexto autentico, además de no requerir en este sentido saberes previos muy elaborados o profundos con respecto al tema, pero si puede vincular otros saberes construidos que facilitan comprender esta teoría.

Por su parte, la teoría de grafos no se trabaja en la escuela secundaria, pero sin embargo puede brindar oportunidades de aprendizaje y de desarrollo del pensamiento matemático, debido a que desarrolla habilidades vinculadas al desarrollo de problemas retadores.

En este estudio se pretende construir conceptos, haciendo uso de la modelación geométrica a partir de problemas retadores, que vinculan la teoría de grafos. En este sentido, se propone la siguiente pregunta para estudiar los avances y resultados que dan respuesta a la misma ¿Cómo los estudiantes por medio del modelado geométrico pueden construir el concepto de camino y ciclo hamiltoniano?

IV. MÉTODO DE ESTUDIO

A. Diseño del estudio

Este estudio se desarrolla con estudiantes de secundaria, de la Institución Educativa Técnica Departamental Nuestra Señora de la Salud (Colombia). Se fundamenta en un paradigma y enfoque cualitativo.

Por tanto, está centrado en los sujetos de forma integral y completa, abarcando un proceso de indagación inductivo, de interacción con los participantes y bajo el análisis de los datos descriptivos recolectados, a raíz del avance de los acontecimientos.

En relación con el diseño se toma como eje primordial la acción participativa, que según Minerva (2006) es considerada como "…un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación de éste, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad".

Este trabajo evidencia una planeación organizada, en relación con las acciones que van a desarrollar los participantes, cuyo objetivo es cambiar la realidad, ofreciendo una oportunidad para mejorar y fortalecer la construcción del saber matemático en los estudiantes que participan, así como, transformar y enriquecer el quehacer del docente.

La muestra seleccionada es de carácter no probabilística por conveniencia, atendiendo características específicas del grupo, además de la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de la investigadora. En este sentido, se trabaja con 30 estudiantes del grado octavo, con edades entre los 13 y 15 años.

Se le presentó a los estudiantes dos problemas en papel creados por la docente, el cual contiene orientaciones específicas para centrarlos en la tarea. Por otra parte, se hace la presentación de la actividad, abordando el objetivo a alcanzar y las disposiciones generales con respecto a las dinámicas de la clase, además de destacar la importancia de trabajar problemas retadores, así como el trabajo en equipo (tres estudiantes) organizados de manera aleatoria.

Se inicia el desarrollo de la actividad propuesta acercando al estudiante al tema y al contexto en el que ubica la actividad, mostrando el mapa general del municipio y ubicando lugares.

Brigada de vacunación

PROBLEMA 1: En Supatá se hacen brigadas de vacunación a niños menores de 10 años. Se ha determinado que al menos vive un niño en una calle o carrera del municipio, por tanto, la alcaldía dispone de un vehículo para transportar los insumos y la enfermera. Se quiere vacunar 10 niños por día. ¿Cuál sería el desplazamiento adecuado que debe realizarse en un día?

Ten en cuenta:

– Escoger la ruta más corta
– Debe pasar por calles y carreras
– Puede empezar el desplazamiento en un lugar del municipio y terminar en otro.
– El tamaño de las calles y carreras en la ilustración 2 son proporcionales a los reales del mapa de Supatá.
– Piensa en ¿Qué características debe tener el desplazamiento?, ¿qué información necesitas para resolver el problema?

PROBLEMA 2: En el segundo día de la brigada es necesario empezar y terminar la vacunación en el mismo lugar, como mínimo se debe vacunar 6 niños, aunque pueden ser más.

¿Cuál sería el desplazamiento adecuado que debe realizarse en ese día?

Para una mayor comprensión, se presenta el mapa del municipio (ver figura 2), además del mapa general de vías con calles y carreras elaborado en un software on line para grafos (ver figura 3), el objetivo fue presentar al estudiante grafos sin decírselo y que en este mismo enfoque puedan encontrar respuestas a los problemas, en esta dirección las calles y carreras son las aristas, la intersección de estas los vértices, sin embargo, esto lo sabrían los estudiantes por descubrimiento.

Fig. 2: Mapa del municipio de Supatá (Google Maps, 2022)

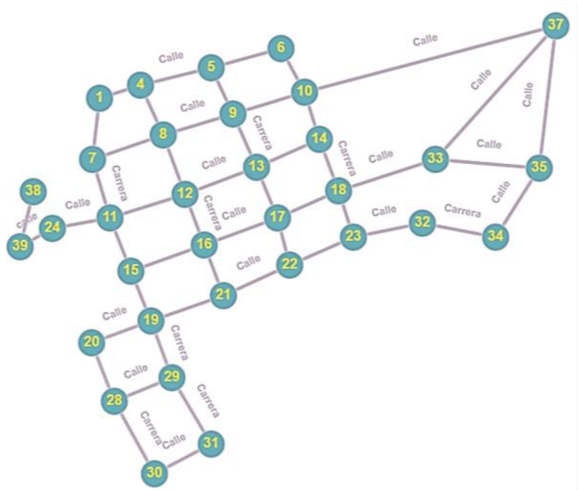


Fig. 3: Mapa de vías municipio Supatá

Con respecto al problema uno se pretende que los estudiantes puedan construir el concepto de un camino hamiltoniano y el problema dos se quiere que los estudiantes construyan el concepto de ciclo hamiltoniano, para ello, debe cumplir las características solicitadas para alcanzar solución a estos, aunque los estudiantes no tienen ningún conocimiento previo sobre grafos, pueden entrarse en el tema. Lo que se pide es la ruta más corta, por tanto, ellos pueden realizar la suma de los valores de las aristas apoyándose en la figura 3.

Los datos fueron recolectados por medio de la grabación de voz de algunas conversaciones realizadas con los grupos que fueron analizadas por medio de un software, las exposiciones hechas por los estudiantes tomando uno a uno los registros al respecto, las evidencias entregadas en físico que fueron revisadas minuciosamente, una bitácora de trabajo de campo en la cual se escribió los hallazgos más relevantes y de los tiempos empleados por los estudiantes en cada uno de los ciclos del modelado y una encuesta escrita a estudiantes que contiene elementos sobre la cognición y metacognición de los estudiantes.

V. RESULTADOS

La práctica se desarrolla en dos clases de matemáticas cada una de dos horas, cada equipo construye diferentes desplazamientos con la intensión de conseguir el más cortos, toman diferentes carreras y calles del municipio tratándose de ubicar en los lugares, les tomó realizar las medidas de todas las rutas trazadas para poder llegar a la más corta, los estudiantes tomaron ventaja del reconocimiento de las zonas del municipio y también de esta manera se hacían algunas ideas sobre las medidas, otros por su parte buscaron el mapa por Google Maps para concentrarse en las distancias de las calles y carreras. Se pide a los grupos que elaboren un cartel con sus respuestas, las cuales son socializadas en plenaria, en total trabajaron 10 grupos de tres estudiantes.

Luego de terminar el trabajo con los estudiantes, se les solicita que consulten y que determinen como podemos llamar esos desplazamientos en matemáticas, se les da la posibilidad que en el siguiente encuentro para que puedan decir que hallaron al respecto y así, luego de lo trabajado fundamenten los conceptos de camino y ciclo.

Los modelos de rutas construidos por los estudiantes son diversos, cada equipo de trabajo toma diferentes zonas del municipio, por lo general las más reconocidas por ellos dentro del municipio cerca a sus viviendas o calles y carreras que recorren constantemente, porque esto les permitía tener una idea global de cual podría ser la ruta más corta.

En este sentido cuando se trabajan contextos auténticos que tienen conexión con los estudiantes, les permiten una mayor visualización de la realidad para poder matematizar un problema, por otra parte, este tipo de problemas presentado al estudiante le brinda la oportunidad de aplicar los saberes construidos a diversos contextos mostrando oportunidades de aprendizaje muy valiosas.

Tabla 1 Categorías en la construcción de conceptos en un modelo geométrico

Criterios para camino y ciclo hamiltoniano	
Vértice - arista	Vincula notaciones usadas para reconocer el vértice de un grafo.
Medida	Considera la longitud de las vías para determinar la ruta más corta
Pertinencia	Incluye la determinación sobre la congruencia del grafo elaborado.
Complejidad	Relaciona el alcance de la elaboración de un grafo que aporte a la solución.
Camino	Enlaza la capacidad de elaborar un camino hamiltoniano que apoya a la solución del problema.
Ciclo	Reúne el alcance de establecer un ciclo hamiltoniano que da interpretación a la solución.
Sentido	Vincula el proceso de dar sentido a su experiencia y alcanzar conocimientos de una disciplina.
Subgrafo	Relaciona el alcance para reconocer los subgrafos que pueden darse de un grafo.
Generalización	Concibe la capacidad de poder relacionar el modelo en otros contextos.

En la figura 4 se muestra un modelo construido por un grupo para seleccionar la ruta más corta, una de sus características relevantes es que muestra la construcción de un grafo el cual representa un camino corto medido con regla en centímetros, aquí los estudiantes presentan un camino hamiltoniano, sin embargo, en comparación con los demás grupos no es la ruta más corta.

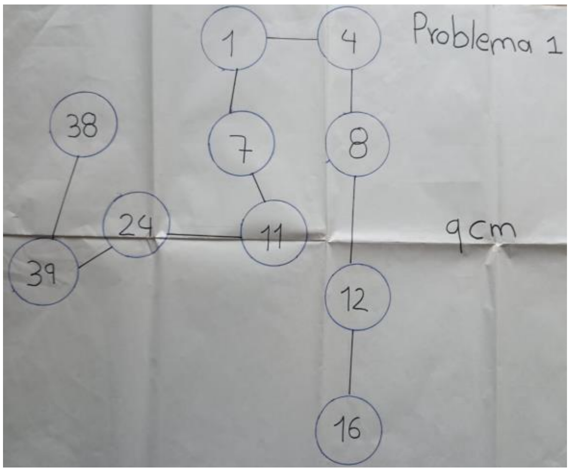


Fig. 4: Modelo 1 de camino hamiltoniano

En la figura 5 los estudiantes presentan la ruta más corta que se puede realizar dentro del mapa del municipio y que cumplía con las características, sin embargo, pasaban dos veces por la misma intersección de una calle y una carrera. En este sentido, pasan por un mismo vértice dos veces lo cual, no les permite obtener un camino hamiltoniano, este fue un punto importante debatido en la validación de modelos, varios grupos se dieron cuenta que la ruta escogida no era la mas corta, por otro lado que se pasaban varias veces por las intersecciones o vértices de hecho pasaban dos veces por la misma calle o carrera (arista) situación que les admite darse cuenta que en esto podría tomar más tiempo en el desplazamiento y gastar más gasolina del auto.

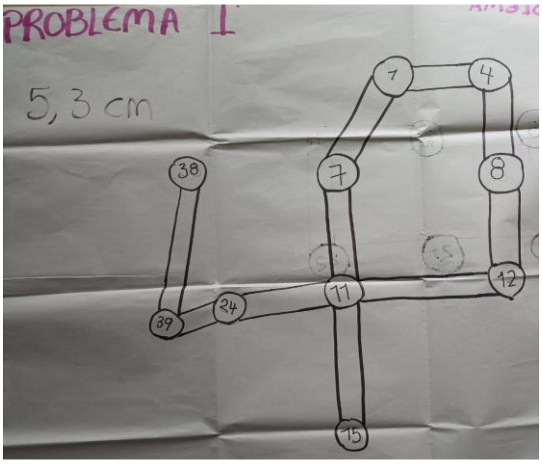


Fig. 5: Modelo que no es camino hamiltoniano

En la figura 6 los estudiantes no determinan la ruta mas corta, pero tiene una característica fundamental y es pasar por todos los vértices del grafo que delimita la zona seleccionada, lo que intentan hacer es reconocer cuales calles y carreras son las mas cortas de todo el municipio, sin embargo eso no fue garantía para dar la mejor solución al problema planteado, buscaron calles y carreras paralelas con las mismas medidas, buscando garantizar la mejor respuesta, por tanto los estudiantes vinculan a la matematización el paralelismo que se da en un rectángulo según lo expresado en la exposición realizada para presentar los modelos.

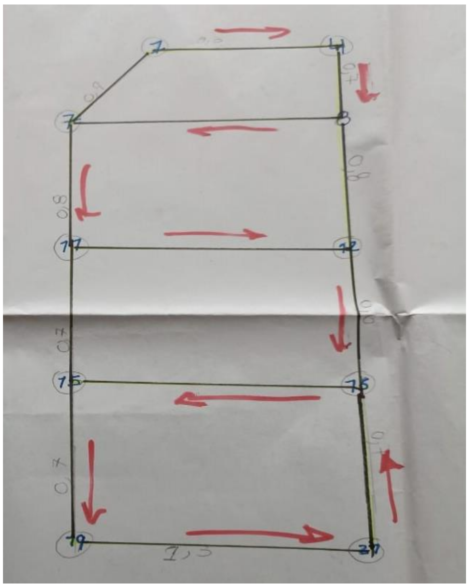


Fig. 6: Modelo 2 de camino hamiltoniano

En la figura 7 encontramos elementos geométricos que tiene relación con el perímetro de la zona seleccionada y como los estudiantes toman este concepto para aplicarlo a un problema de matemática discreta a la hora de matematizar. Los estudiantes construyen un ciclo hamiltoniano, efectivamente saliendo y llegando al mismo vértice y pasando por los vértices una sola vez, pero solo puede vacunar un grupo pequeño de niños en este caso, al analizarlo al momento de la validación se dan cuenta que no cumple con la condición y usarían más gasolina y tiempo de desplazamiento

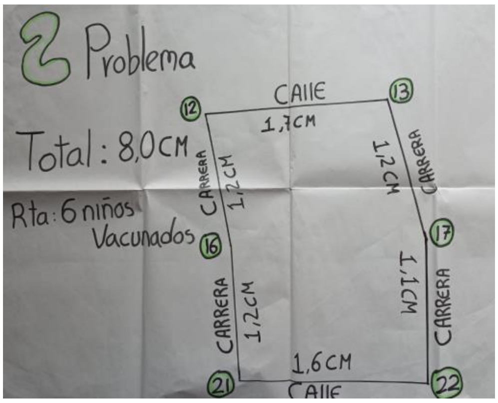


Fig. 7: Modelo 1 de Ciclo hamiltoniano

En la figura 8 se muestra el modelo de un grupo que tiene la ruta mas corta, pero no cumple con el concepto de ciclo, debido que deja sin recorrer algunos vértices, aunque vacunan 8 niños y el recorrido es el mas corto de los presentados por los estudiantes.

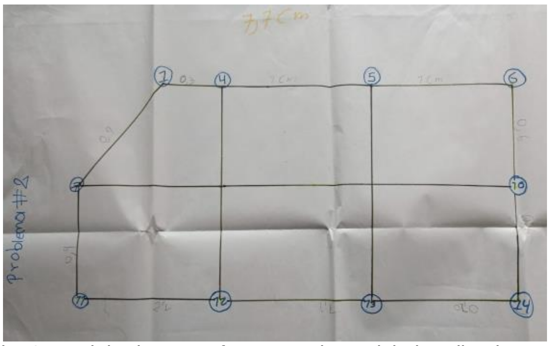


Fig. 8: Modelo de un grafo que no tiene ciclo hamiltoniano

En la figura 9 se evidencia un modelo de ciclo que cumple las características que satisfacen la respuesta al problema, es un grafo que tiene un ciclo hamiltoniano que representa la ruta mas corta y la mínima cantidad de niños vacunados, empieza y termina en el mismo vértice. Además de que puede salir de cualquier vértice y llegar al mismo, en este sentido los estudiantes aseguran que en ese modelo pueden planearse diferentes desplazamientos que cumplen las características del problema. Los estudiantes toman elementos geométricos como el perímetro de una figura plana para establecer cual es la ruta más corta.

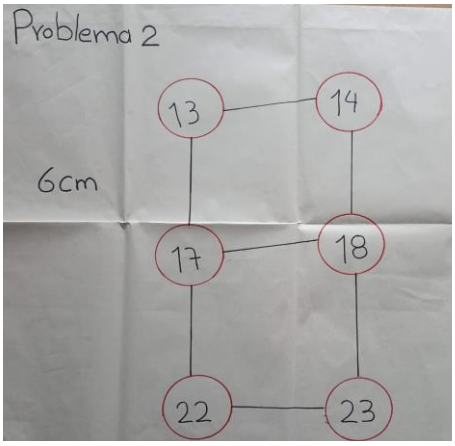


Fig. 9: Modelo de ciclo hamiltoniano

Con respecto al trabajo desarrollado con la modelación geométrica se analizan los resultados encontrados con respecto a los ciclos de modelado, que en este caso se toman los propuestos por Brown y Stillman (2016):

- Simplificar: los estudiantes idean modelos y elige matemáticamente la manera de dar representación de este.
- Matematizar: los estudiantes hacen uso de sus conocimientos matemáticos y de estrategias heurísticas para dar solución a un problema matemático.
- Interpretar: los estudiantes relacionan los resultados matemáticos con un problema extra-matemático, de tal manera que puedan dar generalización en base a situaciones específicas.
- Validar: los estudiantes analizan sus soluciones en relación con sus pares y reflexiona sobre los aciertos o las oportunidades de mejora y reconocen que otras soluciones al problema pueden ser posibles.

En cuanto al ciclo de simplificación los grupos idearon mentalmente diversos modelos que fueron plasmando en hojas de papel, utilizaron diferentes formas de representación de las cuales iban descartando porque no se ajustaba con los pedido en los problemas, aseguran que para poder llegar a esta fase tuvieron que comprender el problema, leyendo algunas veces y observando detenidamente los mapas que se le dio, aluden a que el problema esta enmarcado en un contexto autentico reconocido por ellos y que esto les haría más fácil buscar la solución.

Con respecto a la matematización los estudiantes hacen uso de sus conocimientos geométricos para buscar solución a los problemas relacionados con las matemáticas discretas, en cuanto al problemas dos toman el concepto de perímetro de una figura plana para buscar un ciclo hamiltoniano, que representa la ruta más corta, es así como representan diferentes polígonos irregulares y en algunos usan las nociones de paralelismo, además toman conocimientos sobre métrica haciendo uso de medidas a escala.

A la hora de interpretar los resultados de los problemas los estudiantes expresan que pueden aplicarse las matemáticas y la geometría para dar solución a problemas en contextos reales. Por tanto, se les pregunta que si tuviéramos el mapa del departamento podrían encontrase solución a problemas similares, ellos aseguran que puede encontrase diversos modelos que representan la respuesta, se les propone encontrar la estrategia para poder generalizarla y así encontrar rápidamente una respuesta, algunos de ellos afirman que se puede revisar en el mapa polígonos con menor numero de lados y aquellos con lados con menor medida, también sostienen que deben asegurarse de no pasar dos veces por la misma calle o carrera.

Para validar los modelos también se utiliza el software en línea Graphonline.ru, cada grupo representa sus modelos y validan si es un camino y si es un ciclo hamiltoniano, siendo capaces de identificar sus acierto y oportunidades de mejora (ilustración 1 y 2).

Ilustración 1 validación de modelo geométrico-camino hamiltoniano

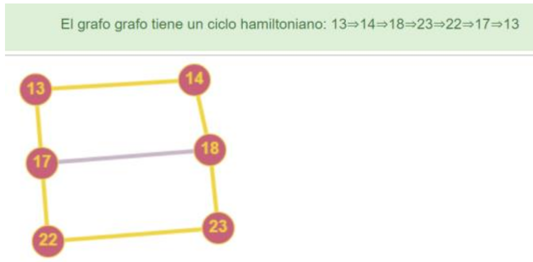


Ilustración 2 validación de modelo geométrico-ciclo hamiltoniano

Los estudiantes pueden reconocer las diferencias entre su modelo y el modelo de sus pares (ver figura 11).

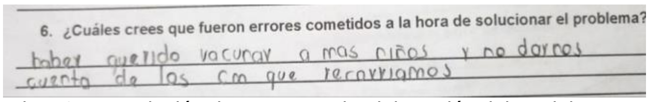


Fig. 10: Descripción de errores en la elaboración del modelo

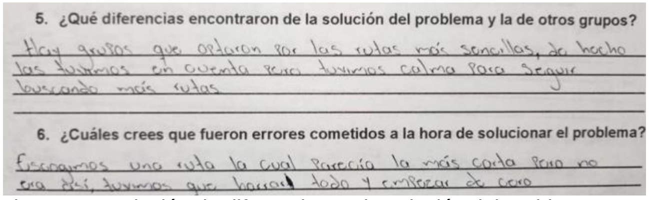


Fig. 11: Descripción de diferencias en la solución del problema

Por otra parte, pudieron reconocer que existían diversas respuestas a los problemas abordados, las rutas establecidas no fueron iguales. En este sentido, sus pares construyeron diversos caminos y ciclos, así se podían encontrar rutas diversas pero que su distancia eran la misma (ver figura 11).

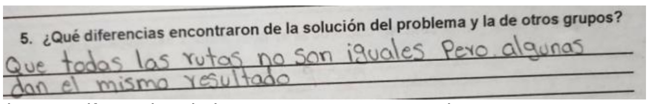


Fig. 11: Diferencias de las respuestas encontradas por un grupo

VI. DISCUSIONES

Se evidencia una conexión entre el modelado geométrico y los problemas reales. Por tanto, los estudiantes logran utilizar conceptos geométricos para aplicarlos a la solución de problemas reales, que tienen relación con la teoría de grafos.

Es interesante observar, cómo los mediadores visuales dentro de un problema retador toma vital importancia para fase de comprensión. Por su parte, los estudiantes reconocer de manera significativa que las representaciones les permite centrase en el problema más rápidamente y así poder tomar decisiones para matematizar. En este sentido, no se requieren conocimientos previos de la teoría de grafos para el abordaje del problema (Greefrath et al, 2022), sin embargo, todas las presentaciones y la estructura del problema debe aportar a la comprensión y así poder pasar por todas las fases del modelado, las cuales permitirán el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

Los estudiantes pueden reconocer vértice y arista e incluso representar un grafo en sus respuestas, sin reconocer esta teoría, todos lo grupos desarrollan la habilidad de identificar estos conceptos aun siendo llamados en sus lenguajes cotidianos como intersecciones, calles o carreras. En este sentido, vinculan los conceptos luego de que se les orienta sobre sus verdaderos nombres en la teoría de grafos, los relacionan con facilidad al problema planteado y a los mediadores visuales dados. Por su parte, los estudiantes se interesan más por el concepto de arista que por el de vértice, dado que las aristas se vinculan directamente en la obtención de la ruta más corta que es una condición relevante en el problema.

En cuanto a los conceptos de camino y ciclo hamiltoniano los grupos tienen la capacidad de representarlos, en este caso el modelado se da dentro del proceso cognitivo como intencional en un campo extra-matemático, aunque en este caso no se descarta que lo estudiantes lleguen a los modelos en el proceso cognitivo fortuito. Sin embargo, no todos los grupos pudieron representar caminos ni ciclos hamiltonianos, dado que no tuvieron en cuenta características importantes de los problemas y que además no usaron contenido teórico de grafos. Por otra parte, dado el contexto del problema puede vincularse el concepto de subgrafo debido a que las rutas establecidas son subgrafos del grafo dado, se puede considerar que a partir de problemas retadores se pueden construirse diferentes conceptos de la teoría de grafos.

VII. Conclusiones

La teoría de grafos no forma parte del contenido del currículo colombiano, sin embargo, dentro de los procesos para la enseñanza y aprendizaje se contempla la modelación. En este sentido, la teoría de grafos permite fortalecer los procesos de modelado con el fin de desarrollar el pensamiento matemático. A su vez puede considerarse esta teoría como una oportunidad de desarrollar habilidades como la exploración, el descubrimiento y el razonamiento relacionadas con la matemática discreta (Vanegas et al, 2013).

Por su parte, la teoría de grafos y la modelación son un complemento potente que favorece el desarrollo de problemas retadores en contextos reales auténticos. En este caso, los problemas trabajados fueron interesantes dado a los procesos heurísticos que se llevaron a cabo en cada uno de los grupos, así como los procesos de modelado en a la resolución de problemas parte fundamental en la educación matemáticas en la escuela.

Se evidencia que el trabajo de los estudiantes fue motivador, de tal forma que los grupos construyen modelos haciendo uso de la modelación geométrica, es ente sentido usan conocimientos previos sobre geometría para apoyar la solución de un problema de matemática discreta. Por ende, se percibe una relación entre el modelado geométrico y la elaboración de modelos discretos en problemas extra-matemático. Por otra parte, los estudiantes muestran comprensión de una situación a partir de los conocimientos ya construidos creando sentido a una situación real (Odden & Russ,2019), considerando la tarea como la oportunidad de construir nuevos saberes utilizando sus intuiciones y experiencias propias.

Atendiendo que los estudiantes no tenían ningún tipo de conocimiento sobre la teoría de grafos cuando se desarrolla la actividad, se comprueba una apropiación del contenido de camino y ciclo hamiltoniano con avances significativos en la compresión, pertinencia y razonamiento, la elaboración de los modelos es un avance muy revelador y que puede mejorarse hasta llegar a modelos más complejos en la resolución de problemas como llegar hasta la teoría de grafos geométricos.

Por su parte, los procesos cognición que se desarrollan con el modelado son importantes para la construcción de saberes de la matemática discreta y pueden entenderse en base a la metacognición que se adelanta con los estudiantes, estos dos procesos permiten conocer como los estudiantes construyen conocimiento y cuales son las partes más débiles en el proceso y como deben mejorarse, en este caso los estudiantes desarrollan habilidades del lenguaje matemático para expresar sus ideas y saberes.

Referencias

[21] M. Abascal, I. Ornelas, E. De Jesús, *"Pensar en matemáticas"*, 2015.

[22] A. Schoenfeld, "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint)". *Journal of Education*. p. 7, 2016.

[23] N. Rigelman, "Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role". *Teaching Children Mathematics.* p. 311, 2017.

[24] N. Delima, "A relationship between problem solving ability and students' mathematical thinking". *Infinity Journal*.p.25,2017.

[25] J. Cai, "Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study". *International journal of mathematical education in science and technology*. p.725, 2003.

[26] A. Watson, "Instances of Mathematical Thinking Among Low Attaining Students in an Ordinary Secondary Classroom". *The Journal of Mathematical Behavior*.p.469,2001.

[27] F. Zapata, N. Cano, & J. Villa, "Art, and geometry of plants: Experience in mathematical modelling through projects". *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 594, 2017.

[28] P. Herbst, & N. Boileau, "Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake". *In Visualizing Mathematics Springer*, Cham. p. 280, 2018.

[29] K. Bliss, K. y J. Libertini, "Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática". *Gaimme. Society for industrial and applied mathematics* (SIAM). p.6,2021.

[30] G. Stillman, G. Kaiser, & C. Lampen, Mathematical modelling education and sense-making. *Springer*. p.16, 2020.

[31] T. Recio, PISA y la evaluación de las Matemáticas. *Revista de Educación.* España. p. 267,2007.

[32] S. Vilanova, S., M. Rocerau, G. Valdez, M. Oliver, S. Vecino, P. Medina, & E. Álvarez, La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de educación*, 4(1), p.47- 48,2001.

[33] G. Polya, Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, *Combined Edition. New York: John Wiley & Sons*, p. 117, 1981.

[34] F. Minerva, El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia, p. 116, 2006.

[35] J. Vanegas, S. Henao & J. Gustin. La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. 2013.

[36] F. Nouche. Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria. Premisa, 10(39),2008.

[37] T. Braicovich, M. Oropeza y V. Cerda. Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. Memorias del II REPEM (pp. 70-76). La Pampa, Argentina: Editorial de la Universidad Nacional de la Pampa, 2008.

[38] D. Smithers. Graph theory for the secondary school classroom (Doctoral dissertation, East Tennessee State University), 2005.
[39] D. Lessner. Graph Theory in High School Education. *Department of Software and Computer Science Education*, *Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague, Czech Republic*. 2011.

La Matemática Discreta en aulas multigrado de educación básica primaria

Mayra E. Parra
*Universidad Antonio Nariño, maparra72@uan.edu.co

***Abstract*— This study describes a discrete mathematics teaching and learning experience in a multigrade classroom. These classrooms are in charge of a teacher who is in charge of attending more than two grades at the same time. Due to the need to serve these classrooms, which generally are in rural areas, with limited economic resources, teachers must be more creative and recursive in these pedagogical centers to achieve a more dignified and integrated training. The objective of this research is to arouse in students the interest in learning mathematical topics by solving problems contextualized to trades, particularly in the trade of being an astronaut, to understand and solve basic problems of graph theory. The research approach is qualitative with a descriptive approach. The methodology is organized in four steps: preparation, application, participants, data collection and data analysis. These activities will be applied to 10 multigrade students who are in the 3rd, 4th and 5th grades of primary school.**

The results found show the great potential that these classrooms have to accelerate learning in the development of mathematical thinking by working in pairs, proposing a general proposal with differentiated activities based on trades, arousing curiosity and motivation in the teaching and learning process. The application of strategic games and topics related to discrete mathematics help to make the right decisions, necessary to obtain better results in the future

***keywords*— Multigrade classroom, graphs, strategy, trades.**

***Resumen*— Este estudio describe una experiencia de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en el aula multigrado. Estas aulas están a cargo de un docente que es el encargado de atender más de dos grados al mismo tiempo. Debido a la necesidad de atender estas aulas, que, por lo general, se encuentran en sectores rurales, con limitados recursos económicos, los docentes deben ser más creativos y recursivos en estos centros pedagógicos para lograr una formación más digna e integrada. El objetivo de esta investigación es despertar en los estudiantes el interés por aprender temas matemáticos por medio de la resolución de problemas contextualizado a los oficios, particularmente en el oficio de ser astronauta, para comprender y resolver problemas básicos de la teoría de grafos. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo con un enfoque descriptivo. La metodología se organiza en cuatro pasos: preparación, aplicación, participantes, recolección de datos y análisis de datos. Estas actividades se aplicaron a 10 estudiantes multigrado que cursan 3°, 4° y 5° de primaria.**

Los resultados encontrados evidencian el gran potencial que tienen estas aulas para acelerar el aprendizaje en el desarrollo del pensamiento matemático trabajando entre pares, planteando una propuesta general con actividades diferenciadas basada en los oficios, despertando curiosidad y motivación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La aplicación de juegos estratégicos y temas relacionados con la matemática discreta, ayudan a tomar decisiones acertadas, necesarias para obtener mejores resultados en el futuro.

***Palabras clave*— Aula multigrado, grafos, estrategia, oficios.**

I. INTRODUCCIÓN

La Matemática discreta es una rama de las matemáticas que no está incluida en los currículos de educación básica primaria y menos para aulas multigrado. Teniendo en cuenta que, en la actualidad, la matemática discreta se constituye fundamental para la informática, las ciencias y las matemáticas, debido al fuerte vínculo entre el pensamiento algorítmico y pensamiento matemático, combinación importante para el desarrollo del pensamiento computacional [1]. Por esta razón, es importante implementar espacios en las instituciones que fortalezcan el proceso de enseñanza aprendizaje y permita la interacción, el análisis, los juegos estratégicos, y demás actividades retadoras y motivantes que nos brinda la Matemática Discreta.

Algunos investigadores proponen para el aula multigrado articular diferentes asignaturas en base a una propuesta general con actividades diferenciadas [2]-[12], por lo tanto, se vincula la propuesta general en el oficio de ser astronauta (elegido por los estudiantes multigrado), aumentando la motivación para aprender matemáticas.

Una de las teorías en educación matemática que refleja la convicción anterior, es la de Hans Freudenthal, al ver la necesidad de promover cambios significativos en la enseñanza formalista, mecanicista y algorítmica de las matemáticas en el aula. La Educación Matemática Realista (EMR) le da un papel protagónico a los datos empíricos e ideas que se generan tras una situación, antes que los conceptos y teorías matemáticas. Freudenthal criticaba fuertemente las “Matemáticas modernas” por aplicar lo que llamaba él “inversión antididáctica”, situaciones en donde prevalecía iniciar por los conceptos [13]. La EMR busca minimizar la brecha entre el aprendizaje teórico y práctico (real) de las matemáticas, por esta razón propone relacionar el saber matemático con actividades que conlleven a los estudiantes a un análisis profundo y creativo de las matemáticas que incentive el diálogo, la reflexión y la negociación. Estas actividades deben implementar un proceso gradual e interactivo entre pares, guiado por el docente.

La EMR se consolida con un proceso evaluativo cualitativo, continuo y ordenado, enfatizando en la construcción matemática [14]. Se tienen algunos aspectos en cuenta como:

La creatividad para encontrar soluciones.

La calidad en la argumentación y justificación.

Calidad y profundidad del razonamiento y modelado.

Este proceso se logra cuando el docente propone problemas abiertos, creando una cultura en el aula de respeto, colaboración, investigación y curiosidad.

Con una de las actividades propuestas (Juego estratégico) se quiere describir la capacidad que tienen los estudiantes en la resolución de problemas, tomando algunos indicadores de los componentes commognitivos (mezcla de las palabras comunicación y cognitivo). Dentro de indicadores tenemos el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina [15], basado en una investigación cualitativa con enfoque descriptivo. El estudio se organiza en los siguientes pasos: preparación y aplicación, participantes, recolección de datos, análisis de datos, resultados y recomendaciones.

Para la actividad, se propone la solución de seis retos y dos juegos, uno de cartas con temas específicos de la propuesta general y el otro adaptado del juego “Toma dos”, llamado “Déjalo sin estrellas”, en el cual los estudiantes deben encontrar la estrategia ganadora. Este ejercicio incentiva el pensamiento matemático [16], en el cual, por medio de preguntas orientadoras, se lleva al estudiante del proceso de particularización (identificando aspectos en común de casos particulares) para transferir propiedades que se cumplen de una situación u otra, hasta encontrar el camino de la generalización (Ver Fig. 1).

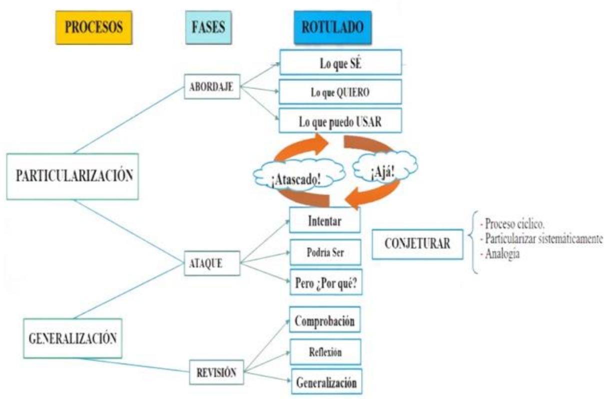


Fig. 1. Pensamiento Matemático por Mason, Burton & Stacey (1982)

Generalizar significa descubrir alguna ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); donde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema [17]. Algunos educadores matemáticos reconocidos [18]-[22], ven la importancia de la generalización como proceso fundamental para descubrir y construir matemáticas.

II. MATERIALES

Para la realización de la secuencia didáctica “Ser Astronauta”, se usarán algunos materiales, que pueden ser adaptados según los contextos. Los materiales necesarios para aplicar la actividad son: computador, video beam, sonido, hojas carta, fotocopias, tijeras, colbón, piedritas pintadas (amarillo, azul, blanco, gris y naranja), juego de cartas de Súper constelaciones y súper mundos, plantilla de nave espacial, colores, sistema solar, rejilla de evaluación, diagrama de barras (semáforo del aprendizaje) lápiz y borrador.

III. MÉTODO

El ejercicio se llevó a cabo a partir de estos cuatro pasos:

A. Preparación y aplicación

En esta etapa se organizó la secuencia didáctica que lleva por *objetivo* desarrollar en los estudiantes habilidades que contribuyan a la resolución de problemas matemáticos retadores, a partir del oficio de ser astronauta, fortaleciendo valores sociales como el cooperativismo, la sana convivencia y la colaboración mediante la interacción lúdica, la teoría de grafos y otras aplicaciones. En el organizador gráfico se muestran las relaciones con otras asignaturas mostrando la interdisciplinariedad y articulación con otras áreas (Ver Fig. 2).

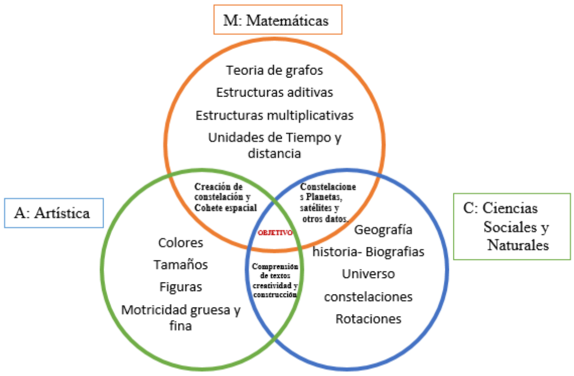


Fig. 2: Organizar gráfico de la actividad

Podemos observar que las asignaturas que acompañaran nuestra secuencia son Matemáticas (conjunto M), Ciencias Naturales y Sociales (conjunto C) y Artística (conjunto A). Cada uno de ellos lleva en su interior las temáticas a trabajar según el área y en sus intersecciones el producto o evidencia articulada con las otras asignaturas.

Por ejemplo:

M∩A∩C= {*objetivo de la secuencia didáctica*}

M∩A = {Creación de constelaciones y cohete espacial}

A∩C= {Comprensión de textos, creatividad y construcción}

M∩C= {Constelaciones Planetas, satélites y otros datos}

La organización de la secuencia se lleva a cabo en cinco etapas: la motivación o saberes previos, la estructuración, la práctica, transferencia y cierre.

En la primera etapa, saberes previos o motivación, se realizan algunas preguntas orientadoras referentes al oficio de ser astronauta, su diario vivir, fortalezas, dificultades, la NASA, el universo, representantes masculinos y femeninos del oficio, entre otros. Los estudiantes previamente habían investigado, y participaban con sus apuntes o realizando preguntas que eran retroalimentadas entre todos.

En la segunda etapa, la estructuración se responden las preguntas anteriormente planteadas, indicando años, geografía, historia y mostrando algunos videos sobre la vida de los astronautas, el universo y las constelaciones. En estos espacios de estructuración se aprovecha para ir planteando preguntas con diferentes estructuras aditivas y multiplicativas, con respecto a los años y las diferentes unidades de tiempo, distancia y velocidad que nos brindan los datos investigados. Igualmente se comparte el tema de las constelaciones analizando el conjunto de estrellas que forman figuras, animales o cosas. Se muestran las constelaciones zodiacales, indicando las fechas y relacionando a cada estudiante con la constelación correspondiente a su nacimiento. Cada constelación la relacionamos como un grafo, en donde las estrellas son los vértices y las conexiones imaginarias son las aristas (Ver Fig. 3). También, se construye la matriz de adyacencia del grafo (constelación), nombrada por los estudiantes como el “arreglo de vecinos”, en donde se indica en sistema binario, con “1” (si hay conexión) o “0” (si no hay conexión).

Fig. 3: Relación de la constelación con la teoría de grafos.

Se realizan algunas constelaciones sencillas, con la ayuda de todos a modo de ejemplo (vértices, aristas y matriz de adyacencia). A los estudiantes se les habla en los términos (estrellas, líneas imaginarias y arreglo de vecinos).

Este espacio se aplica en forma de plenaria, donde todos los estudiantes multigrado participan y se tiene una propuesta general.

En la tercera etapa, se organizan actividades individuales, asignando a cada estudiante según su grado. Después de terminada la actividad, el ejercicio es intercambiado con otro compañero, es revisado, evaluado, retroalimentado por el par y con la supervisión del docente. Los estudiantes obtienen según su desempeño un color (rojo, amarillo y verde) que destaca la siguiente información en el Semáforo del aprendizaje:

- Verde: entendió muy bien el tema.
- Amarillo: le costó un poco entender el tema.
- Rojo: no entendió el tema. Necesita una retroalimentación más amplia.

Cada estudiante, recibe inmediatamente la nota cualitativa de la actividad y la referencia en el diagrama de barras según el reto correspondiente (Ver Fig. 4)

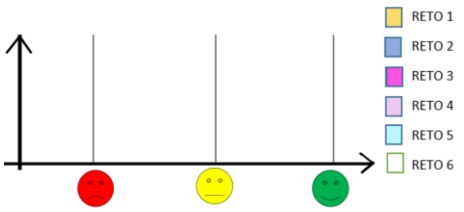


Fig. 4: Semáforo del aprendizaje – Reto Astronauta

La actividad será evaluada por medio de seis retos, cada uno de ellos será evidenciado con un rectángulo de un color (según el reto), con el nombre de cada estudiante y el grado, ubicado en las caritas de colores rojo, amarillo y verde (Ver Fig. 5).

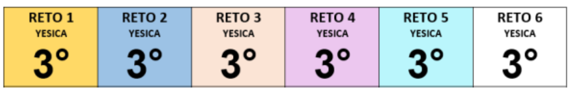


Fig. 5: Fichas rectangulares de los retos

Los retos a trabajar son los siguientes:

- **RETO 1**: Arreglo de vecinos
- **RETO 2**: Constelaciones camino Euleriano
- **RETO 3**: Constelaciones Ciclo Euleriano
- **RETO 4**: Constelaciones árbol o ciclo
- **RETO 5**: Constelaciones zodiacales
- **RETO 6**: Creando constelaciones

En la cuarta etapa, transferencia se realiza la asociación de las constelaciones con la teoría de grafos, se explica la temática, buscando tener un conocimiento, lenguaje técnico y algunas definiciones como camino, ciclo o bucle, matriz de adyacencia, camino Euleriano, ciclo Euleriano y grafo árbol.

Todos los retos anteriores se desarrollaron con integrantes del mismo grado.

Se construye un cohete con una plantilla diseñada y por medio de un juego de cartas (Súper mundos y Súper Constelaciones), diseñadas por Juegos y Modelos (aprendizaje divertido), especialmente para la temática, se comparan algunas medidas con valores enteros y decimales, para las constelaciones y los planetas (Ver Fig. 6). Estas medidas relacionan datos reales para los planetas y satélites como diámetro, distancia al sol, densidad, velocidad de escape, velocidad orbital y el año de descubrimiento. Para las constelaciones, medidas como porcentaje del cielo, estrella del asterismo, distancia a la estrella alpha, objetos messier y visibilidad dada en grados.

Fig. 6. Juego de cartas Súper Mundos y Súper Galaxias.

Por último, en la aplicación de actividades, se propone el juego "Déjalo sin estrellas", Juego adaptado de "Toma dos". Los estudiantes deben encontrar la estrategia ganadora siguiendo el siguiente Instrumento:

Juego: Déjalo sin estrellas

Inicio. Hay un montón de estrellas sobre una mesa. Este juego se juega con dos jugadores. Ambos jugadores saben cuántas estrellas hay en el montón.

¿Cómo jugar? Comienza un jugador. En el turno de un jugador, él debe tomar exactamente una o dos estrellas del montón. Los jugadores se alternan para jugar.

¿Quién gana? El primer jugador que no puede hacer su movimiento es el perdedor. El otro gana.

Estas instrucciones y un instrumento con seis problemas retadores (PR), orientadas para que los estudiantes pudieran ir analizando por casos y así lograran descubrir la estrategia ganadora.

Preguntas orientadoras:

PR1. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para "Déjalo sin estrellas" con una sola pila de 3 estrellas? Juega con tu compañero varias veces. ¿Quién gana con más frecuencia? Analiza la situación, juega el número de veces que sea necesario.

PR2. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 5 estrellas?

PR3. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 6 estrellas?

PR5. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de 9 estrellas?

PR6. ¿Alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para una sola pila de cualquier número de estrellas?

Para la quinta etapa, la de cierre, después de haber aplicado los retos, se socializa el diagrama de barras del Semáforo del aprendizaje para evaluar la secuencia. Se hace una autoevaluación (Ver Tabla I) y realizan sugerencias y opiniones entre todos.

TABLA I

PROCESO DE AUTOEVALAUCIÓN – RETO ASTRONAUTA

Aspectos a evaluar							**Sugerencia**
Desarrollo de las situaciones Retos	R1	R	R	R	R	R6	
Cumplimiento con el material solicitado.							
Trabajo en equipo							
Actitud en la clase							

Igualmente, tomando algunos indicadores de los componentes commognitivos como el uso de palabras, mediador visual, narrativa y rutina [15] (Ver Tabla II), para ser usado en la implementación del juego "Déjalo sin estrellas".

TABLA II.

INDICADORES DE LOS COMPONENTES COMMOGNITIVOS UTILIZADOS PARA RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Componente commognitivo	Indicador
Uso de palabras	Escribe y recita palabras, incluidos términos algebraicos, numéricos y semánticos, ecuaciones y otros términos utilizados por los estudiantes para resolver problemas matemáticos.
Mediador visual	Utiliza objetos como gráficos, imagines, diagramas y otros en la resolución de problemas matemáticos.
Narrativa	Describe hechos matemáticos tales como axiomas, definiciones y teoremas que son utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.
Rutina	Explica los pasos seguidos para resolver los problemas dados

B. *Participantes*

La población está conformada por los estudiantes de aula multigrado de primaria, de la Institución Educativa San Gerardo del municipio de Garzón (Huila) y la muestra de la investigación está constituida por 10 estudiantes de los grados 3°, 4° y 5° de la Sede rural y multigrado, El Batán.

C. *Recolección de datos*

El proceso de recolección de datos comenzó con la evaluación (Ver Fig. 4 y Fig.5) y autoevaluación de los Retos (Tabla I) y con la entrega de un instrumento para los juegos.

Para el proceso de evaluación de los seis primeros retos, se obtuvieron los siguientes resultados:

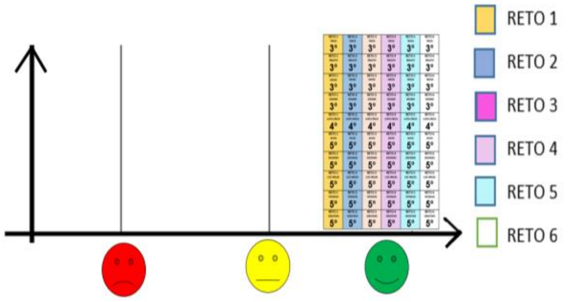


Fig. 7: Semáforo del Aprendizaje – Retos por cada estudiante

Para el proceso de autoevaluación, los estudiantes completaron la Tabla I, coloreado de verde todas las caritas, para los 10 estudiantes multigrado.

En los juegos, se organiza dos mesas con estudiante de los tres grados. Para el juego Súper Mundos y Súper constelaciones, los estudiantes comparaban las medidas y conocían los valores de cada una de los planetas, satélites y constelaciones. Ellos observaban a través de la práctica, cuáles eran los valores más grandes o pequeños de esas medidas y en siguientes partidas, de forma estratégica iban apostando a los mayores valores y, por ende, ganaban.

En el juego "Déjalo sin estrellas", los estudiantes entregaron el instrumento, solo dos de ellos contestaron todos los problemas retadores incluidos en el instrumento (un estudiante de 4° y uno de 5°), los demás, dejaban algunos problemas retadores sin contestar. Se puede indicar que para el PR1 contestó el 80% de los estudiantes, para el PR2 el 60%, para el PR3 el 40%, para el PR4 el 70%, para el PR5 el 50% y para el PR6 el 20%, evidenciando que a medida que el número de fichas aumentaba, eran menos los estudiantes que opinaban al respecto.

D. *Análisis de datos*

Los resultados obtenidos en la recolección de datos, muestran un proceso muy asertivo y positivo de los retos. Los estudiantes pueden evidenciar que, en las actividades evaluadas, el 100% de ellos entendió muy bien el tema y lo pueden analizar en el diagrama de barras apilado (Ver Fig. 7)

En cuanto a la autoevaluación, los estudiantes responden de manera positiva en la participación a los desarrollos de los retos, el cumplimiento del material solicitado, trabajo en equipo y actitud en clase, evidenciando un umbral alto de motivación frente a las actividades y temática propuesta del oficio de astronauta.

Para los juegos, los estudiantes tienen la oportunidad de jugar las veces que ellos quieran, esto les da la posibilidad de observar, explorar, percibir, tomar notas y hacer conjeturas. En el proceso de jugar a las cartas, los estudiantes lograron poner en práctica la comparación de números y diferentes medidas, se les realizo diferentes preguntas de estructura aditiva y multiplicativa, mostrando gran habilidad y estrategia de los estudiantes, para poder ganar.

Por último, teniendo en cuenta los indicadores de los componentes commognitivos utilizados para resolver problemas matemáticos (Ver Tabla I), se puede analizar lo siguiente en la aplicación del juego "Déjalo sin estrellas":

Uso de palabras:

Los estudiantes escriben y recitan palabras de su lenguaje cotidiano (Ver Fig. 8) como gana, el primero, el que empiece o inicia, el segundo, múltiplo de 3, pierde, par, impar, coge, oportunidad o ventaja, saca, desventaja y arreglos de tres fichas, entre otras. Usando el software Atlas ti, se muestran las coincidencias en las palabras más usadas.

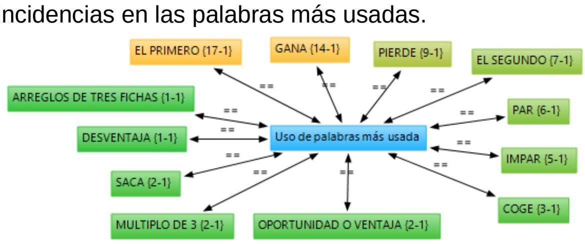


Fig. 8. Uso de palabras más usadas en el Déjalo sin estrellas, usando el software Atlas ti.

No incluyen términos algebraicos, ecuaciones y otros términos utilizados para resolver problemas matemáticos.

Mediador visual

Utilizan el material concreto (fichas) y a medida que avanza el juego logran organizarlas para que sea más fácil visualizar las que quedan en la pila. Pero en cuanto a la parte escrita no utilizan ningún objeto como gráficos, imágenes, diagramas, etc. Solo un estudiante logró ver la importancia de colocar las fichas en arreglos de 3.

Narrativa

Los hechos matemáticos se evidencian mediante conjeturas dando un orden a las ideas para llegar a la respuesta parcial del PR6.

Rutina

Los estudiantes explican por medio de ideas sueltas algunas conjeturas y solo 2 estudiantes muestran una respuesta generalizada que se acerca a la correcta.

Para concluir la actividad y conseguir la estrategia ganadora, se construyó la siguiente tabla, con la participación de todos y a manera de discusión (Ver Tabla II).

Primer Jugador - A

Segundo jugador – B

TABLA II

LA ESTRATEGIA GANADORA PARA CUALQUIER NÚMERO DE FICHAS

Jugador	Número no múltiplo de 3	Múltiplo de 3
A	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.
B	Tiene la desventaja. Pero debe estar pendiente si en algún momento puede dejar un múltiplo de 3 en el montón.	Tiene la ventaja. Debe tomar una o dos fichas para dejar en el montón un múltiplo de 3.

E. Resultados

El trabajo organizado en secuencias didácticas enfocado a los oficios, despierta gran interés y curiosidad en los estudiantes. El aula multigrado es un excelente espacio para generar aprendizaje de forma integral. Por medio de la aplicación de la matemática discreta y juegos estratégicos, evidenciamos algunos aspectos a mejorar en el desarrollo del pensamiento matemático que tienen algunos estudiantes de la Institución Educativa San Gerardo en la resolución de problemas. Generalmente en la institución educativa, no se plantea un trabajo de algebra temprana y esta es la primera vez que lo estudiantes se enfrentan a un problema retador de generalización. Se evidencia que la gran mayoría de estudiantes les costó llegar al PR6, por medio de ese hilo conductor planteado inductivamente y les hace falta retomar algunos componentes del álgebra temprana, como lo es la relación matemática, la estructura aritmética y la generalización. Aunque el ejercicio en la parte escrita se aproximó a algunas ideas en el proceso de generalización, la respuesta es parcial a lo esperado. Solo el 20% de los estudiantes evidenciaron un proceso de comprobación, revisión y generalización. Se logró el objetivo del instrumento 1, con la ayuda de todos, a modo de discusión y por medio de preguntas orientadoras (Ver Tabla II).

F. Recomendaciones

Se recomienda el trabajo de las secuencias didácticas planteando una propuesta general interdisciplinaria con actividades diferenciadas, incentivando el proceso de evaluación formativa, ya que facilita manejar varios grados simultáneamente y esto a su vez potencia la interacción, el trabajo en equipo, la autoevaluación y la aceleración de los aprendizajes.

Gestionar espacios en los centros educativos multigrado para que fortalezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta, permitiendo la interacción, el análisis, los juegos estratégicos, y otras problemas retadores y motivantes. Teniendo en cuenta el juego como estrategia de aprendizaje en aulas multigrado [3], [4], [7], [10], [23] - [33], implementado para facilitar el trabajo en equipo, la participación, el diálogo e impulsa la aceleración del aprendizaje, motivando a los niños más pequeños a enfrentarse con ideas y opiniones de niños de grados superiores.

Los juegos estratégicos son una herramienta apropiada para preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. Por esta razón es importante recomendar trabajar en el aula de clase lo siguiente:

- Utilizar diferentes recursos y representaciones, aceptar diversas formas de escritura, validar diferentes argumentos.
- Trabajar despacio, preparar preguntas para avanzar, permitir el diálogo y las conjeturas propias.
- Reconocer niveles de avance en cada etapa del proceso, en el razonamiento y la comunicación.
- Aplicar juegos estratégicos para que los estudiantes descubran la estrategia ganadora.

IV. DISCUSIÓN

El diseño de la clase de matemáticas basado en la Resolución de problemas, fortalece la interacción [8], [10], [26], [34]-[38], lo cual se manifiesta en este estudio en el aula multigrado y se potencia con la aceleración del aprendizaje.

El trabajo con problemas retadores en el aula multigrado permitió constatar el interés de los estudiantes por aprender matemáticas, la preocupación por aprender, por participar y colaborar en la construcción de las actividades, lo cual constituye un impacto positivo para vida de los estudiantes [8], [29], [39]-[43]. Articular diferentes asignaturas en base a una propuesta general con actividades diferenciadas [2]-[12] aumenta la motivación para aprender matemáticas.

V. CONCLUSIONES

Resulta apropiado asumir desde la teoría la EMR, los indicadores de los componentes commognitivos [15] (Ver Tabla II) y el pensamiento matemático [16] (Ver Fig. 1), como sustento teórico de esta actividad, para complementar el objetivo en la investigación. La integración de estas teorías constituye la lupa desde la cual se hace la interpretación de los datos y el análisis de los resultados.

En el desarrollo del trabajo se establece una metodología clara, flexible y puntual la cual contribuye a alcanzar el interés de los estudiantes por aprender temas matemáticos por medio de la resolución de problemas contextualizado a los oficios, particularmente en el oficio de ser astronauta, para comprender y resolver problemas básicos de la teoría de grafos.

Las secuencias didácticas enfocada a los oficios, despierta gran interés y curiosidad en los estudiantes, propiciando un excelente espacio para generar aprendizaje de forma flexible e integrada.

Las diferentes estrategias implementadas y el juego, conforman una metodología apropiada para la clase de matemáticas, que permiten tener estudiantes interesados, motivados y competentes hacia el aprendizaje de las matemáticas en el aula multigrado.

TRABAJOS FUTUROS

Estas planeaciones están adaptadas al interés y motivaciones de los niños de aulas rurales y multigrado inspirada en los oficios que ellos quieren profundizar o dedicarse cuando sean adultos. La idea es seguir adaptando propuestas generales interdisciplinarias, con actividades diferenciadas, potenciando el trabajo en equipo y la aceleración del aprendizaje entre pares.

AGRADECIMIENTOS

A los aportes, motivación y aprendizajes del Doctor Gerardo Chacón Chacón en el curso Matemática Discreta que brinda en la Universidad Antonio Nariño en el Programa de Doctorado en Educación Matemática. A los estudiantes multigrado de la sede rural El Batán (Garzón- Huila)

REFERENCIAS

[40] Tamayo, L. D. P., Lago, I. B., Hernández, W. G., & Abreu, D. R. (2021). Tendencias actuales del desarrollo del pensamiento computacional desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Discreta. Revista Cubana de Ciencias Informáticas.

[41] Mulryan-Kyne, C. (2004). Teaching and Learning in Multigrade Classrooms: What Teachers Say. The Irish Journal of Education / Iris Eireannach an Oideachais, 35, 5-19. Retrieved May 14, 2020.www.jstor.org/stable/30077492

[42] Vithanapathirana M. (2006) Adapting the primary mathematics curriculum to the multigrade classroom in rural Sri Lanka. In: LITTLE A.W. (eds) EDUCATION FOR ALL AND MULTIGRADE TEACHING. Springer, Dordrecht

[43] Juárez, D. B. (2012). Educación rural en Finlandia: experiencias para México. Revista CPU-e, (15), 140-154.

[44] González, Á. M., & Velandia, A. D. (2017). Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (Doctoral dissertation, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

[45] Le, H. M. (2018). The reproduction of 'best practice': Following Escuela Nueva to the Philippines and Vietnam. International Journal of Educational Development, 62, 9-16. https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2018.02.005

[46] Rockwell, E., & Rebolledo Angulo, V. (2016). Yoltocah Estrategias didácticas multigrado.

[47] Belleza, J. A., & Feliciano, E. L. (2018). Multi-Grade Intermediate Mathematics Teaching Schemes: The Case of Education in the District of Tublay, Benguet. Mountain Journal of Science and Interdisciplinary Research (formerly Benguet State University Research Journal), 78(2), 115-136.

[48] Hernández, A. L. (2021). Acercamiento a la realidad educativa en las escuelas del sector rural venezolano. Revista Scientific, 6(19), 264-278.

[49] Block Sevilla, David, Ramírez Badillo, Margarita, & Reséndiz Zamudio, Laura. (2019). ¿Cuánto pesa?, ¿Cuánto mide? Una experiencia didáctica en una escuela primaria unitaria. Revista mexicana de investigación educativa, 24(81), 537-564.

[50] Galván, L. y Espinosa, L. (2017). Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México. Sinéctica. Revista electrónica de educación. ITESO.;

[51] Jiménez, D. I. (2020). Ambientes de aprendizaje colaborativos y herramientas matemáticas para la resolución de problemas en multigrado. https://repositorio.beceneslp.edu.mx/jspui/handle/20.500.12584/540

[52] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). International reflections on the Netherlands didactics of mathematics: Visions on and experiences with Realistic Mathematics Education (p. 366). Springer Nature.

[53] Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular. VU Research Portal.

[54] Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, S., Hidayanto, E., & Sulandra, I. M. (2019). A commognitive framework: The process of solving mathematical problems of middle school students. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 18(2), 89-102.

[55] Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). Thinking mathematically. Addison-Wesley.

[56] Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. For the learning of mathematics, 9(2), 2-8.

[57] Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). Cómo plantear y resolver problemas (No. 04; QA11, P6.). México: Trillas.

[58] Dreyfus, T. (1991, June). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 33-48).

[59] Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas (Vol. 2). Libros del Zorzal.

[60] Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1–21(March 1987), 2–21

[61] Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento construido en el marco del Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.

[62] Little, A. W. (2006). Education for all: Multigrade realities and histories. In Education for All and Multigrade Teaching (pp. 1-26). Springer, Dordrecht.

[63] Jiménez, L. R., & Espinosa, C. I. (2019). Aprovechamiento del material manipulativo para fortalecer el pensamiento matemático en aula multigrado. EDUCACIÓN Y CIENCIA, (23), 513-529.

[64] Abós Olivares, P., & Boix Tomás, R. (2017). Evaluación de los aprendizajes en escuelas rurales multigrado (No. ART-2017-102263).

[65] Reséndiz, L., Block, D., & Carrillo, J. (2017). A Math Class about Word Problems in a one-room School. A Case Study. Educación matemática, 29(2), 99-123.

[66] Colbert, V., Arboleda, J. (2016). Bringing a student-centered participatory pedagogy to scale in Colombia. J Educ Change 17, 385–410 https://doi.org/10.1007/s10833-016-9283-7

[67] Vivas, C. J., Murillo, Z. L., & Cristancho, J. R. (2017). Scratch. Estrategia didáctica para el aprendizaje de las tablas de multiplicar en escuela nueva. Educación y Ciencia, (20), 43-60.

[68] Ripamonti, C. (2017). Orientaciones pedagógicas para el aula multigrado. Matemática.

[69] Pinzón, M. A. b. (2018). Aprendiendo matemáticas, lenguaje y ciencias naturales desde una situación problema (Doctoral dissertation, Bogotá: Universidad Externado de Colombia, 2018.).

[70] Jiménez y Espinoza 2019

[71] Proenza, Y. C., Romero, R. H. R., & Marrero, H. (2020). Calidad de la educación: reflexiones acerca de las áreas de contenido, dominios cognitivos y nivel de desempeño del aprendizaje de la Matemática. Opuntia Brava, 12(2), 272-283.

[72] Bonilla 2020

[73] Bustamante, M. V., & Díaz, D. L (2020). Análisis de gráficos estadísticos en módulos de matemática para la enseñanza de escuelas rurales multigrado en Chile. Revista espacios. ISSN 0798 1015

[74] Lissabet, J. L. R. (2019). Diagnóstico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en la escuela primaria multigrado cubana (Original). Roca. Revista científico-educacional de la provincia Granma, 15(2), 65-79.

[75] Hernandéz, A. L. (2021). Acercamiento a la realidad educativa en las escuelas del sector rural venezolano. Revista Scientific, 6(19), 264-278.

[76] Da Silva, M. J., & de Miranda, M. H. G. (2020). A etnomatemática como alternativa às metodologias de docentes que ensinam matemática em escolas do campo. Ensino da Matemática em Debate, 7(2), 48-70

[77] Casserly, A. M., Tiernan, B., & Maguire, G. (2019). Primary teachers' perceptions of multi-grade classroom grouping practices to

support inclusive education. European Journal of Special Needs Education, 34(5), 617-631

[78] Díaz, J. y Bermejo V. (2007) Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2007) 10(3): 335-364. Recepción: Octubre 23, 2006/Aceptación: Agosto 13, 2007

[79] Jung, J., & Schütte, M. (2018). An interactionist perspective on mathematics learning: conditions of learning opportunities in mixed-ability groups within linguistic negotiation processes. Springer, 1-11. doi:https ://doi.org/10.1007/s1185 8-018-0999-0)

[80] Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). Journal of Education, 196(2), 1-38.

[81] Thephavongsa, S. (2018). Enhancing the teaching skills of the multi-grade teachers through lesson study. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 17(4).

[82] Naparan, G. B., & Alinsug, V. G. (2021). Classroom strategies of multigrade teachers. Social Sciences & Humanities Open, 3(1), 100109.